



1802

Resolutio formulae diophanteae  
 $ab(maa+nbb)=cd(mcc+ndd)$  per numeros  
rationales

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Resolutio formulae diophanteae  $ab(maa+nbb)=cd(mcc+ndd)$  per numeros rationales" (1802). *Euler Archive - All Works*. 716.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/716>

RESOLUTIO  
FORMULAE DIOPHANTEAE

$$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ncd)$$

PER NUMEROS RATIONALES.

Auctore L. EULERO.

---

Conventui exhibuit die 1. Decembr. 1778.

---

§. I.

Inter theoremata olim a Fermatio demonstrata, et post ejus obitum deperdita, imprimis maximam attentionem meretur hoc theorema: quod non dentur duae potestates cujusque ordinis, quarum summa vel differentia sit potestas ejusdem ordinis, siquidem ordo primus et secundus excipiatur. Ita negavit Fermatius exhiberi posse binos numeros  $a$  et  $b$ , ut haec formula  $a^n \pm b^n$  aequetur simili potestati  $c^n$ , simul atque exponens  $n$  binarium superaverit. Hoc ergo modo omnes istae positiones erunt impossibiles: I.  $a^3 \pm b^3 = c^3$ ; II.  $a^4 \pm b^4 = c^4$ ; III.  $a^5 \pm b^5 = c^5$ ; IV.  $a^6 \pm b^6 = c^6$ ; V.  $a^7 \pm b^7 = c^7$ ; VI.  $a^8 \pm b^8 = c^8$  etc.

§. 2. De prima harum formularum  $a^3 \pm b^3 = c^3$ , veritas jam satis feliciter est ostensa, unde simul quoque veritas sequitur pro omnibus formulis, pro quibus exponens  $n$ , est multipulum ternarii. Tum vero multo clarius adhuc demonstrata est formula secunda  $a^4 \pm b^4 = c^4$ , cum evidentissime comprobatum sit, neque summam neque differentiam duorum biquadratorum posse esse quadratum, multo minus  
ergo

ergo biquadratum, hincque etiam evicti sunt omnes casus, quibus exponens  $n$  est multipulum quaternarii. Interim tamen ejusmodi demonstratio, quae se pariter ad omnes exponentes  $n$  extendat, maxime adhuc desideratur, neque cuiquam Geometrarum in hoc numerorum mysterium penetrare contigit.

§. 3. Pluribus autem insignibus Geometris visum est haec theoremata latius extendi posse. Quemadmodum enim duo cubi exhiberi nequeunt, quorum summa vel differentia sit cubus, ita etiam certum est, nequidem exhiberi posse tria biquadrata, quorum summa sit pariter biquadratum, sed ad minimum quatuor biquadrata requiri, ut eorum summa prodire queat biquadratum, quamquam nemo adhuc talia quatuor biquadrata assignare potuerit. Eodem modo etiam affirmari posse videtur, non exhiberi posse quatuor potestates quintas, quarum summa etiam esset potestas quinta; similique modo res se habebit in altioribus potestatibus; unde sequentes quoque positiones omnes pro impossibilibus erunt habendae:

$$\text{I. } a^3 + b^3 = c^3,$$

$$\text{II. } a^4 + b^4 + c^4 = d^4,$$

$$\text{III. } a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5,$$

$$\text{IV. } a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 = f^6$$

etc.

etc.

Plurimum igitur scientia numerorum promoveri esset censenda, si demonstrationem desideratam etiam ad has formulas extendere liceret.

§. 4. Primo quidem intuitu videri posset has postremas formulas non solum ad summas, sed etiam ad differentias, prouti in prima usu venit, extendi posse, ita ut etiam haec aequa-

æqualitas  $a^4 \pm b^4 \pm c^4 = d^4$  pro impossibili effet habenda; verum hoc longe secus se habere ante aliquot annos observavi, in tomo commentariorum XVII. pag. 64. vbi bina biquadrata assignavi, quorum summa in alia duo biquadrata resolvi queat, ita vt sit  $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ , unde ergo haec æqualitas  $a^4 + b^4 - c^4 = d^4$  veritati neutiquam adversatur; verum numeri, quos pro his litteris  $a, b, c, d$ , per calculum valde taediosum erui, valde immanes prodierunt.

§. 5. Cum autem nuper idem argumentum tractandum suscepissem; praeter omnem expectationem incidi in numeros multo minores hac indole praeditos, atque adeo minimi numeri hoc praestantes statui possunt isti:  $a = 134$ ;  $b = 133$ ;  $c = 158$ ; et  $d = 59$ , quandoquidem revera deprehendetur esse  $134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$ , quem calculum exsequi haud adeo molestum est, dum contra eomprobationem illorum immanis numerorum vix quisquam tentare audebit.

§. 6. Methodus autem, qua tum temporis sum usus, vt resolverem hanc æqualitatem:  $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ , ita procedebat: consideravi scilicet hanc aequationem  $A^4 - C^4 = D^4 - B^4$ , ac posito  $A = a + b$ ;  $C = a - b$ ;  $D = c + d$  et  $B = c - d$ , prodiit ista aequatio satis simplex:  $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$ ; sicque totum negotium ad resolutionem hujus formulae reducitur. Hic autem non solum methodum ante usitatam, multo tractabiliorem sum redditurus, sed etiam ad resolutionem formulae multo generalioris in titulo exhibitae  $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$  sum accommodaturus, ita vt, quicumque numeri pro  $m$  et  $n$  accipiantur, semper infinitis modis numeri satisfaciens pro  $a, b, c, d$  inveniri queant.

§. 7. Ad aequalitatem autem hanc resolvendam vtor ante omnia hac transformatione:  $b = cp$  et  $d = aq$ , hocque modo aequatio resolvenda hanc induet formam:  $p(maa + nccpp) = q(mcc + naaqq)$ , unde elicitur  $\frac{aa}{cc} = \frac{np^3 - m q}{nq^3 - m p}$ , ficque totum negotium huc redit, vt ista formula  $\frac{np^3 - m q}{nq^3 - m p}$  ad quadratum reducatur, quod quidem sponte evenire casu  $q = p$  mox in oculos incurrit, cum evadat  $\frac{aa}{cc} = 1$ , ideoque  $c = a$ ; tum quoque fiet  $b = d$ , qui autem casus maxime obuius pro solutione neutiquam haberi potest, quandoquidem ambo membra aequationis prodeunt identica. Interim tamen hic ipse casus ad alias solutiones manuducere poterit.

§. 8. Cum igitur nostra formula reuera quadratum evadat posito  $p = q$ , statuamus  $p = q(1 + z)$ , ita ut sumpto  $z = 0$  ipse casus obuius prodeat; nunc autem nostra formula in sequentem transmutabitur:  $\frac{aa}{cc} = \frac{nq^3(1+z)^3 - m}{nqq - m(1+z)}$ , five

$$\frac{aa}{cc} = \frac{nqq - m + 3nqqz + 3nqqz^2 + nqqz^3}{nqq - m - mz}$$

in qua fractione quantitas incognita  $z$  in numeratore ad tertiam potestatem, in denominatore autem non ultra primam affurgit, cuiusmodi formulas per methodos cognitae tractari posse iam satis liquet.

§. 9. Quo hanc fractionem tractabiliorem reddamus, tam numeratorem quam denominatorem dividamus per  $nqq - m$ , statuamusque brevitatis gratia  $\frac{nqq}{nqq - m} = \alpha$  et  $\frac{m}{nqq - m} = \beta$ , ita vt sit  $\alpha - \beta = 1$ , ideoque  $\alpha = 1 + \beta$ , quo facto formula sequens prodibit  $\frac{aa}{cc} = \frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha z^2 + \alpha z^3}{1 - \beta z}$ . Jam per secundam methodum, qua olim sum usus, denominator reddatur quadratum, multiplicando supra et infra per  $1 - \beta z$ , unde prodit  $\frac{aa}{cc} = \frac{(1 - \beta z)(1 + 3\alpha z + 3\alpha z^2 + \alpha z^3)}{(1 - \beta z)^2}$ . Sicque tantum opus est vt

vt numerator, qui evolutus fit

$1 + (3\alpha - \beta)z + 3\alpha(1 - \beta)zz + \alpha(1 - 3\beta)z^3 - \alpha\beta z^4$   
ad quadratum reducatur, quod praestabitur ejus radicem  
ponendo  $1 + fz + gzz$ , cujus quadratum est

$$1 + 2fz + (ff + 2fg)zz + 2fgz^3 + ggz^4.$$

Nunc quia primi termini se mutuo sponte destruunt, binae  
litterae  $f$  et  $g$  ita definiantur, vt etiam secundi ac tertii  
termini tollantur; prius fiet sumendo  $f = \frac{3\alpha - \beta}{2}$ , posterius vero  
statuendo  $ff + 2g = 3\alpha(1 - \beta)$ , unde fit  $g = \frac{3\alpha(1 - \beta)}{2} - \frac{1}{2}ff$ .

Quoniam igitur utrinque tantum bini termini postremi re-  
manent, qui per  $z^3$  divisi praebent hanc aequationem:  
 $\alpha(1 - 3\beta) - \alpha\beta z = 2fg + ggz$ , inde elicitur  $z = \frac{\alpha(1 - 3\beta) - 2fg}{\alpha\beta + gg}$ .

§. 10. Haec est ea ipsa solutio, qua jam dudum loco  
citato sum vsus, cujus opé pro quovis valore ipsius  $q$  ad ar-  
bitrium assumpto, simul innotescunt litterae  $a$  et  $\beta$ , unde valor  
idoneus pro  $z$  obtinetur, quo invento primo erit  $p = q(1 + z)$ ,  
ac denique erit  $\frac{aa}{cc} = \frac{(1 + fz + gzz)^2}{(1 - \beta z)^2}$  ideoque  $\frac{a}{c} = \frac{1 + fz + gzz}{1 - \beta z}$ ,  
unde ergo sumi poterit  $a = 1 + fz + gzz$  et  $c = 1 - \beta z$ ;  
tandem vero habebitur  $b = cp$  et  $d = aq$ , sicque quaestio-  
ni propositae erit satisfactum.

§. 11. Hoc autem modo pro casu quem olim tractavi,  
 $m = n = 1$  pro  $q$  unitas accipi nequit, quia litterae  $\alpha$  et  $\beta$   
evaderent infinitae; iidem vero enormes numeri, quo tum  
exhibui, reperiuntur, dum pro  $q$  vel 2 vel 3 assumitur.  
Quodsi autem non fuerit  $m = n$ , nihil obstat, quo minus  
statuatur  $q = 1$ , hincque solutiones satis commodae obtineri  
poterunt; semper autem tum erit  $d = a$ , quod fortasse displi-  
cere potest.

§. 12. Hac igitur methodo repudiata aliam viam sum ingreſſurus, quae ad ſolutiones multo ſimpliciores perducet, quaeque ita eſt comparata, vt non perveniatur ad quartam poteſtatem ipſius  $z$ . Hunc in finem ſtatim pono  $\frac{a}{c} = 1 + sz$ , ita vt habeamus:  $\frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha z^2 + \alpha z^3}{1 - \beta z} = (1 + sz)^2$ , qua aequatione evoluta et omnibus terminis ad eandem partem translatis pervenietur ad hanc aequationem:

$$\left. \begin{aligned} &+ 1 + 3\alpha z + 3\alpha z^2 + \alpha z^3 \\ &- 1 - 2sz - sszz + \beta ssz^3 \\ &+ \beta z + 2\beta szz \end{aligned} \right\} = 0$$

quae redigitur ad hanc formam:

$$3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z + (z + \beta ss)zz = 0.$$

§. 13. Ut nunc ex hac aequatione incognita  $z$  commode deduci queat, hoc imprimis duobus modis fieri poterit, quorum primus adhiberi poterit, ſi ſtatueri licebit  $\alpha + \beta ss = 0$ , ſive  $ss = -\frac{\alpha}{\beta}$ , id quod locum habere nequit, niſi  $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{nqq}{m}$  fuerit quadratum, quamobrem iſte caſus tum tantum adhiberi poterit, quando numerorum  $m$  et  $n$  alter fuerit negativus, inſuperque eorum productum quadratum. Pro hoc igitur caſu ponamus  $m = \mu\mu$  et  $n = -vv$ , vt aequalitas reſolvenda ſit  $ab(\mu\mu\alpha\alpha - vv\beta\beta) = cd(\mu\mu cc - vv dd)$ ; tum igitur erit  $\alpha = \frac{+vvqq}{\mu\mu + vvqq}$  et  $\beta = \frac{-\mu\mu}{\mu\mu + vvqq}$  ſtatuique poterit  $ss = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{vvqq}{\mu\mu}$ , ideoque  $s = \frac{vq}{\mu}$ . Hoc modo aequatio poſtrema erit  $3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z = 0$ , unde colligitur  $z = \frac{2s - 3\alpha - \beta}{3\alpha + 2\beta s - ss}$ , factisque ſubſtitutionibus erit

$$z = \frac{\mu\mu(\mu\mu - 3vvqq) + 2\mu vq(\mu\mu + vvqq)}{\mu\mu(3vvqq - 2\mu vq) - vvqq(\mu\mu + vvqq)}$$

§. 14. Hic autem praeter omnem necessitatem introduximus binas novas litteras  $\mu$  et  $\nu$ ; nihil enim impedit, quo minus loco  $\mu a$ ,  $\nu b$ ,  $\mu c$ ,  $\nu d$ , simpliciter scribantur litterae  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ita ut formula resolvenda evadat  $ab(aa - bb) = cd(cc - dd)$ , perinde ac si sumpsissemus  $\mu = 1$  et  $\nu = 1$ , unde solutio multo brevior obtinebitur.

### Resolutio formulae particularis

$$ab(aa - bb) = cd(cc - dd).$$

Hic igitur sumpto pro  $q$  numero quocumque erit  $a = \frac{qq}{1+qq}$  et  $\beta = \frac{1}{1+qq}$ ; tum vero sumi oportet  $s = q$ , unde postrema aequatio erit

$3qq - 1 - 2q - 2q^3 + z(2qq - 2q - q^4) = 0$ , ideoque  $z = \frac{1+2q-3q^2+2q^3}{q(1-2-2q-q^3)}$ . Hoc valore invento erit  $p = q(1+z)$  et  $\frac{a}{c} = 1+qz$ , unde porro reliquae litterae  $b$  et  $d$  facile assignabuntur.

§. 15. Statuamus nunc primo  $q = 1$ , eritque  $z = -2$  deinde  $\frac{a}{c} = -1$ , ideoque  $c = -a$ ; porro ob  $p = -1$  erit  $b = a$  et  $d = a$ . Hoc ergo casu omnes quatuor litterae essent aequales, et ambo formulae membra  $= c$ . Idem prodiret, si poneremus  $q = -1$ : perpetuo enim observasse juvabit, perinde esse sive ipsi  $q$  tribuatur valor positivus, sive negativus. Sumamus igitur, ut idoneum exemplum proferamus,  $q = 2$ , eritque  $z = -\frac{3}{4}$ , ideoque  $p = \frac{1}{2}$  et  $\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$ , ergo  $c = -2a$ , porro  $b = -a$  et  $d = 2a$ . Hoc autem modo in praecedens incommodum incidimus. Sit ergo  $q = 3$ , eritque  $z = -\frac{34}{69}$ , hinc  $p = \frac{35}{23}$  et  $\frac{a}{c} = -\frac{11}{23}$ , ita sumi poterit

G 2

$a =$



$a = 11$  et  $c = -23$ , eritque  $b = -35$  et  $d = 3a = 33$ .  
 Hoc modo pervenimus ad hanc aequalitatem:  $11 \cdot 35 (35^2 - 11^2)$   
 $= 23 \cdot 33 (33^2 - 23^2)$ , cujus ratio est manifesta, cum vtrum-  
 que membrum in factores evolutum praebet  $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$ .  
 Hinc duo triangula rectangula exhiberi possunt, quorum  
 areae inter se sunt aequales; prioris enim catheti erunt  
 $2 \cdot 11 \cdot 35$  et  $24 \cdot 56$ , alterius vero trianguli  $2 \cdot 23 \cdot 33$  et  $10 \cdot 56$ .

### Reversio ad formulam generalem

$$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$$

§. 16. Quando autem in aequatione quadrata §. 13, ultimum terminum  $zz$  ad nihilum redigere non licet, semper hoc fieri potest in primo termino absoluto, unde fit  $3a - 2s + \beta = 0$ , ex qua aequatione elicitur  $2s = 3a + \beta$  five  $s = \frac{4a - 1}{2}$ . Hoc igitur primo termino sublato duo reliqui per  $z$  divisi dant hanc aequationem:  $3a + 2\beta s - ss + (\alpha + \beta ss)z = 0$ , quae aequatio abit in hanc:  $\frac{3}{4} + (\alpha + \beta ss)z = 0$ , unde fit  $z = \frac{-3}{4\alpha + 4\beta ss}$ . Cum igitur fit  $2s = 4a - 1$ , erit  $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4a - 1)^2}$  unde deducitur sequens solutio nostri problematis, quo requiritur ut fiat  $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ .

§. 17. Primo posito  $b = cp$  et  $d = aq$  fecimus  $p = q(1 + z)$ ; tum vero, sumpta littera  $q$  pro lūbitu, posuimus brevitatis gratia  $\alpha = \frac{nqq}{nqq - m}$  et  $\beta = \frac{m}{nqq - m}$ , ita ut fit  $\alpha - \beta = 1$ . Quo facto invenimus  $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4a - 1)^2}$ , unde definitur  $p = q(1 + z)$ . Deinde posito  $s = \frac{4a - 1}{2} = \frac{3a + \beta}{2}$  invenimus esse  $\frac{a}{c} = 1 + sz$ , unde cum  $1 + sz$  fit plerumque fractio, hinc ambae litterae  $a$  et  $c$  facile per numeros integros assignantur; quibus inven-

inventis erit  $b = cp$  et  $d = aq$ , quam solutionem aliquot exemplis illustremus.

### Exemplum I.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa + 2bb) = cd(cc + 2dd).$$

§. 18. Hic igitur est  $m = 1$  et  $n = 2$ , unde sumpto numero  $q = 1$  erit  $a = 2$  et  $\beta = 1$ , hincque  $s = \frac{7}{2}$  et  $z = -\frac{1}{19}$ , ideoque  $p = \frac{18}{19}$ ; tam vero  $\frac{a}{c} = \frac{31}{38}$ , quocirca sumamus  $a = 31$  et  $c = 38$ , unde denique fit  $b = 36$  et  $d = 31$ , ita vt solutio futura sit  $31 \cdot 36 (31^2 + 2 \cdot 36^2) = 38 \cdot 31 (38^2 + 2 \cdot 31^2)$ , id quod calculum instituenti mox patebit. Est enim  $31^2 + 2 \cdot 36^2 = 3553 = 11 \cdot 17 \cdot 19$  et  $38^2 + 2 \cdot 31^2 = 3366 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$ , quibus factoribus substitutis vtrinque prodit idem productum  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$ .

### Alia solutio ejusdem exempli.

§. 19. Sumatur hic  $q = \frac{1}{2}$ , eritque  $a = -1$  et  $\beta = -2$ . Deinde vero erit  $s = -\frac{5}{2}$  et  $z = \frac{1}{18}$ , hinc ergo colligimus  $p = \frac{19}{36}$  et  $\frac{a}{c} = \frac{31}{36}$ . Capiatur ergo  $a = 31$  et  $c = 36$ , ex quibus denique fit  $b = 19$  et  $d = \frac{31}{2}$ ; unde, hos numeros duplicando, habebimus  $a = 62$ ;  $b = 38$ ;  $c = 72$  et  $d = 31$ , ita vt fit  $62 \cdot 38 (62^2 + 2 \cdot 38^2) = 72 \cdot 31 (72^2 + 2 \cdot 31^2)$ , vbi per factores est  $62^2 + 2 \cdot 38^2 = 6732 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$  et  $72^2 + 2 \cdot 31^2 = 7106 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$ . Sicque vtrinque prodit idem productum  $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$ .

### Exemplum II.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa + 3bb) = cd(cc + 3dd).$$

§. 20. Hic ergo est  $m = 1$  et  $n = 3$  hincque  $\alpha = \frac{399}{399-1}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  
et  $\beta = \frac{1}{399-1}$ . Sumamus nunc primo  $q = 1$ , vt fit  $\alpha = \frac{3}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  
hinc

hinc autem fiet  $s = \frac{5}{2}$  et  $z = -\frac{6}{37}$ , quamobrem erit  $n = \frac{31}{37}$  et  $\frac{a}{c} = \frac{2}{37}$ . Capiatur ergo  $a = 22$  et  $c = 37$ , fietque  $b = 31$  et  $d = 22$ , consequenter habebimus

$22 \cdot 31 (22^2 + 3 \cdot 31^2) = 37 \cdot 22 (37^2 + 3 \cdot 22^2)$ . Hic scilicet erit  $22^2 + 3 \cdot 31^2 = 3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$  et  $37^2 + 3 \cdot 22^2 = 2321 = 7 \cdot 13 \cdot 31$ ; ficque vtrinque idem oritur productum, scilicet  $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 37$ .

### Alia solutio ejusdem exempli.

§. 21. Sumatur  $q = \frac{1}{2}$ , eritque  $\alpha = -3$  et  $\beta = -4$ , hincque porro  $s = -\frac{13}{2}$  et  $z = \frac{3}{683}$ , quocirca habebimus  $p = \frac{691}{1376}$  et  $\frac{a}{c} = \frac{1337}{1376}$ . Capiatur ergo  $a = 1337$  et  $c = 1376$ , unde fit  $b = 691$  et  $d = \frac{1337}{2}$ . Duplicatis ergo valoribus habebimus  $a = 2674$ ;  $b = 1382$ ;  $c = 2752$  et  $d = 1337$ .

### Adhuc alia solutio ejusdem exempli.

§. 22. Sumamus hic  $q = 2$ , eritque  $\alpha = \frac{10}{11}$  et  $\beta = \frac{1}{11}$ , unde fit  $s = \frac{37}{22}$  et  $z = -\frac{3923}{6977}$ ; ex quo fit  $p = \frac{5268}{6977}$ , porro vero  $s z = -\frac{13431}{13954}$ , ideoque  $\frac{a}{c} = \frac{521}{13954}$ . Sicque sumi poterit  $a = 523$  et  $c = 13954$ , unde tandem fit  $b = 11936$  et  $d = 1046$ .

§. 23. Casum principalem, quo  $m = 1$  et  $n = 1$ , quandoquidem hinc inventio binorum biquadratorum pendet, quorum summam in alia duo biquadrata resolvere liceat, peculiari tractationi reservamus, quae ergo continebit evolutionem hujus formulae  $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$ .

§. 24. Cum igitur hic fit  $m = 1$  et  $n = 1$ , pro quo libet numero ad libitum assumpto  $q$  capiatur  $\alpha = \frac{qq}{qq-1}$  et  $\beta = \frac{1}{qq-1}$ , unde porro accipiatur  $s = \frac{3\alpha + \beta}{2}$  atque  $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(3\alpha + \beta)^2}$ , quibus

bus valoribus inventis erit  $p = q(1+z)$  et  $\frac{a}{c} = 1 + sz$ .  
Denique vero erit  $b = cp$  et  $d = a = aq$ , quibus praemissis  
ad exempla descendamus.

Exemplum I: quo  $q = 3$ .

§. 24. Evidens scilicet est hoc casu sumi non posse  
 $q = 1$ , quia litterae  $a$  et  $\beta$  fierent infinitae; deinde vero  
facile est praevidere, positionem  $q = 3$  simpliciore solutionem  
suppeditare quam  $q = 2$ . Sumpto igitur  $q = 3$  erit  $a = \frac{9}{8}$   
et  $\beta = \frac{1}{8}$ , unde fit  $s = \frac{7}{4}$  atque  $z = -\frac{96}{193}$ . Hinc ergo col-  
ligitur  $p = \frac{21}{193}$ , tum vero  $sz = -\frac{168}{193}$ , ideoque  $\frac{a}{c} = 1 + sz = \frac{25}{193}$ ,  
quocirca capiatur  $a = 25$  et  $c = 193$ , eritque  $b = 291$  et  
 $d = 75$ . Sicque pertingimus ad hanc solutionem

$$25 : 291 \quad (25^2 + 291^2) = 193 \cdot 75 \quad (193^2 + 75^2)$$

ubi notetur esse

$$25^2 + 291^2 = 85306 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 193 \quad \text{et}$$

$$193^2 + 75^2 = 42879 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97.$$

Nunc autem facile perspicitur idem productum utrinque per  
factores eosdem prodire  $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97 \cdot 193$ .

§. 25. Transferamus nunc hanc solutionem ad biqua-  
drata, atque in genere si fuerit  $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$ ,  
statuatur  $a = p+q$  et  $b = p-q$ , similique modo  $c = r+s$   
et  $d = r-s$ , prodibitque ista aequatio:  $2(p^4 - q^4) = 2(r^4 - s^4)$ .  
Hoc ergo modo erit  $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$ , vbi notetur esse  
 $p = \frac{a+b}{2}$ ;  $q = \frac{a-b}{2}$ ;  $r = \frac{c+d}{2}$  et  $s = \frac{c-d}{2}$ ; sive duplicando,  
sumere licebit  $p = a+b$ ;  $q = a-b$ ;  $r = c+d$  et  $s = c-d$ .  
Ex casu igitur modo invento colligimus  $p = 158$ ,  $q = 133$ ;  
 $r = 134$ ; et  $s = 59$ .

§. 26. Hi numeri profus conveniunt cum iis, quos  
initio commemoravimus, atque adeo sine dubio simplicissi-  
mam

nam solutionem illius problematis, quod olim tractaveram, suppeditant, cum fit  $158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4$ . Hic autem praeter expectationem se offert alia solutio nostrae formulae  $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$ , hinc enim sequitur fore  $158^4 - 134^4 = 133^4 - 59^4$ , unde in factores resolvendo fit  $24 \cdot 292 (158^2 + 134^2) = 74 \cdot 192 (133^2 + 59^2)$ ; vbi notetur ob  $pp + qq = \frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p-q)^2$ , fore  $158^2 + 134^2 = \frac{1}{2}(292)^2 + \frac{1}{2}(24)^2$ , similique modi  $133^2 + 59^2 = \frac{1}{2}(192)^2 + \frac{1}{2}(74)^2$ , quibus substitutis pròdit forma nostrae similis.

$$24 \cdot 292 (292^2 + 24^2) = 74 \cdot 192 (74^2 + 192^2)$$

singulisque factoribus per 2 divisis erit

$$12 \cdot 146 (146^2 + 12^2) = 37 \cdot 96 (37^2 + 96^2).$$

§. 27. Ecce ergo deducti sumus ad solutionem adhuc simpliciore[m] nostrae formulae  $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$ , quia est  $a = 12$ ;  $b = 146$ ;  $c = 37$  et  $d = 96$ . Siquidem hi numeri notabiliter sunt minores, quam supra inventi; unde sequitur methodus generalis ex qualibet solutione nostrae formulae aliam solutionem derivandi. Cum enim posito  $a + b = p$ ;  $a - b = q$ ;  $c + d = r$  et  $c - d = s$ , prodeat haec aequalitas:  $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$ , inde vicissim erit  $p^4 - r^4 = q^4 - s^4$ , unde sumptis factoribus erit

$$(p+r)(p-r)(pp+rr) = (q+s)(q-s)(qq+ss), \text{ five}$$

$$(p+r)(p-r)[(p+r)^2 + (p-r)^2] = (q+s)(q-s)[(q+s)^2 + (q-s)^2].$$

Quamobrem si statuamus  $p+r = a'$ ;  $p-r = b'$ ;  $q+s = c'$  et  $q-s = d'$ , habebimus  $a'b'(a'a' + b'b') = c'd'(c'c' + d'd')$ , quae ergo aequalitas locum habebit, si fumatur  $a' = (a-b) + (c+d)$ ;  $b' = (a+b) - (c+d)$ ;  $c' = (a-b) + (c-d)$  et  $d' = (a-b) - (c-d)$ .

§. 28. Cum igitur invenissemus  $a = 291$ ;  $b = 25$ ;  $c = 193$  et  $d = 75$ , erit  $a + b = 316$ ;  $a - b = 266$ ;  $c + d = 268$  et  $c - d = 118$ .  
Hinc

Hinc colligitur fore  $a' = 584$ ;  $b' = 48$ ;  $c' = 384$  et  $d' = 148$ ,  
 qui numeri per 4 depreffi praebent solutionem simpliciffimam,  
 fcilicet:  $a' = 146$ ;  $b' = 12$ ;  $c' = 96$  et  $d' = 37$ ; ita vt fit  
 $146 \cdot 12 (146^2 + 12^2) = 96 \cdot 37 (96^2 + 37^2)$ , ubi nempe est  
 $146^2 + 12^2 = 21460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$  et  $96^2 + 37^2 = 10585 = 5 \cdot 29 \cdot 73$ ;  
 et nunc vtrinqve refultat idem productum  $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 73$ .  
 Ob infignem igitur vsum hujus regulae eam fequenti theo-  
 remate complectamur.

*Theorema.*

§. 29. Si quatuor numeri  $a, b, c, d$  ita fuerint com-  
 parati, vt fit  $ab (aa + bb) = cd (cc + dd)$ , tum fi inde formen-  
 tur ifti quaterni numeri:  $A = (a + b) + (c + d)$ ;  $B = (a + b) - (c + d)$ ;  
 $C = (a - b) + (c - d)$  et  $D = (a - b) - (c - d)$ , erit quoque  
 $AB (A^2 + B^2) = CD (C^2 + D^2)$ .

Hinc igitur patet pro qualibet folutione femper dari adhuc  
 aliam ipfi conjugatam, ope hujus theorematis inveniendam,  
 ita vt perpetuo binae folutiones conjugatae exhiberi queant,  
 quae ita invicem funt connexae, vt ope theorematis al-  
 tera ex altera definiatur.

§. 30: Quo nunc hinc alias folutiones facilius inve-  
 nire liceat, formulas repertas ita adornemus, vt inde ftatim  
 valores integri pro numeris  $a, b, c, d$  exhiberi queant.  
 Hunc in finem, quoniam etiam pro  $q$  fractiones accipere li-  
 cet, ftatim ponamus  $q = \frac{f}{g}$ , eritque  $\alpha = \frac{ff}{ff - gg}$  et  $\beta = \frac{gg}{ff - gg}$ ,  
 unde fit  $s = \frac{3ff + gg}{2(ff - gg)}$ . Hinc cum porro fit  $z = \frac{3}{4\alpha + \beta(3\alpha + \beta)^2}$ , erit  
 $x = \frac{-3(ff - gg)^3}{4f^6 + 4gg + 10ffg^4 + g^6}$ , unde fit  $1 + z = \frac{f^6 + 18ff^2gg - 7g^4 + 4g^6}{4f^6 + 4gg + 10ffg^4 + g^6}$ , tum  
 vero erit  $sz = -\frac{3(ff + gg)(ff - gg)^2}{2 \cdot 4f^6 + f + gg - 10ffg^4 + g^6}$ , ergo  
 $1 + sz = -\frac{f^6 + 17f^4gg + 17ffg^4 - g^6}{2(4f^6 + 4gg + 10ffg^4 + g^6)} = \frac{(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)}{2(4f^6 + 4gg + 10ffg^4 + g^6)}$ .

§. 31. Cum igitur posuiffemus  $p = q(1+z) = \frac{f}{g}(1+z)$ ,  
erit  $p = \frac{f(f^6 + 10f^4gg + 15f^2g^4 + 4g^6)}{g^7}$ . Denique habebamus  $\frac{a}{c} = 1 + sz$ ,

unde si statuamus

$a = (ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)$  et  $c = 2(4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6)$ ,  
cum fuerit  $b = pc$  et  $d = aq$ , erit  $b = \frac{2f^7(6 - 10f^4gg - 15f^2g^4 + 4g^6)}{g}$   
et tandem  $d = \frac{f(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)}{g}$ . Multiplicemus igitur

omnes hos valores per  $g$ , eritque ut sequitur:

$a = g(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)$ ;  $c = 2g^7(4f^6 + f^4gg + 10ffg^4 + g^6)$   
 $b = 2f^7(f^6 + 10f^4gg + 15f^2g^4 + 4g^6)$ ;  $d = f(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)$ .

§. 32. Hae quidem formulae numeros vehementer magnos producant, qui autem plerumque per communem divisorem ad numeros multo minores redigi possunt. Veluti si, ut supra fecimus, sumamus  $f = 3$  et  $g = 1$ , nostrae formulae dabunt  $a = 800$ ;  $b = 9312$ ;  $c = 6176$ ; et  $d = 2400$ ; hi autem numeri omnes divisionem admittunt per 32, quo pacto ad ipsos numeros supra inventos deprimuntur.

Exemplum II. quo  $f = 2$  et  $g = 1$ .

§. 33. Substitatis his valoribus reperiemus  $a = 555 = 275$ ;  $b = 938$ ;  $c = 626$  et  $d = 550$ , qui numeri ulterius ad minores deprimi non possunt. Hujus solutionis etiam exhibeamus suam coniugatam secundum theorema supra datum; erit ergo  $A = 2379$ ;  $B = 27$ ;  $C = 729$ ; et  $D = 577$ . Sicque duas nacti sumus novas solutiones.

Alia solutio

aequationis  $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$ .

§. 34. Posito ut ante  $b = cp$  et  $d = aq$  adepti sumus hanc aequationem:  $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3 - q}{q^3 - p}$ , ita ut hanc fractionem  
ad

ad quadratum redigi oporteat, ad quod praestandum hic alia via utamur quam in forma generali adhibere non licuisset. Statuamus scilicet  $p = 1 + \alpha z$  et  $q = 1 + \beta z$ , reperieturque  $\frac{aa}{cc} = \frac{3\alpha - \beta}{3\beta - \alpha} \frac{3\alpha z + \alpha^3 z^2}{-3\beta z + \beta^3 z^2}$ , sicque pervenimus ad fractionem, in qua quantitas incognita  $z$  tam in numeratore quam in denominatore non ultra quadratum affurgit, cujusmodi formulae satis commode tractari possunt, si fuerint vel primae partes absolutae quadrata, vel si partes postremae fuerint quadrata.

### Evolutio casus prioris,

quo formulae  $3\alpha - \beta$  et  $3\beta - \alpha$  sunt quadrata.

§. 35. Statuamus igitur  $3\alpha - \beta = ff$  et  $3\beta - \alpha = gg$ , eritque  $\alpha = \frac{3ff + gg}{8}$  et  $\beta = \frac{ff + 3gg}{8}$  hocque modo habebimus  $\frac{aa}{cc} = \frac{ff + 3\alpha z + \alpha^3 z^2}{gg + 3\beta z + \beta^3 z^2}$ , quamobrem statuamus  $aa = ff + 3\alpha z + \alpha^3 z^2$  et  $cc = gg + 3\beta z + \beta^3 z^2$ . Jam ut has formulas ad quadrata reducamus, formemus hanc aequalitatem:  $aa gg - cc ff = 3(aagg - \beta\beta ff)z + (z^3 gg - \beta^3 ff)z^2$ , et quia hic membrum sinistrum duos habet factores  $ag + cf$  et  $ag - cf$ , etiam membrum dextrum in duos factores resolvi oportet, quorum alter statuatur  $ag + cf = \frac{z}{\lambda}$ , eritque alter  $ag - cf = 3\lambda(zagg - \beta\beta ff) + \lambda(z^3 gg - \beta^3 ff)z$ , vbi ad valorem  $\lambda$  inveniendum primo fiat  $z = 0$  et addantur quadrata horum duorum factorum, quorum summa erit  $2(aagg + ccff) = 9\lambda\lambda(aagg - \beta\beta ff)^2$ ; at vero ex ipsis formulis propositis, posito  $z = 0$ , ob  $aa = ff$  et  $cc = gg$ , erit  $2(aagg + ccff) = 4ffgg = 9\lambda\lambda(aagg - \beta\beta ff)^2$ , unde reperitur  $\lambda = \frac{2fg}{3(2aagg - \beta\beta ff)}$ , quae forma, ob  $ff = 3\alpha - \beta$  et  $gg = 3\beta - \alpha$ , abit in hanc  $\lambda = \frac{2fg}{3(\beta - \alpha)^2}$ .

H 2

§. 36.



§. 26. Invenio jam hoc valore pro  $\lambda$  bini factores erunt  $ag + cf = \frac{3(\lambda^2 - 3z)}{2fg}$  et  $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\beta^2 - 3\beta - 3\alpha)}{3(\alpha\beta - \beta^2)}$  five  $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\beta + \alpha)(\beta - 3 - \beta + \alpha)}{3(\beta - )^2}$ . Statuamus autem brevilitatis gratia:  $\frac{(\alpha - \beta)(\beta - 3 - \beta + \alpha)}{3(\beta - )^2} = \Delta$ , vt fit  $ag - cf = 2fg + 2fg\Delta z$ . Addantur nunc iterum quadrata harum formarum, et prodibit:

$$2(aa\,gg + cc\,ff) = 4ff\,gg + 8ff\,gg\Delta z + 4ff\,gg\Delta^2 z^2 + \frac{9(\beta - \alpha)^6 z^2}{4ff\,gg}$$

Ex ipsis autem formulis propositis colligimus:  $2(aa\,gg - cc\,ff) = 4ff\,gg + 6(\alpha\,gg + \beta\,ff)z + 2(\alpha^3\,gg + \beta^3\,ff)z^2$  ubi ergo prima membra se mutuo tollunt, reliqua per  $z$  divisa dabunt hanc aequationem:

$$6(\alpha\,gg + \beta\,ff) + 2(\alpha^3\,gg + \beta^3\,ff)z = 8ff\,gg\Delta + 4ff\,gg\Delta^2 z + \frac{9(\beta - \alpha)^6 z}{4ff\,gg}$$

ex qua aequatione facile deducitur valor ipsius  $z$ . Has autem formulas ulterius non evolviemus, quoniam evolutio quovis casu speciali facilius infituetur.

Evolutio casus quo  $f = 3$  et  $g = 1$ .

§. 37. Hic igitur erit  $a = \frac{7}{2}$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ , hinc ergo fiet  $aa = 9 + \frac{147}{4}z + \frac{343}{8}zz$  et  $cc = 1 + \frac{27}{4}z + \frac{27}{8}zz$ ; porro vero erit  $\Delta = -\frac{25}{48}$ . Hinc ergo pro quantitate  $z$  invenienda habebimus hanc aequationem:

$$-195 + \frac{693}{2}z = -\frac{75}{2} + \frac{635}{64}z + 16z = -\frac{75}{2} + \frac{1649}{64}z$$

$$\frac{465}{2} = \frac{7737}{64}z, \text{ unde fit } z = \frac{14880}{7727}$$

Hoc modo perveniremus ad nimis magnos numeros, quos ultra evolvere opere non est pretium.

§. 28. Interim tamen haud difficile erit hinc adeo in genere valores idoneos pro litteris  $a, b, c, d$  exhibere. Sumptis

Sumptis scilicet pro lubitu binis quadratis  $ff$  et  $gg$ , capiuntur numeri  $a$  et  $\beta$  ita, ut fit  $\frac{a}{\beta} = \frac{3ff + gg}{3gg - ff}$ ; scilicet postquam fractio  $\frac{3f + gg}{3g - ff}$  ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro  $a$ , denominator vero pro  $\beta$  accipiat, quo facto erunt numeri quaesiti

$$\begin{aligned} a &= f(x + \beta)(aa - 3a\beta + \beta\beta); \\ b &= g(\beta^3 - 5a\beta\beta + 4aa\beta - 2a^3); \\ c &= g(x + \beta)(xa - 3a\beta + \beta\beta); \\ d &= f(a^3 - 5aa\beta + 4a\beta\beta - 2\beta^3). \end{aligned}$$

Vel si ponatur  $(x + \beta)(xa - 3a\beta + \beta\beta) = \Delta$ , erit  $a = f\Delta$ ;  $b = g(\Delta - 3a(a - \beta)^2)$ ;  $c = g\Delta$  et  $d = f(\Delta - 3\beta(a - \beta)^2)$ . Harum formularum ope exempla multo facilius evolui poterunt.

§. 39. Ita si sumamus  $f = 3$  et  $g = 1$ , erit  $\frac{a}{\beta} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$ , erit ergo  $a = 7$  et  $\beta = 3$ , hincque  $\Delta = -50$ , quocirca ipsi numeri quaesiti reperiuntur  $a = 150$ ;  $b = 386$ ;  $c = 50$  et  $d = 582$ , qui porro per binarium depreffi fiunt  $a = 75$ ;  $b = 193$ ;  $c = 25$  et  $d = 291$ .

§. 40. Consideremus nunc quoque casum, quo  $f = 2$  et  $g = 1$ , eritque  $\frac{a}{\beta} = \frac{13}{7}$ ; quare capiatur  $a = 13$  et  $\beta = 7$ , unde fit  $\Delta = -1100$ , hincque ipsi numeri quaesiti prodeunt  $a = 2200$ ;  $b = 2504$ ;  $c = 1100$ ,  $d = 3712$ , qui per 4 depreffi evadant  $a = 550$ ;  $b = 626$ ;  $c = 275$ ;  $d = 928$ ; quae solutio convenit cum solutione supra §. 33. inventa.

§. 41. Fundamentum hujus Analyseos sequenti nititur Problemati:

Proble-

### Problema.

Propositis his duabus formulis:  $xx + 2fxy + hyy$ , nec non  $xx + 2gxy + kyy$ , invenire rationem inter numeros  $x$  et  $y$ , ut ambae iste formulae evadant quadrata.

### Solutio.

§. 42. Ponatur  $xx + 2fxy + hyy = P^2$  et  $xx + 2gxy + kyy = Q^2$  ac differentia dabit  $PP - QQ = 2(f-g)xy + (h-k)yy$ . Statuatur alter factor  $P - Q = (f-g)y$ , eritque alter  $P + Q = 2x + \frac{(b-k)y}{f-g}$ . Jam quadrata horum duorum factorum addantur, prodibitque

$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + \frac{4(b-k)xy}{f-g} + \frac{(b-k)^2yy}{(f-g)^2} + (f-g)^2yy$ ;  
ex ipsis autem formulis propositis erit

$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + 4(f+g)xy + 2(h+k)yy$ ,  
unde quia primi termini  $4xx$  se destruunt, reliqui per  $y$  divisi dant hanc aequationem:

$4(f+g)x + 2(h+k)y = \frac{4(b-k)x}{f-g} + \frac{(b-k)^2y}{(f-g)^2} + (f-g)^2y$   
five  $4(f-g)[ff - gg - h + k]x = [(h-k)^2 + (f-g)^2][(f-g)^2 - 2(h+k)]y$   
hinc igitur erit  $\frac{x}{y} = \frac{(f-g)^2 - 2(h+k)}{4(f-g)(ff - gg - h + k)}$ .

§. 43. Supra adhuc mentionem fecimus alius casus, quo ambae formulae pro  $aa$  et  $cc$  ad quadrata redigi queant (§. 34;) vbi, ut partes postremae fiant quadrata, necesse est ut ambo numeri  $a$  et  $\beta$  sint quadrata. Sit igitur  $a = mm$  et  $\beta = nn$ , eritque

$$aa = m^6zz + 3m^4z + 3mm - nn \quad \text{et} \\ cc = n^6zz + 3n^4z + 3nn - mm.$$

§. 44. Has aequalitates vt ad formam superioris problematis reuocemus, ita repraesentemus:

$$aa n^6 = m^6 n^6 z z + 3 m^4 n^6 z + 3 m m n^6 - n^8 \text{ et}$$

$$cc m^6 = m^6 n^6 z z + 3 n^4 m^6 z + 3 n n m^6 - m^8$$

et jam facta comparatione erit  $x = m^3 n^3 z$ , sumptoque  $y = 1$ , erit pro hoc casu  $2 f m^3 n^3 z = 3 m^4 n^6 z$ , unde fit  $f = \frac{3}{2} m n^3$  et  $g = \frac{3}{2} n m^3$ , denique vero  $h = 3 n n m^6 - m^8$  et  $k = 3 m m n^6 - n^8$ , unde colligitur  $f - g = \frac{3}{2} m n (n n - m m)$  et  $h - k = 3 n n m^6 + n^8 - 3 m m n^6 - m^8 = (n^4 - m^4) (n^4 + m^4 - 3 m m n n)$ . Jam problema nobis praebet valorem  $\frac{x}{y} = m^3 n^3 z = \frac{(f-g)^4 - 2(b-k)(f-g)^2 + (b-k)^2}{4(f-g)(f-gg-b+k)}$ .

§. 45. Coronidis loco subjungam hic adhuc aliam Analyfin pro resolutione formulae  $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$ . Quoniam res perducta est ad hanc aequationem:  $\frac{a a}{c c} = \frac{p^3 - q}{q^3 - p}$  ponatur  $p = n n (q + 1) - 1$ , fietque

$$\frac{a a}{c c} = \frac{n^6 (q + 1)^3 - 3 n^4 (q + 1)^2 + 3 n n (q + 1) - 1 - q}{q^3 - n n (q + 1) + 1}$$

quae fractio per factorem  $q + 1$  depressa dabit

$$\frac{a a}{c c} = \frac{n^6 (q + 1)^2 - 3 n^4 (q + 1) (-3 n n - 1)}{q q - q + 1 - n n}, \text{ five}$$

$$a a - n^6 q q + n^4 (2 n n - 3) q + (n n - 1)^3$$

tum vero

$$c c = q q - q + 1 - n n, \text{ five } n^6 c c = n^6 q q - n^6 q - n^6 (n n - 1).$$

Pro problemate igitur capi oportebit  $x = n^3 q$  et  $y = 1$ ; reliqua sunt manifesta.

SOLU-