1805

Observatio singularis circa aequationes differentiales lineares

Leonhard Euler

OBSERVATIO SINGULARIS

CIRCA AEQUATIONES DIFFERENTIALES LINEARES

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 19. Mart. 1778.

§. 1.

Hoc nomine hodie designari solent aequationes differentiales hujus formae:

$$pz + q\frac{\partial z}{\partial x} + r\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + s\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + t\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \text{etc.} = 0,$$

ubi variabilis z in singulis terminis unicam tantum tenet dimensionem, litterae vero p, q, r, s, etc. denotant functiones quascunque alterius variabilis x, cujus differentiale constans assumitur, quod, quia in singulis terminis homogeneitatem complere debet, brevitatis gratia ubique omittere licebit, sicque illam aequationem in posterum hac forma repraesentabimus:

$$pz + q\partial z + r\partial\partial z + s\partial^3 z + t\partial^4 z + \text{etc.} = 0.$$

§. 2. Constat autem hujusmodi aequationes duobus casibus in genere resolvi posse, altero quo singulae litterae p, q, r, s, t sunt quantitates constantes, altero vero, quo aequationem homogeneam reddunt; priore ergo casu aequatio hanc habebit formam:

$$\alpha z + \beta dz + \gamma ddz + \delta d^3 z + \varepsilon d^4 z + \text{etc.} = 0,$$

cui semper hujusmodi forma satisfacit $z = e^{\lambda x}$, quippe quo valore

valore substituto, factaque divisione per $e^{\lambda x}$, oritur aequatio mere algebraica, ista scilicet:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \varepsilon\lambda^4 + \zeta\lambda^5 + \text{etc.} = 0,$$

ex qua ergo tot valores pro littera λ erui poterunt, quoti ordinis fuerit aequatio differentialis, qui valores si fuerint a, b, c, d, e etc. hinc adeo integrale completum exhiberi poterit, ita expressum: $z = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + De^{dx} + \text{etc.}$ ubi litterae A, B, C, D etc. sunt constantes arbitrariae per integrationes ingressae.

§. 3. Pro altero casu, quo aequatio evadit homogenea, eam semper ad hanc formam reducere licet:

$$\alpha z + \beta x dz + \gamma xx ddz + \delta x^3 d^3 z + \varepsilon x^4 d^4 z \text{ etc.} = 0,$$

cui semper satisfacit hujusmodi forma $z = x^\lambda$. Hinc iterum oritur aequatio algebraica ista, postquam scilicet per x^λ fuerit divisa:

$$\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda(\lambda-1) + \delta\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \varepsilon\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + \zeta\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) + \text{etc.} = 0,$$

unde iterum tot valores pro λ eruuntur, quoti gradus fuerit aequatio, qui valores si fuerint a, b, c, d, e etc. habebitur integrale completum

$$z = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + Ex^e + \text{etc.}$$

§. 4. Praeter hos duos casus raro tales aequationes occurrere solent, quas quidem resolvere seu integrare liceat, nisi forte data opera a posteriori fabricentur. Interim tamen ab acutissimis Geometris Gallis non ita pridem insignia subsidia circa tales aequationes ingeniosissime sunt excogitata, quae cum perlustrassem, in observationem quandam prorsus singularem incidi, quae mihi quidem in hoc genere maximi momenti videtur, et quam propterea hic in medium proferre constitui.

§. 5.

DE INTEGRATIONIBUS DIFFICILLIMIS

earum integrationem suscipere ausus fuerit, cum tamen, si

§. 5. Propofita autem tali forma generali:

$$pz + qdz + rddz - sd^3z + td^4z + \text{etc.} = 0,$$

quae usque ad quartum gradum assurgat, quandoquidem deinceps calculum ad quosvis alios gradus accommodare facile erit, quaero ejusmodi functionem ipfius x, in quam fi ifta forma ducatur, integrabilis evadat. Sit igitur ifte multiplicator $= m$, ita ut integrabilis esse debeat haec forma:

$$mpz + mqdz + mrddz + msd^3z + mtd^4z = 0,$$

atque duplici modo ad integrale perveniri poteft, prouti vel a primo termino vel ab ultimo integratio inchoetur; ubi quidem sponte intelligitur, insuper per elementum dx multiplicationem esse inftituendam, quod autem brevitatis gratia omittimus.

§. 6. Incipiamus primo a termino ultimo mtd^4z qui pro integrali praebet terminum mtd^3z; hujus ergo differentiale auferatur et remanebit haec forma:

$$mpz + mqdz + mrddz + d^3z\,(ms - d.mt).$$

Jam ex hoc poftremo membro in integrale ingreditur $ddz\,(ms - d.mt)$; hujus jam differentiale iterum auferatur, et remanebit $mpz + mqdz + ddz\,(mr - d.ms + dd.mt)$. Hinc jam novus terminus in integrale ingrediens erit $dz\,(mr - d.ms + dd.mt)$, cuius differentiale ablatum relinquit adhuc $mpz + dz\,(mq - d.mr + dd.ms - d^3.mt)$, unde ultimum integralis membrum erit $z\,(mq - d.mr + dd.ms - d^3mt)$, cuius ergo differentiale fi auferatur, nihil relinqui debebit, unde refultabit ifta aequatio:

$$mp - d.mq + dd.mr - d^3.ms + d^4.mt = 0.$$

§. 7. Hoc igitur modo deducti sumus ad aequationem differentialem pariter quarti ordinis, ex qua valorem multi-

plicatoris quaefiti m inveftigari oportet, quippe quo invento forma integrata erit

$$mtd^3z + ddz\,(ms - d.mt) + dz\,(mr - d.ms + dd.mt) + z\,(mq - d.mr + dd.ms - d^3mt),$$

aequatio autem, unde valorem ipfius m erui convenit, eft uti invenimus, $mp - d.mq + dd.mr - d^3.ms + d^4.mt = 0$.

§. 8. At vero inverfo ordine integrationem a termino primo inchoare licet, fiquidem hinc orietur prima integralis pars $z\int mq$, cuius differentiale fubtractum relinquet $dz\,(mq - \int mp) + mrddz + msd^3z + mtd^4z$. Ex prima parte deducitur fecunda integralis pars $dz\,(\int mq - \iint mp)$. Jam hujus differentiale ablatum relinquet $ddz\,(mr - \int mq + \iint mp) + msd^3z + mtd^4z$. Hinc igitur nafcitur tertia integralis pars $ddz\,(\int mr - \iint mq + \iiint mp)$, hujus porro differentiale ablatum relinquet

$$d^3z\,(ms - \int mr + \iint mq - \int^3 mp) + mtd^4z,$$ unde poftrema integralis pars colligitur:

$$d^3z\,(\int ms - \iint mr + \int^3 mq - \int^4 mp),$$ quocirca fi hujus differentiale auferatur, nihil relinqui debet, ficque pervenietur ad hanc aequationem:

$$mt - \int ms + \iint mr - \int^3 mq + \int^4 mp = 0,$$

unde pariter valorem multiplicatoris quaefiti m inveftigari oportet.

§. 9. Evidens autem eft hanc aequationem pofteriorem egregie cum priore confentire, nam haec aequatio differentiata praebet

$$d.mt - ms + \int mr - \iint mq + \int^3 mp = 0,$$

haec autem porro differentiata praebet

$$dd.mt - d.ms + mr - \int mq + \iint mp = 0,$$

quae rursus differentiata dat

$d^3.mt$

hanc formam: $\frac{\partial z\,(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)}{\sqrt{s}}$. Quare cum fit

§. 7. Simili modo pro parte imaginaria, ob $\sin(\vartheta+\omega) = \sin\vartheta\cos\omega + \cos\vartheta\sin\omega$, ifta pars componetur

$$d^3 . mt - d^2 ms + d . mr + mq - \int mp = 0;$$

cujus denique differentiale producit ipfam aequationem prius inventam:

$$d^3 mt - d^3 ms + dd . mr - d . mq + mp = 0.$$

§. 10. Evolvamus nunc hanc aequationem, **ex** qua multiplicatorem quaesitum m erui oportet, unde nafcetur fequens aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} mp - q\,dm + r\,ddm - s\,d^3 m + t\,d^4 m \\ -mdq + 2\,dr\,dm - 3\,ds\,ddm + 4\,dt\,d^3 m \\ + m\,ddr - 3\,dm\,dds + 6\,ddm\,ddt \\ -md^3 s + 4\,dm\,d^3 t \\ + md^4 t. \end{array}\right\} = 0.$$

§. 11. Quodfi ergo hanc poftremam aequationem refolvere, vel faltem quodpiam integrale particulare eruere licuerit, talis valor ipfius m fi in aequationem primo propofitam multiplicetur, eam integrabilem reddet, ita ut hoc modo per unam integrationem ad gradum inferiorem differentialitatis reducatur. Hanc ob rationem aequationem ultimo inventam vocabimus *aequationem resolventem* formae propofitae

$$pz + q\,dz + r\,ddz + s\,d^3 z + t\,d^4 z = 0,$$

atque hinc patet quomodo pro quavis aequatione differentiali lineari propofita ejus refolventem inveniri oporteat.

§. 12. Quo autem formam aequationis refolventis clarius perfpiciamus, eam hac forma repraefentemus:

$$Pm + Q\,dm + R\,ddm + S\,d^3 m + T\,d^4 m = 0,$$

ut ad fimilitudinem aequationis propofitae revocetur; atque comparatione inftituta quantitates P, Q, R, S et T per cognitas, quae funt p, q, r, s, etc. fequenti modo determinabuntur:

$$P = p - dq + ddr - d^3 s + d^4 t$$
$$Q = -q - 2\,dr - 3\,dds + 4\,d^3 t$$

R =

$$R = r - 3\,ds + 6\,ddt$$
$$S = -s + 4\,dt$$
$$T = t.$$

Cujus relationis ope pro quovis cafu aequatio refolvens nullo labore exhiberi poterit.

§. 13. Quodfi aequationem refolventem tanquam datam fpectare velimus, ex ea vicissim ipfa aequatio prior, cujus eft refolvens, exhiberi poterit per fequentes relationes, quibus litterae minusculae p, q, r etc per maiufculas P, Q, R etc. determinantur:

$$t = T$$
$$s = -S + 4\,dT$$
$$r = R - 3\,dS + 6\,ddT$$
$$q = -Q + 2\,dR - 3\,ddS + 4\,d^3 T$$
$$p = P - dQ + ddR - d^3 S + d^4 T.$$

Unde patet litteras minufculas eadem prorfus lege a majusculis pendere, qua hae ab illis pendere funt inventae.

§. 14. Quaelibet igitur hujusmodi aequatio differentialis cum fua refolvente tali reciproco nexu conjugatur, ut fi una fuerit refolvens alterius, vicissim quoque haec refolvens fit illius. Cum igitur hujusmodi binae aequationes tam infigni vinculo fint inter fe connexae, eas inter fe *conjugatas* appellemus, ita ut quaelibet aequatio hujus indolis fuam habeat conjugatam, atque utraque ope alterius refolvi pofsit. Quodfi enim alterutra refolutionem admittat, fimul quoque alterius refolutio femper eft in poteftate, atque in hoc confiftit obfervatio illa fingularis, quae mihi quidem maxime notatu digna videtur; neque enim memini eam a quoquam alio factam vidisse.

quo concluditur, etiam intra intervallum $4N$ et $16N$ nullos nume-

 quo-

§. 15. Scribamus nunc uniformitatis gratia litteram Z loco m, atque binae hujusmodi aequationes conjugatae, cujuscunque fuerint ordinis, sequenti modo repraesententur:

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + td^4z + vd^5z + \text{etc.} = 0$$
$$PZ + QdZ + RddZ + Sd^3Z + Td^4Z + Vd^5Z + \text{etc.} = 0$$

ac primo quidem litterae majusculae sequenti lege per minusculas determinabuntur:

$$P = p - dq + ddr - d^3s + d^4t - d^5v + d^6w \text{ etc.}$$
$$Q = -q + 2dr - 3dds + 4d^3t - 5d^4v + 6d^5w \text{ etc.}$$
$$R = r - 3ds + 6ddt - 10d^3v + 15d^4w \text{ etc.}$$
$$S = -s + 4dt - 10ddv + 20d^3w \text{ etc.}$$
$$T = t - 5dv + 15ddw \text{ etc.}$$
$$V = -v + 6dw \text{ etc.}$$
$$W = w \text{ etc.}$$

Prorsus autem secundum eandem legem litterae minusculae per majusculas determinabuntur; erit enim:

$$p = P - dQ + ddR - d^3S + d^4T - d^5V + d^6W \text{ etc.}$$
$$q = -Q + 2dR - 3ddS + 4d^3T - 5d^4V + 6d^5W \text{ etc.}$$
$$r = R - 3dS + 6ddT - 10d^3V + 15d^4W \text{ etc.}$$
$$s = -S + 4dT - 10ddV + 20d^3W \text{ etc.}$$
$$t = T - 5dV + 15ddW \text{ etc.}$$
$$v = -V + 6dW \text{ etc.}$$
$$w = W \text{ etc.}$$

§. 16. Applicemus hoc ad binos casus initio memoratos, quorum resolutio nulla laborat difficultate, atque prioris aequationis

$$\alpha z + \beta dz + \gamma ddz + \delta d^3z + \varepsilon d^4z + \text{etc.} = 0,$$

conjugata erit

$$\alpha Z - \beta dZ + \gamma ddZ - \delta d^3Z + \varepsilon d^4Z \text{ etc.} = 0,$$

quae ab illa non discrepat nisi alternatione signorum; pro alterius vero

$$\alpha z + \beta x dz + \gamma xx ddz + \delta x^3 d^3z + \varepsilon x^4 d^4z \text{ etc.} = 0$$

con-

conjugata habebimus

$$P = \alpha - \beta + 2\gamma - 6\delta + 24\varepsilon \text{ etc.}$$
$$Q = -x(\beta - 2 \cdot 2\gamma + 3 \cdot 6\delta - 4 \cdot 24\varepsilon \text{ etc.})$$
$$R = xx(\gamma - 3 \cdot 3\delta + 6 \cdot 12\varepsilon \text{ etc.})$$
$$S = -x^3(\delta - 4 \cdot 4\varepsilon \text{ etc.})$$
$$T = \varepsilon x^4.$$

Unde patet aequationem conjugatam etiam esse homogeneam.

§. 17. Quodsi ergo binarum talium aequationum conjugatarum alterutra resolutionem admittat, tum altera quoque, saltem semel, integrari poterit; quo facto, si insuper hujus aequationis integratae conjugata resolutionem admittat, denuo integratio succedet, atque ita porro, quae methodus utique foret non parum operosa. Verum hic imprimis observandum occurrit, quotiescunque integrale completum aequationis resolventis innotuerit, tum ope facilis operationis non solum ipsius aequationis propositae

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + \text{etc.} = 0,$$

integrale completum, sed etiam integrale hujus aequationis multo generalioris:

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + \text{etc.} = X,$$

exhiberi posse, denotante X functionem quamcunque ipsius x, id scilicet integrale, quod absolutis tot integrationibus, quoti gradus fuerit differentialitas, tandem reperiretur, idque adeo ope unicae tantum integrationis, quod, cum plurimum in recessu habere possit, hic data opera explicabo.

§. 18. Sufficiet autem aequationem differentialem tertii tantum gradus sumsisse, ita ut resolvenda proponatur haec aequatio:

$$pz + qdz + rddz + sd^3z = X,$$

H 2 cui

cui refpondeat ifta conjugata:

$$PZ + Q\,dZ + R\,ddZ + S\,d^3Z = 0,$$

cujus integrale completum, quoniam tres conftantes arbitrarias involvere debet, ita repraefentari poterit: $Z = A\Phi + B\Phi' + C\Phi''$, ubi ergo litterae Φ, Φ', Φ'', certae erunt functiones ipfius x, quae fingulae idoneos multiplicatores pro aequatione propofita praebebunt: multiplicatione autem per Φ facta et integratione inftituta ponamus refultare hanc aequationem:

$$\text{♄}\,z + \text{♃}\,dz + \text{♂}\,ddz = \int X\Phi\,dx.$$

Simili vero modo fumto Φ' pro multiplicatore prodeat haec aequatio:

$$\text{♄}'z + \text{♃}'dz + \text{♂}'ddz = \int X\Phi'dx.$$

Eodemque modo ex multiplicatore Φ'' prodeat

$$\text{♄}''z + \text{♃}''dz + \text{♂}''ddz = \int X\Phi''dx.$$

Ubi hae tres integrationes inftar unicae fpectari possunt.

§. 19. Totum negotium ergo perduximus ad has tres aequationes:

I. $\text{♄}\,z + \text{♃}\,dz + \text{♂}\,ddz = \int X\Phi\,dx.$
II. $\text{♄}'z + \text{♃}'dz + \text{♂}'ddz = \int X\Phi'dx.$
III. $\text{♄}''z + \text{♃}'dz + \text{♂}''ddz = \int X\Phi''dx.$

Ex his tribus aequationibus jam facile eft binas formulas dz et ddz eliminare. Multiplicetur fcilicet prima per $\odot$, fecunda per $\odot'$, tertia per $\odot''$, quae quantitates ita capiantur, ut fiat

$$\odot\text{♃} + \odot'\text{♃}' + \odot''\text{♃}'' = 0, \text{ et}$$
$$\odot\text{♂} + \odot'\text{♂}' + \odot''\text{♂}'' = 0,$$

et hae aequationes in unam fummam collectae dabunt

$$z(\odot\text{♄} + \odot'\text{♄}' + \odot''\text{♄}'') = \odot\int X\Phi\,dx + \odot'\int X\Phi'dx + \odot''\int X\Phi''dx.$$

Sic-

OB-

Sicque valor quaefitus quantitatis z erit

$$z = \frac{\odot\int X\Phi\,dx + \odot'\int X\Phi'dx + \odot''\int X\Phi''dx}{\odot\text{♄} + \odot'\text{♄}' + \odot''\text{♄}''}$$

haecque expressio adeo eft integrale completum aequationis differentialis propofitae tertii ordinis, fiquidem hic tria occurrunt figna fummatoria, quorum quodvis involvit conftantem arbitrariam.

DE