1806

Recherches sur quelques intégrations remarquables dans l'analyse des fonctions à deux variables connues sous le nom de différences partielles

Leonhard Euler

RECHERCHES
SUR QUELQUES INTÉGRATIONS REMARQUABLES
DANS L'ANALYSE DES FONCTIONS À DEUX VARIABLES
CONNUES SOUS LE NOM
DE DIFFÉRENCES PARTIELLES;

PAR

Mr. LEONARD EULER.

Présenté à l'Académie le 8 Décembre 1777.

Prenant z pour marquer une fonction quelconque des deux variables x et y, on sait que la première différentiation, selon qu'on prend ou la seule x ou la seule y pour variable, fournit ces deux formules différentielles du premier degré: $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. La seconde différentiation donne ces trois formules différentielles du second ordre: $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$. La troisième différentiation conduit à ces quatres formules différentielles du troisième degré: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. La quatrième différentiation produit ces cinq différentielles du quatrième degré: $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$; et ainsi de suite. Nous omettons ici les guil-

lemets,

lemets, entre lesquels on a coûtume ordinairement de renfermer ces formules, puisque aucune ambiguité n'est à craindre dans les recherches que nous allons entreprendre.

Cela posé je considérerai ici les expressions suivantes:

I. $P = x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$

II. $Q = x^2.\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + xy.\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + y^2.\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$

III. $R = x^3.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3xyy.\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^3.\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

IV. $S = x^4.\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4x^3y.\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y} + 6xxyy.\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} + 4xy^3.\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3} + y^4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$

et ainsi de suite. En général nous aurons celle-ci:

$$Z = x^\lambda.\frac{\partial^\lambda z}{\partial x^\lambda} + \frac{\lambda}{1}x^{\lambda-1}y.\frac{\partial\lambda z}{\partial x^{\lambda-1}\partial y} + \frac{\lambda}{1}.\frac{\lambda-1}{2}.x^{\lambda-2}y^2.\frac{\partial\lambda z}{\partial x^{\lambda-2}\partial y^2} + \frac{\lambda}{1}.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}.\frac{\partial\lambda z}{\partial x^{\lambda-3}\partial y^3} + \text{etc.}$$

Ici j'observe d'abord, que chacune de ces expreſsions peut être formée de celle qui la précède immédiatement, et nous verrons qu'on aura toujours:

$$Q = x.\frac{\partial P}{\partial x} + y.\frac{\partial P}{\partial y} - 1P;$$
$$R = x.\frac{\partial Q}{\partial x} + y.\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q;$$
$$S = x.\frac{\partial R}{\partial x} + y.\frac{\partial R}{\partial y} - 3R;$$
$$T = x.\frac{\partial S}{\partial x} + y.\frac{\partial S}{\partial y} - 4S;$$

et ainsi de suite. Où il est à remarquer que si nous mettons O pour la formule qui précède la premiere P, nous aurons $O = z$; et partant $P = x\frac{\partial O}{\partial x} + y\frac{\partial O}{\partial y} - 0.O$

Pour démontrer la vérité de toutes ces équations, commençons par la premiere, qui exprime la valeur de Q, et

puisque

puisque $P = x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y}$, la différentiation nous donnera

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1.\frac{\partial z}{\partial x} + x.\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + y\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} \text{ et}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1.\frac{\partial z}{\partial y} + x.\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

De là nous tirerons cette équation:

$$x.\frac{\partial P}{\partial x} + y.\frac{\partial P}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xx\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + yy\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

qui se reduit ouvertement à cette forme:

$x.\frac{\partial P}{\partial x} + y.\frac{\partial P}{\partial y} = P + Q$, et partant on aura

$$Q = x.\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P.$$

Pour la seconde de nos équations, puisque nous avons supposé $Q = x^2\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$, nous en tirons

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2xy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + y^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2};$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + 2y\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} + x^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 2xy\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Maintenant la combinaison de ces formules fournira:

$$x.\frac{\partial Q}{\partial x} + y.\frac{\partial Q}{\partial y} = 2xx.\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 4xy.\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + 2yy.\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$
$$+ x^3.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3xyy.\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^3.\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Cette équation se reduit évidemment à la suivante:

$x.\frac{\partial Q}{\partial x} + y.\frac{\partial Q}{\partial y} = 2Q + R$, de sorte qu'il y a

$$R = x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q$$

Pour démontrer la vérité de la troisième de nos équations, puisque nous avons $R = x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3xyy\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, nous en tirons:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 3xx\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 6xy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3yy\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$$
$$+ x^3\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 3xxy\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y} + 3xyy\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} + y^3\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3};$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = 3xx\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 6xy\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + 3yy\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$
$$+ x^3\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y} + 3xxy\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} + 3xyy\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3} + y^3\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Ces

Ces deux équations étant combinées, elles donnent:

$$x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}=3x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+9xxy\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+9xyy\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+3y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$
$$+x^4\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+4x^3y\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}+6xxyy\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+4xy^3\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}+y^4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

équation qui se reduit encore évidemment à celle-ci: $x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}=3R+S$, d'où l'on tire par conséquent $S=x\frac{\partial R}{\partial x}+y\frac{\partial R}{\partial y}-3R$.

Il seroit superflu de démontrer par le même calcul la vérité des équations suivantes, puisqu' il est déja assez clair, qu' on parviendra, par des opérations semblables, toujours à des équations telles que nous les avons assignées ci-dessus. Or ces beaux rapports entre les quantités P, Q, R, etc. nous conduiront à l'avantage de trouver les intégrales, et même les intégrales complettes, des équations différentielles suivantes: 1°. $P=0$; 2° $Q=0$; 3° $R=0$; 4° $S=0$; et ainsi de suite. Pour cet effet nous n'avons qu' à résoudre les trois problèmes préliminaires suivans.

Problème préliminaire I.

Trouver une fonction des deux variables x et y, qui soit v, telle qu' il devienne $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0$

Solution.

Puisque v est fonction de x et y, supposons qu' en la différenciant, en prenant tant x que y variable, on trouve $\partial v=p\partial x+q\partial y$, desorte que $p=\frac{\partial v}{\partial x}$ et $q=\frac{\partial v}{\partial y}$, et partant il faudra satisfaire à cette équation: $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=xp+yq=0$,

d'où

d'où l'on tire $q = -\frac{xp}{y}$. Cette valeur étant substituée, elle nous donnera $\partial v = p\partial x - \frac{px\partial y}{y} = p\,(\frac{y\partial x - x\partial y}{y})$. Il faut donc que cette formule soit intégrable. Qu'on la reduise donc à cette forme: $\partial v = p\,(\frac{y\partial x - x\partial x}{yy})$, où posant $\frac{x}{y} = p$, pour avoir $py\partial t = \partial v$, il est clair que pour que cette formule admît l'intégration, il faut absolument que py soit fonction de la seule variable t, et alors l'intégrale sera aussi une fonction de la même quantité t.

Employons dans la suite, pour marquer des fonctions quelconques, les caractères $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. de sorte que $\mathfrak{A}:t$, ou $\mathfrak{B}:t$, ou $\mathfrak{C}:t$ nous représente une fonction quelconque de t. Outre cela nous nous servirons de la manière assez généralement reçue, pour marquer les différentielles d'un ordre quelconque, savoir: $\partial\,.\,\mathfrak{A}:t = \partial t\ \mathfrak{A}':t$, $\partial\,.\,\mathfrak{A}':t = \partial t\ \mathfrak{A}'':t$, $\partial\,.\,\mathfrak{A}'':t = \partial t\ \mathfrak{A}''':t$, etc. Cela remarqué notre dernière équation intégrée donnera $v = \mathfrak{A}:t$, ou bien, à cause de $t = \frac{x}{y}$, nous aurons $v = \mathfrak{A}:\frac{x}{y}$; de sorte qu'on pourra prendre pour v une fonction quelconque de $\frac{x}{y}$; où il est bon de remarquer que toutes ces fonctions sont comprises sous le nom de fonctions homogènes de nulle dimension de x et y.

Problème préliminaire II.

Trouver une fonction des deux variables x *et* y, *qui soit* v, *telle qu' il y ait* $nv = x\,\frac{\partial v}{\partial x} + y\,\frac{\partial v}{\partial y}$

Solution.

Posons, comme auparavant, $\partial v = p\partial x + q\partial y$, et puisque $p = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial v}{\partial y}$, nous aurons cette condition à remplir:

$nv =$

$nv = px + qy$. Eliminons de ces deux équations la lettre q, en multipliant la première par y et l'autre par ∂y, et en ôtant la dernière de la première, nous aurons celle-ci: $y\partial v - nv\partial y = p\,(y\partial x - x\partial y)$; où il faut chercher la fonction p, pour que cette équation devienne intégrable.

Pour rendre intégrable la première partie de cette équation, on n'a qu'à la diviser par y^{n+1}, d'où l'on tire $\frac{y\partial v - nv\partial y}{y^{n+1}} = \partial . \frac{v}{y^n} = p\,(\frac{y\partial x - x\partial y}{y^{n+1}})$. Or puisque la formule $\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$ est la différentielle de $\frac{x}{y}$, représentons nôtre équation sous cette forme: $\partial : \frac{v}{y^n} = \frac{p}{y^{n-1}} \times \frac{y\partial x - x\partial y}{yy} = \frac{p}{y^{n-1}}\, \partial . \frac{x}{y}$; où il est évident que $\frac{p}{y^{n-1}}$ doit être fonction de $\frac{x}{y}$; et puisque l'intégrale sera par conséquent aussi une telle fonction, nous aurons, en intégrant cette équation, $\frac{v}{y^n} = \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; d'où nous obtiendrons cette valeur pour la fonction cherchée: $v = y^n\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Puisque une fonction de $\frac{x}{y}$, étant multipliée par $\frac{x}{y}$, ou en général par $\frac{x^n}{y^n}$, demeure toujours fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ nous pourrons écrire $\frac{x^n}{y^n}\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, et partant la valeur trouvée pour v pourra aussi être exprimée par $v = x^n\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, ou bien $v = x^{n-1} y\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, ou bien $v = x^{n-2} y^2\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, et ainsi de suite. Or on sait que toutes ces fonctions sont nommées homogènes, dont le nombre des dimensions est partout $= n$.

Problème préliminaire III

Trouver une fonction de deux variables x *et* y, *qui soit* v, *telle qu'il y ait* $nv = x\,\frac{\partial v}{\partial x} + y\,\frac{\partial v}{\partial y} - y^\lambda\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Solu-

Solution.

Soit encore: $dv = p\,\partial x + q\,\partial y$; pour avoir $p = \frac{\partial v}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial v}{\partial y}$, et on aura cette condition à remplir: $nv = px + qy + y^\lambda \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Qu'on forme maintenant de ces deux équations celle-ci: $y\,\partial v - nv\,\partial y = p\,(y\,\partial x - x\,\partial y) - y^\lambda\,\partial y\,\mathfrak{A}\frac{x}{y}$, dont le premier membre deviendra intégrable en le divisant par y^{n+1}. Nous aurons donc $\partial \cdot \frac{v}{y^n} = p\frac{(y\partial x - x\partial y)}{y^{n+1}} - y^{\lambda-n-1}\,\partial y\ \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Pour résoudre cette équation mettons $\frac{x}{y} = t$, ou bien $x = yt$, et au lieu de $\mathfrak{A}:t$ écrivons T, desorte que T soit une fonction donnée de t, et à cause de $\partial x = t\,\partial y + y\,\partial t$ notre équation sera $\partial \cdot \frac{v}{y^n} = \frac{p\,\partial t}{y^{n-1}} - T y^{\lambda-n-1}\,\partial y$.

Intégrons maintenant, entant qu'il est permis, et puisque $\int T y^{\lambda-n-1}\,\partial y = \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\ T - \int \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T'\,\partial t$, en supposant $\partial T = T'\,\partial t$ nous aurons en intégrant $\frac{v}{y^n} = -\frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T + \int \partial t\,(\frac{p}{y^{n-1}} + \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T)$, d'où l'on voit que la formule $\frac{p}{y^{n-1}} + \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T$ doit être une fonction quelconque de t, que nous marquerons $\mathfrak{B}:t$, et partant nous aurons cette équation intégrale: $\frac{v}{y^n} = \mathfrak{B} : t - \frac{y^{\lambda-n}}{\lambda-n}\,T$, et de là $v = y^n\,\mathfrak{B}:t - \frac{y^\lambda}{\lambda-n}\,T$.

Remettons à présent à la place de t sa valeur $\frac{x}{y}$ et $\mathfrak{A}:t$ au lieu de T, où il faut remarquer que le caractère $\mathfrak{A}$ marque une fonction donnée de $\frac{x}{y}$, puisque elle se trouve dejà dans l'équation différentielle donnée. Mais le caractère $\mathfrak{B}$ indiquera ici une fonction quelconque arbitraire de $\frac{x}{y}$, qui est introduit dans les intégrations ordinaires. Par conséquent nous aurons pour la solution de nôtre problème la valeur suivante de la fonction v, savoir $v = y^{\lambda}\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} - \frac{y^{\lambda}}{\lambda - n}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Ici on demandera peut-être quelle sera la valeur de v, au cas que l'exposant λ seroit égal à n, puisque alors le dernier membre de nôtre équation deviendroit infini? Pour écarter cette difficulté mettons $\lambda = n + \omega$, en marquant par ω une quantité infiniment-petite, et nous aurons $y^{\lambda} = y^{n} \cdot y^{\omega} = y^{n}(1 + \omega\, l\, y)$, ce qui nous donnera $v = y^{n}\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} - \frac{y^{n}(1 + \omega\, l\, y)}{\omega}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Maintenant puisque $\mathfrak{B}$ marque une fonction arbitraire, il sera permis de mettre à la place de $\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ cette formule: $\frac{1}{\omega}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y} + \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$, où $\mathfrak{C}$ marque une fonction arbitraire quelconque, et en substituant ces valeurs les membres infinis se détruiront et l'intégrale cherchée pour le cas $\lambda = n$ sera $v = y^{n}\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y} - y^{n}\, l\, y\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Nous serons donc en état de résoudre maintenant le problème suivant.

I Problème.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, *ou bien chercher la nature de la fonction* z.

Solution.

Ici nous avons donc $P = 0$, et le premier problème préliminaire nous fournira d'abord l'intégrale cherchée, puisqu'on n'a qu'à écrire z au lieu de v, et partant nôtre intégrale complette sera $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Ou bien on pourra prendre pour z une fonction quelconque homogène de nulle dimension de x et y.

Qu'on

Qu'on prenne, par exemple, $z = \frac{xx - yy}{xx - yy}$, et on aura $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4xyy}{(xx+yy)^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4xxy}{(xx+yy)^2}$, d'où il devient évidemment $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Dela même manière, en prennent $z = \frac{x+y}{\sqrt{xx+yy}}$, on aura $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yy - xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xx - xy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, et de là il s'ensuit ouvertement $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

II Problème

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré: $xx\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + yy\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$.

Solution.

On suppose donc ici que $Q = 0$, et partant, puisque nous avons trouvé ci-dessus $Q = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} - P$, nous aurons à résoudre cette équation différentielle du premier degré $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = P$ dont l'intégrale se trouve par le second problème préliminaire, en mettant P au lieu de v et $n = 1$, d'où l'on tire $P = y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, où $\mathfrak{A}$ marque une fonction quelconque. Mettons àprésent au lieu de P sa valeur, et nous aurons à résoudre cette équation différentielle du premier degré: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Cette équation étant comparée avec le troisième probleme préliminaire nous donne $n = 0$, $\lambda = 1$ et $v = z$; par conséquent l'intégrale complette cherchée de notre équation sera $z = \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien, puisque les deux fonctions sont arbitraires, on pourra mettre $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, qui renferme par conséquent deux fonctions arbitraires, comme la nature des équations différentielles du second ordre l'exige.

III Probleme.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du troisième degre: $x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3xxy \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xyy \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^2} = 0.$

Solution.

Il s'agit donc ici de rendre $R = 0$, et en mettant pour R sa valeur indiquée ci-dessus, nous aurons à résoudre cette équation: $x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} - 2Q = 0$, qui, étant comparée avec celle du seconde Problème préliminaire, donne $v = Q$ et $n = 2$, donc son intégrale complette est $Q = y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$.

Maintenant ayant $Q = x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - P$, nous aurons à résoudre l'équation $x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - P = y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui étant comparée avec celle du troisième problème préliminaire donne $v = P$, $n = 1$, $\lambda = 2$, ce qui étant substitué donne l'intégrale suivante $P = y \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien, puisque les fonctions sont arbitraires, on aura $P = y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$.

Enfin donc puisque $P = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, nous aurons cette équation à résoudre: $x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y . \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$, qui comparée avec l'équation du troisième problème préliminaire nous fournit $v = z$, $n = 0$, et pour λ nous aurons deux valeurs différentes, ou $\lambda = 2$, ou $\lambda = 1$; car il est évident que l'un et l'autre pourra être traité de la même manière; par conséquent l'intégrale complette de l'équation proposée sera $z = \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y \mathfrak{A} : \frac{x}{y} - y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien en changeant les caractères, signes des fonctions arbitraires, il y aura $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2 \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$.

IV

IV Problème.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du quatrième degré :

$$0 = x^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 4 x y^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 6 xxyy \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 x y^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + y^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}.$$

Solution.

On aura donc ici $S = 0$, ou bien $x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} - 3R = 0$, ce qui comparé avec le second problème préliminaire fournit $v = R$ et $n = 3$ et partant $R = y^3 \mathfrak{A} \frac{x}{y}$. Mettant donc au lieu de R sa valeur, il faudra résoudre cette équation $x \frac{\partial Q}{\partial y} + y \frac{\partial Q}{\partial y} - 2 Q = y^3 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui comparée avec le troisième préliminaire, à cause de $v = Q$, $n = 2$ et $\lambda = 3$, donne $Q = y^2 \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^3 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien $x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - P = y^2 \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^3 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; où il y a par conséquent $v = P$, $n = 1$ et $\lambda = 2$ ou 3, d'où l'on tire $P = y \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y} : + y^3 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = y \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^2 \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^3 \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$, qui comparaison faite donne $v = z$, $n = 0$ et $\lambda = 1$ ou 2, ou 3, ce qui donne
$z = \mathfrak{B} : \frac{x}{y} - y \mathfrak{A} : \frac{x}{y} - y^2 \mathfrak{A} : \frac{x}{y} - y^3 \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, ou bien
$z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^2 \mathfrak{C} : \frac{x}{y} + y^3 \mathfrak{D} : \frac{x}{y}$.

V Problème général.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du degré n^{ieme} :

$$x^n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + \frac{n}{1} x^{n-1} y \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} y^2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \text{etc.}$$

So-

Solution.

Ici il est facile à voir qu'en faisant les opérations successivement comme dans les problèmes précédens on parviendra enfin à cette intégrale complette:

$$z = \mathfrak{A} : \tfrac{x}{y} + y\,\mathfrak{B} : \tfrac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{C} : \tfrac{x}{y} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; y^{n-1}\,\mathfrak{N} : \tfrac{x}{y},$$

où le nombre des fonctions arbitraires est $= n$, et partant égal au degré de l'équation proposée; d'ou l'on voit que l'intégrale de chaque degré renferme toutes les intégrales de tous les degrés inférieurs, et outre cela encore un terme qui apartient exclusivement au degré proposé.

Voilà donc les intégrations de toutes ces équations différentielles 1°. $P = 0$. 2°. $Q = 0$. 3°. $R = 0$. 4°. $S = 0$. etc. en assignant à chacune de ces lettres les valeurs qui leur ont été données au commencement, et la méthode do..t nous nous sommes servis demande pour chaque cas autant d'intégrations que le degré du différentiel indique. Or un jeune Géomètre, en faisant les calculs précédens, a observé: que toutes ces solutions pourront être exécutées plus facilement moyennant une seule intégration, et cette méthode a encore ce grand avantage sur celle dont nous nous sommes servis jusqu'ici, qu'elle s'étend aussi à l'intégration des équations differentielles composées et comprises dans cette forme générale: $Az + BP + CQ + DR + ES +$ etc. $= 0$, où tous les degrés des différentielles se trouvent joints ensemble, et où les coefficiens constans A, B, C, D, etc. peuvent être pris à volonté. Et la résolution de tous ces cas se peut toujours tirer du seul problème preliminaire second, qui donne pour l'équation différentielle $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} \quad nv = 0$ cette intégrale complette: $= y^n\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Pour éclaircir cette nouvelle méthode, nous ajouterons les Problemes suivans.

Pro-

Problème I.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du premier degré: $Az + BP = 0$, *ou bien* $Az + B\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

Solution.

Pour cet effet mettons dans le problème préliminaire $v = az$, pour avoir cette équation: $a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz = 0$, dont l'intégrale est $z = y^n : \mathfrak{A}\frac{x}{y}$. Maintenant au lieu de $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ mettons sa valeur assignée P, et l'équation que nous venons d'intégrer sera $aP - naz = 0$, qui, comparée avec la proposée $Az + BP$, donne $A = -na$ et $B = a$, par conséquent $a = B$ et $A = -nB$, ou bien $A + nB = 0$. En tirant de cette équation la valeur de $n = -\frac{A}{B}$, l'intégrale de l'équation proposée sera $y^n \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$. Cette solution ne renferme rien qui n'auroit pu être fait par la méthode précédente, mais le problème suivant mettra dans tout son jour le prix de la nouvelle méthode.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du second degré $Az + BP + CQ = 0$.

Solution.

Pour résoudre cette équation supposons dans le problème préliminaire $v = az + bp$, pour avoir cette intégrale $az + bP = y^n \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, qui convient donc avec cette équation $a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz + b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP = 0$. Met-

tons

tons à présent dans cette équation, au lieu de $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$, sa valeur absolüe tirée des formules supposées au commencement, laquelle est p, et au lieu de la formule $x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}$ mettons cette valeur absolüe $Q + P$, et nous aurons cette équation:
$aP + bQ + bP - naz - nbP = 0$, ou bien
$-naz + (a + b - nb)P + bQ = 0$, qui étant comparée avec la forme supposée $Az + BP + CQ = 0$, nous donne pour les lettres a et b les valeurs suivantes: $b = C$, $a = B - C + nC$, et $0 = A + n(n-1)C$, d'où il faut tirer la valeur de n.

Or puisque cette dernière équation est du second degré, elle aura deux racines, qui soyent α et β, dont chacune nous donnera des valeurs particulieres pour a et b, qui sont:

$n = \alpha$	$n = \beta$
$a = B + (\alpha - 1)C$	$a = B + (\beta - 1)C$
$b = C$	$b = C$

de là nous aurons deux équations intégrales

$$(B + (\alpha - 1)C)z + CP = y^{\alpha}\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$$
$$(B + (\beta - 1)C)z + CP = y^{\beta}\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$$

Maintenant de ces deux équations on n'a qu'à chasser la lettre P, ce qui se fait en prenant leur différence, ce qui donne $(\alpha - \beta)Cz = y^{\alpha}\mathfrak{A}:\frac{x}{y} - y^{\beta}\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$; et puisque les fonctions sont absolument arbitraires, on pourra représenter l'intégrale sous cette forme: $z = y^{\alpha}\mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^{\beta}\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$.

Corollaire.

Delà se déduit aisément l'intégrale de l'équation $Q = 0$, que nous avons traitée ci-dessus; on n'a qu'à supposer $A = 0$ et et $B = 0$ et $C = 1$, et alors l'équation pour le nombre n devient $n(n-1) = 0$, dont les racines sont $n = 0$ et $n = 1$, par conséquent $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, et partant l'intégrale de ce cas sera $z = \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du troisième degré : $Az + BP + CQ + DR = 0$.

Solution.

Pour parvenir à la solution de ce problème, supposons dans le second problème préliminaire $v = az + bP + cQ$, et l'intégration nous fournit d'abord cette équation: $az + bP + cQ = y^n \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, et cette intégrale convient à l'équation différentielle suivante:

$$\left.\begin{array}{l} a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz \\ + b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP \\ + c\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - ncQ \end{array}\right\} = 0$$

Maintenant au lieu des formules différentielles mettons leurs valeurs finies, et nous parviendrons à cette équation:

$aP + b(P + Q) + c(R + 2Q) - naz - nbP - ncQ = 0$

qui se reduit à cette forme:

$-naz + (a + b(1-n))P + (b + (2-n)c)Q + cR = 0$, qui étant comparée avec la proposée nous fournit les équations de condition suivantes:

$A = -na$; $B = a + b(1-n)$; $C = b + (2-n)c$; $D = c$.

Ayant donc de la derniere $D = c$, la troisième nous donnera $b = C + (n-2)D$; ensuite la seconde équation nous fournit $a = B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D$, et cette valeur substituée dans la premiere donne cette valeur finale:
$A + nB + n(n-1)C + n(n-1)(n-2)D = 0$, qui étant du troisième degré renferme trois racines, qui soyent α, β, γ. Chacune de ces racines nous donnera deux valeurs particulières pour les lettres a, b, c, qui étant rapportées à la racine α, supposons que pour la racine β on ait a', b', c', et qu'à la racine γ répondissent celles-ci: a'', b'', c'', chacun de ces cas nous fournira donc une équation intégrale particulière, et ces équations seront

$$a z + b P + c Q = y^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$$
$$a' z + b' P + c' Q = y^{\beta} \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$$
$$a'' z + b'' P + c'' Q = y^{\gamma} \mathfrak{C} : \frac{x}{y}.$$

Aprésent il sera facile de trouver pour chacune de ces équations certains multiplicateurs tels, qu'en ajoutant les produits ensemble les quantités P et Q soyent détruites; et puisque ces multiplicateurs ne changent pas la nature des fonctions arbitraires, on parviendra par ce moyen à cette équation finale:
$z = y^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^{\beta} \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^{\gamma} \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$
qui exprime l'intégrale complette de notre équation différentielle proposée.

Corollaire.

Pour tirer de là l'intégrale de l'équation $R = 0$, on n'a qu'à mettre $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1$, et alors l'équation cubique pour le nombre n deviendra $n(n-1)(n-2) = 0$, dont les trois racines sont ouvertement 0, 1, 2, desorte que

$a = 0$,

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$; d'où nous tirons l'intégrale cherchée pour ce cas $z = \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^2\,\mathfrak{C}:\frac{x}{y}$, qui convient parfaitement avec celle qui a été trouvée ci-dessus.

Problème III.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle du quatrième degré: $Az + BP + CQ + DR + ES = 0$.

Solution.

Pour résoudre cette question mettons dans le second problème préliminaire $v = az + bP + cQ + dR$, et nous aurons d'abord cette intégrale: $az + bP + cQ + dR = y^n\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$, qui conviendra donc a cette équation différentielle:

$$\left.\begin{array}{l} a\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - naz \\ + b\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) - nbP \\ + c\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - ncQ \\ + d\left(x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y}\right) - n\partial R \end{array}\right\} = 0$$

Maintenant qu'on écrive au lieu des formules différentielles leurs valeurs finies, pour arriver à cette équation:

$$\left.\begin{array}{ll} + aP & - naz \\ + b(Q + P) & - nbP \\ + c(R + 2Q) & - ncQ \\ + \partial(S + 3R) & - n\partial R \end{array}\right\} = 0$$

dont les termes étant rangés donneront

$$-naz + (a + b(1-n))P + (b + c(2-n))Q + (c + d(3-n))R + dS = 0.$$

 Il

Il ne reste donc qu'à rendre identique cette forme avec la proposée, ce qui produit les cinq égalités suivantes : 1°) $A = -n\,a$; 2°) $B = a + (1-n)\,b$; 3°) $C = b + (2-n)\,c$; 4°) $D = c + (3-n)\,d$; 5°) $E = d$. La dernière nous donne d'abord $d = E$; la quatrième fournit $c = D + (n-3)\,E$; ensuite de la troisième nous tirons $b = C + (n-2)D + (n-2)(n-3)E$; la seconde fournit $a = B + (n-1)C + (n-1)(n-2)D + (n-1)(n-2)(n-3)E$; enfin la première nous conduit à cette équation pour la détermination du nombre n :

$$A + n\,B + n(n-1)\,C + (n-1)(n-2)\,D + n\,(n-1)(n-2)(n-3)\,E = 0.$$

Cette dernière équation étant du quatrième degré soyent α, β, γ, δ les quatre valeurs du nombre n, dont chacune produira pour les lettres a, b, c, d des valeurs particulières. Mettons donc pour le racine α ces mêmes lettres a, b, c, d, pour la racine β : a', b', c', d', pour γ : a'', b'', c'', d'', et pour δ : a''', b''', c''', d'''; et alors nous aurons quatre formes différentes de l'équation intégrale trouvée qui seront :

$$\begin{aligned}
a\,z + b\,P + c\,Q + d\,R &= y^{\alpha}\,\mathfrak{A} : \tfrac{x}{y} \\
a'\,z + b'\,P + c'\,Q + d'\,R &= y^{\beta}\,\mathfrak{B} : \tfrac{x}{y} \\
a''\,z + b''\,P + c''\,Q + d''\,R &= y^{\gamma}\,\mathfrak{C} : \tfrac{x}{y} \\
a'''z + b'''P + c'''Q + d'''R &= y^{\delta}\,\mathfrak{D} : \tfrac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Après avoir trouvé ces quatre équations, il est facile d'en éliminer les trois quantités P, Q, R, de sorte qu'il ne restera à la gauche que la seule quantité z, et puisque les fonctions à la droite, étant multipliées par certaines constantes, ne changent point de nature, on en tirera cette équation finale : $z = y^{\alpha}\,\mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^{\beta}\,\mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^{\gamma}\,\mathfrak{C} : \frac{x}{y} + y^{\delta}\,\mathfrak{D} : \frac{x}{y}$; où il est bon de de remarquer que pour trouver cette équation nous n' avons pas eu besoin de trouver les valeurs de a, b, c, d, ni même les multiplicateurs, pour l' élimination des quantités: P, Q, R.

Problème IV général.

Trouver l'intégrale complette de cette équation différentielle d' un degré quelconque: $Az + BP + CQ + DR + etc. = o$.

Solution.

Toute la solution de cette question se reduit à l'équation pour déterminer toutes les valeurs du nombre n; et il est clair par les problémes précédens, que cette équation aura la forme $A + n B + n(n-1) C + n(n-1)(n-2) D + \text{etc.} = o$, qui montera au même degré auquel se rapporte l'équation différentielle proposée; et partant le nombre n aura autant de valeurs, que nous marquerons par les lettres α, β, γ, δ, etc. et alors l'intégrale complette de l' équation proposée sera $z = y^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^\beta \mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^\gamma \mathfrak{C}:\frac{x}{y} + y^\delta \mathfrak{D}:\frac{x}{y} + \text{etc.}$ qui comprend autant de fonctions arbitraires que l'ordre de la differentielle demande.

Ici il est bon de remarquer, que puisque les deux variables x et y entrent égalenent dans le calcul, au lieu des puissances y^α, y^β, y^γ etc. on pourra aussi mettre de semblables puissances de x, savoir x^α, x^β, x^γ etc. Et en effet, si nous considérons la formule $y^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y}$, puisque $\frac{x^\lambda}{y^\lambda}$ est aussi une fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$ on pourra mettre $\frac{x^\lambda}{y^\lambda}\mathfrak{F}:\frac{x}{y}$; et alors nous

nous aurons $x^{\lambda} y^{\alpha-\lambda} \mathfrak{F} : \frac{x}{y}$. Donc prenant $\lambda = \alpha$, au lieu de la formule $y^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ on pourra mettre $x^{\alpha} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$; et il est aussi clair qu'on pourroit écrire en général $x^{\mu} y^{\nu} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, pourvu que la somme des exposans μ et ν fut égale à α, c'est-à-dire $\mu + \nu = \alpha$.

Cette solution n'aura donc aucune difficulté, tant que les valeurs de l'exposant n, que nous supposons être α, β, γ, δ, etc. sont toutes réelles et inégales entre elles. Mais dans le cas ou quelques unes de ces valeurs sont ou imaginaires ou égales entre elles, il faut recourir à certaines réductions pour rendre l'intégrale réelle dans le premier cas; or pour l'autre cas il faut que le nombre nécessaire des fonctions arbitraires reste non-diminué, sans quoi l'intégrale ne seroit plus complette.

Pour lever toutes ces difficultés commençons par considérer le cas où deux valeurs de n se trouvent imaginaires, savoir α et β, et on sait que ces deux valeurs se reduiront toujours à ces formes: $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$, et partant les termes de l'intégrale, qui dépendent de ces valeurs, seront $y^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$ et $y^{\mu-\nu\sqrt{-1}} \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; et pour les reduire à la réalité supposons $\mathfrak{A} : \frac{x}{y} = \mathfrak{F} : \frac{x}{y} + \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$ et $\mathfrak{B} : \frac{x}{y} = \mathfrak{F} : \frac{x}{y} - \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$, et àprésent ces deux termes en question se reduiront à cette forme: $y^{\mu} \mathfrak{F} : \frac{x}{y} (y^{\nu\sqrt{-1}} + y^{-\nu\sqrt{-1}}) + y^{\mu} (y^{\nu\sqrt{-1}} - y^{-\nu\sqrt{-1}}) \mathfrak{G} : \frac{x}{y}$.

Mettons ici dans les puissances imaginaires e^{ly} au lieu de y, en prenant pour e le nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, et la première formule $y^{\nu\sqrt{-1}} + y^{-\nu\sqrt{-1}}$ deviendra $= e^{\nu\sqrt{-1}\, ly} + e^{-\nu\sqrt{1}\, ly}$, et l'autre $y^{\nu\sqrt{-1}} - y^{-\nu\sqrt{-1}}$ deviendra $= e^{\nu\sqrt{-1}\, ly} - e^{-\nu\sqrt{-1}\, ly}$. Or on sait par les réductions connues

nues que $e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2\cos v$ et $e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}$ sin v. Donc puisque $v = \nu\, ly$, la forme de nos deux termes sera. $y^{\mu}.2\cos v.\,\mathfrak{F}:\frac{x}{y} + y^{\mu}.\,2\sqrt{-1}.\sin v.\,\mathfrak{G}:\frac{x}{y}$; où l'on peut omettre les coëfficiens constans tant réels qu'imaginaires. Nous aurons donc, au lieu des deux termes proposés, ceux-ci: $y^{\mu}\cos \nu\, ly\,\mathfrak{F}:\frac{x}{y} + y^{\mu}\sin \nu\, ly\,\mathfrak{G}:\frac{x}{y}$, toutes les fois que $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$. De là il est clair que lorsque le nombre des valeurs imaginaires de n est 4, 6, 8, 10, etc. puisque chaque couple se reduit toujours à ces deux formules $\mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\mu - \nu\sqrt{-1}$, la reduction se pourra toujours faire de la même manière.

Pour en donner un exemple prenons le cas où l'équation, pour déterminer le nombre n, devient $1 + nn = 0$, qui apartient au second degré, où nous avions trouvé $A + nB + n(n-1)C = 0$, il faudra prendre $A = B = C = 1$, de sorte que l'équation differentielle à intégrer sera pour ce cas $z + P + Q = 0$, ou bien en la développant: $z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + xx\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} + yy\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$. Et puisque pour n nous aurons ces valeurs $\alpha = \sqrt{-1}$, $\beta = -\sqrt{-1}$, et partant $\mu = 0$ et $\nu = 1$, nous en déduisons d'abord $z = \cos.\, ly\,\mathfrak{F}:\frac{x}{y} + \sin.\, ly,\,\mathfrak{G}:\frac{x}{y}$. Pour mieux éclaircir ce cas-ci prenons $\mathfrak{F}:\frac{x}{y} = 0$ et $\mathfrak{G}:\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$, de sorte qu'une intégrale particulière sera $z = \frac{x}{y}\sin.\, ly$, d'où nous tirons $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}.\sin.\, ly$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{yy}.\sin.\, ly + \frac{x}{yy}.\cos.\, ly$, et ensuite $\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{yy}.\sin.\, ly + \frac{1}{yy}.\cos.\, ly$ et $\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{x}{y^3}.\sin.\, ly - \frac{3x}{y^3}.\cos.\, ly$.

Ces

Ces valeurs étant substituées dans l'équation $z + P + Q = 0$, donneront $z = \frac{x}{y} \cos. ly$

$$P = \frac{x}{y} \cos. ly$$

$$Q = -\frac{x}{y} \sin. ly - \frac{x}{y} \cos. ly$$

dont la somme donne $z + P + Q = 0$

Passons au cas où deux ou plusieurs valeurs de n deviennent égales entr' elles. Supposons d'abord que $\beta = \alpha$, et dans la forme intégrale trouvée les deux premiers termes $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\beta \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ se reduiroient à une seule fonction, et partant l'intégrale ne seroit plus complette. Pour remplir ce nombre posons $\beta = \alpha + \omega$, en prenant ω pour un infiniment-petit, et à cause de $y^\beta = y^\alpha \,.\, y^\omega$ et de $y^\omega = 1 + \omega\, ly$, on aura $y^\beta = y^\alpha + \omega y^\alpha ly$, d'où les deux premiers termes deviendront $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + \omega y^\alpha ly\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; où au lieu des deux premiers termes on peut écrire simplement $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y}$, et $\mathfrak{B} : \frac{x}{y}$ au lieu de $\omega\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$; desorte qu'au lieu des deux premiers termes nous aurons àprésent: $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha ly\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y}$

Pour donner un exemple de ce cas, supposons que l'équation pour déterminer le nombre n, soit $nn = 0$, et cette équation appartiendra au second degré, pour lequel nous avions en général $A + n\,B + n\,(n - 1)\,C = 0$, où il faudra mettre $A = 0$, $B = 1$ et $C = 1$, de sorte que l'équation différentielle à intégrer sera $P + Q = 0$, ou bien $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + xx \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + 2\,xy \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} + yy \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0$.

Ayant donc pour la résolution de cette équation $nn = 0$, les deux valeurs égales de n seront $\alpha = 0$ et $\beta = 0$; par

par conséquent l'intégrale complette cherchée de cette équation est $z = \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y\,\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$; où il vaudra la peine de faire voir comment cette valeur satisfait en général à l'équation proposée. Pour cet effet nous différentierons ces formules selon la régle établie cidessus $\partial.\mathfrak{A}:v = \partial v\,\mathfrak{A}':v$ et $\partial.\mathfrak{A}':v = \partial v\,\mathfrak{A}'':v$, et nous trouverons:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} + \frac{ly}{y}\mathfrak{B}':\frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{yy}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\mathfrak{B}:\frac{x}{y} - \frac{xly}{yy}\mathfrak{B}':\frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = \frac{1}{yy}\mathfrak{A}'':\frac{x}{y} + \frac{ly}{yy}\mathfrak{B}'':\frac{x}{y};$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{yy}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} - \frac{x}{y^3}\mathfrak{A}'':\frac{x}{y} + \frac{1}{yy}\mathfrak{B}':\frac{x}{y} - \frac{ly}{yy}\mathfrak{B}':\frac{x}{y}$$
$$- \frac{xly}{y^3}\mathfrak{B}'':\frac{x}{y}$$
$$\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = +\frac{2x}{y^3}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} + \frac{xx}{y^4}\mathfrak{A}'':\frac{x}{y} - \frac{1}{yy}\mathfrak{B}:\frac{x}{y} - \frac{2x}{y^3}\mathfrak{B}':\frac{x}{y}$$
$$+ \frac{2xly}{y^3}\mathfrak{B}':\frac{x}{y} + \frac{x^2ly}{y^4}\mathfrak{B}'':\frac{x}{y},$$

d'où nous tirons la formule suivante:

$$P = \frac{x}{y}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} + \frac{xly}{y}\mathfrak{B}':\frac{x}{y} + \mathfrak{B}:\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\mathfrak{A}':\frac{x}{y} - \frac{xly}{y}\mathfrak{B}':\frac{x}{y}$$

ou bien: $P = \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$. De la même manière l'on trouvera $Q = -\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$, d'où il s'ensuit ouvertement $P + Q = 0$. Ce développement paroît d'autant plus nécessaire qu'on ne trouve nulle part des regles particulières pour differentier les fonctions à deux variables.

Considérons aprésent aussi le cas où, outre les deux racines égales $\beta = \alpha$, il se trouve encore une troisième γ qui leur est égale. Or pour les deux premières $\beta = \alpha$ nous venons de reduire leur terme correspondent à cette forme: $y^\alpha:\mathfrak{A}\frac{x}{y} + y^\alpha ly\,\mathfrak{B}:\frac{x}{y}$, auquel il faut encore ajouter le troisieme terme $y^\gamma\mathfrak{C}:\frac{x}{y}$, qui se réuniroit avec le premier. Mais posons aprésent $\gamma = \alpha + \omega$, et puisque $y^\omega = 1 + \omega ly + \frac{1}{2}\omega^2(ly^2)$, il faut aller ici jusqu'au troisième terme, puisque le second se réuniroit

roit avec le second des termes précédens. De là il est clair que ces trois termes, en changeant les fonctions arbitraires, se reduiront aux trois termes suivans: $y^\alpha \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y^\alpha\, ly\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y^\alpha\, (ly)^2\, \mathfrak{C} : \frac{x}{y}$.

Pour en donner un exemple considérons le cas où l'équation pour le nombre n obtient cette forme: $1 \quad 3n + 3nn \quad n^3 = o$, dont les trois racines sont toutes égales entr' elles, savoir $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Ce cas appartient donc à l'équation différentielle du troisième degré $Az + BP + CQ + DR = o$, pour laquelle nous avions trouvé:

$$A + nB + n(n-1)C + n(n-1)(n-2)D = o;$$

ce qui étant développé donne:

$$\begin{aligned} A + nB + nn\,C &+ n^3 D = o. \\ - nC &- 3nn\,D \\ &+ 2n\,D \end{aligned}$$

Il faudra donc faire: $A = 1$, $B - C + 2D = -3$, $C - 3D = +3$ et $D = -1$, et partant $C = o$, $B = -1$ et $A = 1$, de sorte que notre équation différentielle sera: $z - P + o.Q - R = o$, dont l'intégrale complette, à cause de $\alpha = 1$, sera:

$$y\, \mathfrak{A} : \frac{x}{y} + y\, ly\, \mathfrak{B} : \frac{x}{y} + y\, (ly)^2\, \mathfrak{C} : \frac{x}{y}.$$

Pour éclaircir ceci par un exemple faisons: $\mathfrak{A} = o$, $\mathfrak{B} = o$ et $\mathfrak{C} : \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$; de sorte qu' une intégrale particulière sera $x\,(ly)^2$, d'où nous tirons les différentielles suivantes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (ly)^2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x\,ly}{y};$$

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} = o;\ \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{2\,ly}{y};\ \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{2x}{yy} - \frac{2x\,ly}{yy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = o;\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = o;\ \frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y^2} = \frac{2}{yy} - \frac{2\,ly}{yy};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial^3 y} = -\frac{4x}{y^3} - \frac{2x}{y^3} + \frac{4x\,ly}{y^3} = -\frac{6x}{y^3} + \frac{4x\,ly}{y^3}.$$

De là nous tirons $z = x\,(ly)^2$; $P = x\,(ly)^2 + 2x\,ly$ et

R =

$R = -2xly$, d'où résulte: $z - P - R = o$; ce qui est parfaitement d'accord.

De là il est déja très évident, que si le nombre n avoit quatre valeurs égales, savoir $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, au lieu des quatre termes qui entrent immédiatement dans l'intégrale, on devra mettre ceux-ci:

$$z = y^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^\alpha ly \mathfrak{B}:\frac{x}{y} + y^\alpha (ly)^2 \mathfrak{C}:\frac{x}{y} + y^\alpha (ly)^3 \mathfrak{D}:\frac{x}{y} + \text{etc.}$$

et partant, quel que puisse être le nombre des racines égales, la reduction de l'intégrale n'aura plus aucune difficulté. Au reste on comprend aisément que dans toutes ces formules les deux lettres x et y pourroient être échangées entr' elles.

Pour prouver cela je ferai voir qu'au lieu des termes: $y^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + y^\alpha (ly) \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$ on pourra écrire: $x^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + x^\alpha (lx) \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$. Pour cet effet j'observe que parceque l'un et l'autre terme renferme une fonction arbitraire de $\frac{x}{y}$, on la pourra multiplier par $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, ce qui donne $x^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + x^\alpha (ly) \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$; ensuite puisque $l\frac{x}{y} = lx - ly$ est aussi fonction de $\frac{x}{y}$, au lieu de $\mathfrak{A}:\frac{x}{y}$ on pourra écrire: $\mathfrak{A}:\frac{x}{y} + l\frac{x}{y}\, \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$, et alors nous aurons $x^\alpha \mathfrak{A}:\frac{x}{y} + x^\alpha (lx) \mathfrak{B}:\frac{x}{y}$; d'où l'on comprend aisément que cette permutation peut toujours avoir lieu.

L'intégration de cette équation différentielle assez générale: $Az + BP + CQ + DR + ES + \text{etc.} = o$, où P, Q, R, S, etc. marquent les formules différentielles rapportées ci-dessus, pourra être regardée comme un excellent morceau de cette Analyse qui traite des fonctions à deux variables, et qu'il faut bien distinguer de l'analyse ordinaire qui ne roule que sur les fonctions à une seule variable. Car il est aprésent bien clair que ces deux espèces d'analyse

 sont

sont très essentiellement différentes entr' elles, non seulement par rapport aux fonctions qui y sont traitées, mais aussi par rapport aux méthodes qu' il y faut employer. C' est pourquoi la dénomination de différences partielles, dont plusieurs Géomètres se servent, pour marquer l' analyse des fonctions à deux variables, ne me paroît pas fort propre pour en exprimer le véritable caractère.

Non obstant cette différence on peut souvent remarquer une belle harmonie entre ces deux espèces d' analyse. Ainsi quand on traite, dans l' analyse ordinaire, cette équation differentielle: $Az + Bx\frac{\partial z}{\partial x} + Cx^2\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + Dx^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \text{etc.} = o$; et qu' on demande quelle fonction de x on doit donner à la quantité z, pour que cette équation soit remplie: la méthode ordinaire d' intégrer conduit à cette équation algébrique: $A + nB + n:(n-1)C + n(n-1)(n-2)D + n(n-1)(n-2)(n-3)E + \text{etc.} = o$; d' où il faut tirer toutes les racines α, β, γ, δ, etc. de n, et l' intégrale complette est exprimée de cette manière: $z = \mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + \mathfrak{C}x^\gamma + \mathfrak{D}x^\delta + \text{etc.}$ où les lettres: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. marquent des constantes arbitraires quelconques. Cette forme a donc un très beau rapport avec la forme de l' intégrale que nous avons trouvée ci-dessus pour la fonction z des deux variables de x et y.

ILLU-