1806

Illustratio paradoxi circa progressionem numerorum idoneorum sive congruorum

Leonhard Euler

ILLUSTRATIO PARADOXI
CIRCA PROGRESSIONEM NUMERORUM IDONEORUM SIVE CONGRUORUM

(V. Nov. Act. T. XIV. pag. 51. No. 7.)

Conventui exhibita die 20. Aprilis 1778.

I. Insigne istud paradoxon in hoc consistebat, quod, etiamsi numeri idonei secundum certam legem formentur et progrediantur, multitudo tamen eorum non sit infinita sed tantum vsque ad 65 terminos porrigatur, cujusmodi paradoxon circa nullam adhuc aliam seriem observatum esse memini, neque vero etiam istum finitum terminorum numerum aliter stabilire mihi licuit, nisi quod post terminum 65, qui est 1848, nullus praeterea se obtulerit, etiamsi examen usque ad 10000 et ultra continuaverim.

II. Neque etiam ulla alia via patere videtur ad hoc insigne paradoxon demonstrandum. Quocirca haud parum lucis in hac re maxime abscondita afferetur, quando saltem pro certa specie horum numerorum, veluti quadratorum, demonstrari poterit, eorum multitudinem revera esse terminatam, neque in serie numerorum idoneorum alios numeros quadratos occurrere posse, praeter quinque priores 1, 4, 9, 16 et 25, id quod sequenti modo ex ipsa progressionis lege demonstrabo.

III. Transferamus igitur regulam numeros idoneos inveniendi, loco citato expositam, tantum ad numeros quadratos, quae propterea sequenti modo erit enuncianda:

Ex

Ex serie omnium numerorum quadratorum, pro quolibet numero primo p, excludantur numeri in hac forma contenti $px - yy$ et maiores quam $\frac{1}{4}pp$, praeter hos $pp - yy$, quod si pro singulis numeris primis fuerit factum, ex serie numerorum quadratorum relinquentur ii, qui sunt idonei. Inter numeros autem primos loco binarii eius quadratum 4 sumi debere vidimus. Cum autem formula $px - yy$ nullos numeros quadratos involuat, hinc nulla exclusio locum habet.

IV. Idem euenit pro numero primo $p = 3$, si quidem formula $3x - yy$ nullos numeros quadratos inuoluit, quod idem de omnibus numeris formae $p = 4n - 1$ est tenendum. Si enim formula $(4n - 1)x - yy$ esset quadratum, puta zz, foret summa duorum quadratorum $yy + zz$ diuisibilis per $4n - 1$, quod impossibile esse notum est; ex quo intelligitur pro p nobis alios numeros primos non relinqui, nisi in hac forma $4n + 1$ contentos.

V. Sit igitur $p = 5$, ita vt ex serie numerorum quadratorum excludi debeant, qui in forma $5x - yy$ continentur, et qui superant $\frac{1}{4}pp = 6\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in forma $25 - yy$ continentur, qui sunt 9 et 16, vnde omnia quadrata maiora in forma $5x - yy$ contenta excludi debebunt. Cum igitur omnia quadrata per 5 non diuisibilia sint vel formae $5x - 1$, vel $5x - 4$, euidens est hinc omnia quadrata per 5 non diuisibilia, simulque maiora quam $6\frac{1}{4}$, excludi debere ex serie omnium numerorum quadratorum; hoc ergo facto relinquetur sequens quadratorum series: 1, 4, 9, 16, 25, 10^2, 15^2, 20^2. Hic scilicet post 16 alii quadrati non relinquuntur, nisi quorum radices diuisibiles sunt per 5.

VI.

VI. Sequens numerus formae $4x+1$ est $p=13$, vnde numeri excludi debebunt in forma $13x-yy$ contenti, qui quidem sunt maiores quam $42\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in forma $169-yy$ continentur, qui sunt 25 et 144. Praeter hos ergo numeri quadrati excludendi, maiores quam $42\frac{1}{4}$, continentur in forma $13x-yy$, quae forma continet omnes plane quadratos, quorum radices non sunt per 13 divisibiles, sicque his exclusis post 25 alii non relinquentur nisi per 13 divisibiles. Per conditionem autem praecedentem alii non sunt relicti, nisi per 5 divisibiles; ex quibus ergo si auferantur omnes per 13 non diuisibiles, praeter ipsum 25, quia minus quam $42\frac{1}{4}$, alii quadrati non relinquentur, nisi qui simul per 5 et 13 sint divisibiles, qui ergo omnes continentur in forma $(65\alpha)^2$; superstites ergo numeri quadrati erunt: 1, 4, 9, 16, 25, 65^2, 130^2, 195^2, 260^2 etc.

VII. Sequens numerus primus formae $4n+1$ est $p=17$, hincque formula excludendorum erit $17x-yy$, quatenus sunt maiores quam $\frac{1}{4}pp=72\frac{1}{4}$, exceptis tamen iis, qui in formula 17^2-yy continentur, qui sunt 15^2 et 8^2, qui autem per praecedentes conditiones sunt deleti. Ex praecedenti igitur serie omnia quadrata deleri debent per 17 non divisibilia; unde patet post 25 alios non relinqui, nisi qui simul per 5, 13 et 17 sunt divisibiles, qui ergo in hac formula continenter $(5, 13, 17)^2$, quorum ergo primus est 1105^2.

VIII. Sequens numerus primus formae $4n+1$ est $p=29$, vnde formula numeros excludendos continens est $29x-yy$, quatenus scilicet continet quadratos, ita ut sit $29x=yy+zz$. Haec autem formula omnes plane continet quadra-

quadratos per 29 non divisibiles, quibus ergo a praecedentibus ablatis alii non supererunt, nisi qui in formula $(5, 13, 17, 29\,a)^2$ continentur, quorum minimus est: 32045.

IX. Quodsi hoc modo sequentes numeros primos formae $4n+1$ evoluamus, evidens est post quinos quadratos initiales 1, 4, 9, 16 et 25 in infinitum usque nullum alium occurrere idoneum.

X. Si igitur quaestio instituatur de numeris quadratis, qui simul sint idonei, rigide iam est demonstratum tales numeros non dari, praeter hos quinque: 1, 4, 9, 16, 25; vnde iam satis clare intelligere licet, quemadmodum, non obstante lege progressionis, multitudo omnium plane numerorum idoneorum possit esse terminata, ac fortasse hoc simili modo aliquando demonstrari poterit.

XI. In hac demonstratione assumsimus in forma $px - yy$ omnia contineri quadrata, quae non sint per numerum p divisibilia. Est enim $p = 4n + 1$ semper summa duorum quadratorum, quae sit $aa + bb$, ita ut habeamus $(aa + bb)x - yy = zz$, vnde, sumpto $x = ff + gg$, colligitur, in formula $px - yy$ numerum y ad p primum esse debere.

DEMON-