1801

Investigatio trianguli in quo distantiae angulorum ab eius centro gravitatis rationaliter exprimantur

Leonhard Euler

E713

INVESTIGATIO TRIANGVLI IN QVO DISTANTIAE ANGVLORVM AB EIVS CENTRO GRAVITATIS RATIONALITER EXPRIMANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 17 Dec. 1778.

§. 1.

Cum centrum gravitatis trianguli reperiatur in intersectione ternarum rectarum AF, BG et CH, quae ex singulis angulis ductae latera opposita bisecant; illud erit in puncto O, ubi illae tres rectae ita se secant, ut sit $AO = \frac{2}{3}AF$, $BO = \frac{2}{3}BG$ et $CO = \frac{2}{3}CH$. Quoniam igitur requiritur ut distantiae AO, BO et CO rationaliter exprimantur; hoc eveniet, si totae rectae AF, BG et CH fuerint rationales, siquidem latera trianguli per numeros rationales repraesententur. Tab. I. Fig. 8.

§. 2. Ponamus igitur $BF = CF = a$; $CG = AG = b$; $AH = BH = c$; praeterea vero vocemus $AF = f$; $BG = g$ et $CH = h$, ac perpendamus quomodo istae tres lineae

f

f, g, h per illas a, b, c exprimantur. Hunc in finem vocemus angulum $AFB = \omega$, et ex triangulo ABF habebimus hanc aequalitatem

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2\, AF \cdot BF \operatorname{cof.} \omega,$$

at ex triangulo ACF habebimus

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 + 2\, AF \cdot CF \operatorname{cof.} \omega,$$

quae duae aequalitates additae praebent

$$AB^2 + AC^2 = 2\, AF^2 + 2\, BF^2$$

five $4cc + 4bb = 2ff + 2aa$, unde colligitur $ff = 2cc + 2bb - aa$. Simili modo erit

$$gg = 2aa + 2cc - bb \text{ et } hh = 2aa + 2bb - cc,$$

quocirca pro litteris a, b, c, eiusmodi numeros quaeri oportet, vt iftae tres formulae reddantur numeri quadrati.

§. 3. Antequam hanc inveftigationem fufcipiamus, confideremus cafum maxime memorabilem, quo $bb + cc = 2aa$; tum enim erit $ff = 3aa$, five $f = a\sqrt{3}$, tum vero $gg = 3cc$, five $g = c\sqrt{3}$; et $hh = 3bb$, five $h = b\sqrt{3}$, quae eft infignis proprietas huiusmodi triangulorum, in quibus $2aa = bb + cc$.

§. 4. Praeterea in genere obfervemus effe

$$ff + gg + hh = 3(aa + bb + cc).$$

Cum igitur fit $AO = \frac{2}{3}f$, multiplicando per $\frac{4}{9}$ erit

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = \frac{4}{3}(aa + bb + cc),$$

ficque patet femper effe

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = \frac{1}{3}(BC^2 + AC^2 + AB^2),$$

quae proprietas eft etiam maxime notatu digna.

§. 5.

§. 5. Videamus nunc quemadmodum formulae inventae ad quadrata revocari queant, ac ſi incipiamus a prima $ff = 2cc + 2bb - aa$, non tam facile patet, quomodo quadratum obtineri queat; at ſi ſub hac ſpecie repraeſentetur: $ff = (b+c)^2 + (b-c)^2 - aa$, tum ſecundum praecepta Analyſeos ſtatui poterit $f = b + c + \frac{p}{q}(b - c + a)$, qua ſubſtitutione facta habebimus

$$(b+c)^2 + \frac{2p}{q}(b+c)(b-c+a) + \frac{pp}{qq}(b-c+a)^2$$
$$= (b+c)^2 + (b-c)^2 - aa$$

vbi ſublatis membris prioribus, poſterioribus vero per factorem communem $b - c + a$ diviſis orietur

$$\frac{2p}{q}(b+c) + \frac{pp}{qq}(b-c+a) = b - c - a,$$

unde commode definitur

$$a = \frac{(b-c)(qq-pp) - 2pq(b+c)}{pp+qq}.$$

Quodſi ergo litterae a iſte valor tribuatur, littera quidem f rationaliter exprimetur: erit enim

$$f = \frac{(b+c)(qq-pp) + 2pq(b-c)}{pp+qq};$$

at ſi iſtum valorem ipſius a in binis reliquis formulis ſubſtituere vellemus, in calculos nimis complicatos, ac propemodum inextricabiles, delaberemur; quam ob rem alio modo ſolutionem tentare convenit.

§. 6. Iunctim contemplemur binas poſteriores conditiones, quae ſunt

$$gg = 2aa + 2cc - bb \text{ et } hh = 2aa + 2bb - cc,$$

quarum differentia dat $gg - hh = 3(cc - bb)$; unde cum omnia in numeris integris deſiderentur, ſi $cc - bb$

alios

alios factores non haberet, praeter $c+b$ et $c-b$, statui deberet $g+h=3(c+b)$ et $g-h=c-b$, vel $g+h=c+b$ et $g-h=3(c-b)$. Verum ex illa positione sequeretur $g=2c+b$ et $h=c+2b$; ex posteriore vero $g=2c-b$ et $h=2b-c$. Hae autem binae determinationes inter se conveniunt; nam quia in formulis principalibus tantum quadrata bb et cc occurrunt, perinde est, sive litterae b et c positive sive negative accipiantur.

§. 7. Quodsi vero loco $g=2c+b$ hunc valorem substituamus, in aequatione $gg=2aa+2cc-bb$ prodit $2aa=2bb+2cc+4bc$, sive $aa=(b+c)^2$, ideoque $a=b+c$. Hoc ergo casu in triangulo proposito summa duorum laterum aequalis foret tertio latere, ideoque tria puncta A, B, C in rectam caderent, neque ergo amplius foret triangulum, sicque ista solutio penitus est reiicienda.

§. 8. Quoniam haec solutio inde est nata, quod posuimus formulam $cc-bb$ alios factores non admittere, praeter $c+b$ et $c-b$, necesse est vt ista formula insuper alios involvat factores. Ponamus igitur esse $cc-bb=pqrs$, fierique debebit $gg-hh=3pqrs$, unde statuatur $g+h=3pq$ et $g-h=rs$, unde fit $g=\frac{3pq+rs}{2}$ et $h=\frac{3pq-rs}{2}$, ex formula vero $cc-bb=qprs$ sumamus $c+b=pr$ et $c-b=qs$. Hoc autem modo tantum differentiae binarum formularum satisfecimus $gg-hh$ et $cc-bb$, unde insuper aliae seorsim foret satisfaciendum, eodem autem redit, si insuper summae satisfiat. Cum igitur sit $gg+hh=4aa+bb+cc$, substitutio valorum inventorum facillime efficitur: erit enim

2 g g

$$2gg + 2hh = 9ppqq + rrss,$$

similique modo erit

$$2cc + 2bb = pprr + qqss,$$

unde aequatio conficienda fit

$$9ppqq + rrss = 8aa + pprr + qqss,$$

ideoque fiet

$$8aa = pp(9qq - rr) + ss(rr - qq), \text{ ergo}$$
$$16aa = 2pp(9qq - rr) + 2ss(rr - qq),$$

quam ergo formulam ad quadratum reduci oportet; quod si fuerit praestitum, duabus formulis posterioribus penitus erit satisfactum, sicque tantum superérit primae conditioni $ff = 2cc + 2bb - aa$ satisfieri.

§. 9. Cum igitur esse debeat $16ff = 32cc + 32bb - 16aa$, ob $2cc + 2bb = pprr + qqss$, nanciscemur hanc aequationem:

$$16ff = 8pprr - 8qqss - pp(9qq - rr) - ss(rr - qq),$$

sive

$$16ff = 9pp(rr - qq) + ss(9qq - rr),$$

hoc ergo modo insuper requiritur, ut sequentes duae formulae quadrata efficiantur, quae sunt

$$16aa = 2pp(9qq - rr) + 2ss(rr - qq) \text{ et}$$
$$16ff = 18pp(rr - qq) + 2ss(9qq - rr).$$

§. 10. Quo harum formularum resolutio facilior reddatur, ponamus $p = x + y$ et $s = x - y$, tum enim conditiones implendae erunt:

$$\text{I. } 4aa = 4qq(xx+yy) + 2xy(5qq - rr) \text{ et}$$
$$\text{II. } 4ff = 4rr(xx+yy) + 2xy(5rr - 9qq).$$

§. 11. Quo has formulas tractabiliores reddamus, statuamus brevitatis gratia

$$\frac{5qq - rr}{4qq} = M \text{ et } \frac{5rr - 9qq}{4rr} = N,$$

ac binae aequationes tractandae erunt

$$\frac{aa}{qq} = xx + yy + 2Mxy \text{ et } \frac{ff}{rr} = xx + yy + 2Nxy.$$

Ecce ergo resolvendae adhuc supersunt duae formulae inter se simillimae et ita comparatae, ut utramque seorsim facillime resolvere liceat.

§. 12. Vtramque resolutionem simul suscipiamus, statuendo $\frac{a}{q} = x + ty$ et $\frac{f}{r} = x + uy$; hocque modo prodibunt sequentes formae:

$$2tx + tty = y + 2Mx \text{ et } 2ux + uuy = y + 2Nx,$$

unde duplici modo nanciscimur:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - tt}{2(t - M)} = \frac{1 - uu}{2(u - N)}.$$

Hos ergo duos valores inter se congruentes reddi oportet
quem in finem primo numeratores aequales statuantur, i
quod duplici modo fieri potest, statuendo vel $u = t$, ve
$u = -t$; priori autem casu denominatores aequales fieri nequ
unt, nisi fuerit $M = N$, id quod fieri nequit. Sumamus ergo $u = -$
ac denominatorum aequalitas praebet $u = \frac{N - M}{2} = -t$, u
de fit $\frac{x}{y} = \frac{(M - N)^2 - 4}{4(M + N)}$, hocque modo iam omnibus condit
nib

nibus erit ſatisfactum. Interim tamen probe notari oportet, hanc ſolutionem tantum eſſe particularem, propterea quod binae fractiones pro $\frac{x}{y}$ inventae infinitis aliis modis aequales fieri poſſent, etiamſi neque numeratores, neque denominatores aequales ſtatuantur. Quoniam autem alii modi ad calculos nimis perplexos perducerent, hac ſolutione eo magis poterimus eſſe contenti, quod nihilominus innumerabiles ſolutiones ſuppeditat.

§. 13. Solutio igitur problematis propoſiti ita ſe habebit. 1°. Binae litterae q et r penitus arbitrio noſtro relinquuntur, quibus igitur pro lubitu ſumtis erit

$$M = \frac{5qq - rr}{4qq} \text{ et } N = \frac{5rr - 9qq}{4rr}.$$

2°. His litteris inventis capiantur $x = (M - N)^2 - 4$ et $y = 4(M + N)$, ſive poſtquam fractio $\frac{(M-N)^2 - 4}{4(M+N)}$ ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro x, denominator vero pro y accipiatur. 3°. Deinde vero erit

$$\frac{a}{q} = x + ty = \frac{2x + (M - N)y}{2},$$

ideoque $a = qx + \frac{1}{2}(M - N)qy$, ſimilique modo erit

$$\frac{f}{r} = x - ty = x - \frac{(M - N)y}{2},$$

ideoque $f = rx - \frac{1}{2}(M - N)ry$. 4°. Cum ſit $p = x + y$ et $s = x - y$, habebitur $b + c = pr$ et $c - b = qs$, ideoque

$$c = \frac{pr + qs}{2} \text{ et } b = \frac{pr - qs}{2},$$

ſicque omnia tria latera trianguli erunt definita, quippe quae erunt

$$2a = 2qr + (M - N)qy;$$
$$2b = pr - qs \text{ et } 2c = pr + qs.$$

5°. Denique vero ob $g+h=3pq$ et $g-h=rs$, erit
$$g=\frac{3pq+rs}{2} \text{ et } h=\frac{3pq-rs}{2}.$$

§. 14. Iam innuimus binas litteras q et r, seu potius earum relationem, arbitrio nostro esse relictam; ubi primum observandum occurrit, si sumeretur $q=r$, ob $M=1$ et $N=-1$ fieri $M+N=0$, ideoque et $y=0$, unde nulla solutio idonea nascitur. Idem incommodum oritur, si fuerit $r=3q$, siquidem inde fit $M=-1$ et $N=1$, ideoque iterum $M+N=0$. Hanc ob rem ut casum definitum evolvamus, eumque simplicissimum, sumamus $q=2$ et $r=1$, unde fit $M=\frac{19}{16}$ et $N=-\frac{31}{4}$. Sin autem sumeremus $q=1$ et $r=2$, tum fieret $M=\frac{1}{4}$ et $N=\frac{11}{16}$, quae posterior solutio cum sit simplicior, hunc casum data opera evolvamus.

Evolutio casus
quo $q=1$ et $r=2$.

§. 15. Hoc ergo casu erit $M=\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$ et $N=\frac{11}{16}$, ideoque $M+N=\frac{15}{16}$ et $M-N=-\frac{7}{16}$, unde fit $\frac{x}{y}=-\frac{65}{64}$, quocirca sumamus $x=-65$ et $y=64$. Hinc erit porro $a=-79$ et $f=-102$, sive $a=79$ et $f=102$. Deinde autem erit $p=-1$ et $s=-129$, unde colligitur $c+b=-2$ et $c-b=-129$, ideoque $c=-\frac{131}{2}$ et $b=\frac{127}{2}$. Denique $g+h=-3$ et $g-h=-258$, ideoque $g=-\frac{261}{2}$ et $h=+\frac{255}{2}$.

§. 16. Solutio ergo huius casus ita se habebit, postquam ubique per 2 fuerit multiplicatum: $a=158$; $b=127$; $c=131$; $f=204$; $g=261$ et $h=255$. Vbi plurimum observasse iuvabit, hinc adeo aliam solutionem in minoribu numeris derivari posse; nam quia numeri f, g et h per

d

dividi possunt, eorum trientes loco litterarum a, b et c accipi poterunt, tum autem praecedentes litterae a, b, c dabunt valores pro f, g et h, ita ut hoc observato nanciscamur istam solutionem simpliciorem:

$$a = 68;\ b = 87;\ c = 85;$$
$$f = 158;\ g = 127;\ h = 131;$$

id quod sequenti modo ostendi potest.

§. 17. Cum spectatis litteris a, b et c tanquam datis alterae f, g et h ita determinari sunt inventae, ut esset

$$f = \sqrt{(2bb + 2cc - aa)};$$
$$g = \sqrt{(2aa + 2cc - bb)};$$
$$h = \sqrt{(2aa + 2bb - cc)};$$

hinc sequitur fore

$$ff + gg + hh = 3aa + 3bb + 3cc, \text{ hineque}$$
$$2ff + 2gg + 2hh = 6aa + 6bb + 6cc.$$

Subtrahatur primo $3ff = 6bb + 6cc - 3aa$, ac prodibit

$$2gg + 2hh - ff = 9aa,$$

ita ut sit

$$3a = \sqrt{(2gg + 2hh - ff)}.$$

Eodemque modo reperietur

$$3b = \sqrt{(2hh + 2ff - gg)} \text{ et}$$
$$3c = \sqrt{(2gg + 2ff - hh)}.$$

§. 18. Quoniam igitur litterae $3a$, $3b$ et $3c$ eodem modo per f, g et h determinantur, quo ante invenimus litteras f, g et h per a, b et c determinari, consideremus aliud triangulum, ad quod referantur simili modo gemini lit-

litterarum ordines a', b' et c' atque f', g' et h', ac si fuerit $a' = f$; $b' = g$ et $c' = h$, erit

$$f' = \surd(2b'b' + 2c'c' - a'a') =$$
$$\surd(2gg + 2hh - ff) = 3a, \text{ ideoque } f' = 3a.$$

Eodemque modo prodibit $g' = 3b$ et $h' = 3c$, sicque ex triangulo, ad quod referuntur litterae a, b, c et f, g, h, semper aliud triangulum derivari potest, cui respondeant litterae a', b', c' et f', g', h', si capiatur $a' = f$; $b' = g$ et $c' = h$ tum erit $f' = 3a$; $g' = 3b$ et $h' = 3c$; quod est theorema maxime notatu dignum.

§. 19. Hinc igitur patet, si ex triangulo ante invento aliud formetur, in quo sit $a' = \frac{1}{3}f$; $b' = \frac{1}{3}g$ et $c' = \frac{1}{3}h$; tum fore $f' = a$; $g' = b$ et $h' = c$; unde prodit alterum triangulum supra exhibitum, quod pro simplicissima solutione nostri problematis merito haberi potest. Ante autem quam alia exempla percurramus, plurimum iuvabit, solutionem generalem accuratius evolvere et ad calculum accommodare.

Accuratior evolutio solutionis generalis.

§. 20. In solutione brevitatis gratia posuimus

$$M = \frac{5qq - rr}{4qq} \text{ et } N = \frac{5rr - 9qq}{4rr},$$

postquam posuissemus $g + h = 3pq$ et $g - h = rs$, tum vero $c + b = pr$ et $c - b = qs$, unde invenimus

$$\frac{x}{y} = \frac{(M - N)^2 - 4}{4(M + N)},$$
$$\frac{a}{q} = x + \tfrac{1}{2}(M - N)y \text{ et}$$
$$\frac{f}{r} = x - \tfrac{1}{2}(M - N)y,$$

qui-

quibus valoribus inventis reliquae litterae omnes determinantur. Nunc primo loco M et N valores assumtos substituamus, atque impetrabimus:

$$1^\circ.\ M - N = \frac{9q^4 - r^4}{4qqrr} = \frac{(3qq + rr)(3qq - rr)}{4qqrr};$$

deinde vero erit

$$2^\circ.\ M + N = \frac{10qqrr - r^4 - 9q^4}{4qqrr} = \frac{(9qq - rr)(rr - qq)}{4qqrr}.$$

Iam pro fractionis $\frac{x}{y}$ numeratore $(M - N)^2 - 4$ habebimus eius factores

$$M - N + 2 = \frac{9q^4 - r^4 + 8qqrr}{4qqrr} = \frac{(9qq - rr)(rr + qq)}{4qqrr} \text{ et}$$

$$M - N - 2 = \frac{9q^4 - r^4 - 8qqrr}{4qqrr} = \frac{(9qq + rr)(rr - qq)}{4qqrr},$$

unde totus numerator erit

$$(M - N)^2 - 4 = \frac{(qq + rr)(qq - rr)(9qq + rr)(9qq - rr)}{16q^4r^4},$$

at vero denominator est

$$4(M + N) = \frac{10qqrr - r^4 - 9q^4}{qqrr} = \frac{(9qq - rr)(rr - qq)}{qqrr},$$

quibus inventis erit

$$\frac{x}{y} = -\frac{(qq + rr)(9qq + rr)}{16qqrr}.$$

§. 21. Quia haec fractio ulteriorem reductionem in genere non admittit, sumamus

$$x = (qq + rr)(9qq + rr) \text{ et } y = -16qqrr,$$

hinc iam porro ob $\frac{1}{2}(M - N) = \frac{(3qq + rr)(3qq - rr)}{8qqrr}$ reperiemus

$$\frac{e}{q} = 27q^4 + 10qqrr - r^4 = (qq + rr)(9qq + rr) - 2(3qq + rr)(3qq - rr)$$

$$\frac{f}{r} = -9q^4 + 10qqrr + 3r^4 = (qq + rr)(9qq + rr) + 2(3qq + rr)(3qq - rr)$$

qui-

quibus valoribus inventis ob

$$p = x + y = (qq+rr)(9qq+rr) - 16qqrr$$
$$= 9q^4 - 6qqrr + r^4 \text{ et}$$
$$s = x - y = (qq+rr)(9qq+rr) + 16qqrr$$
$$= 9q^4 + 26qqrr + r^4,$$

prodit $c + b = pr$; $c - b = qs$; $g + h = 3pq$ et $g - h = rs$. Ex litteris ergo q et r pro lubitu assumtis omnes sex valores a, b, c et f, g, h facile eliciuntur.

Exemplum I.

quo $q = 1$ et $r = 3$.

§. 22. Quia iam supra observavimus sumendo $q = r$ nullum reperiri triangulum, sed bina latera tertio esse aequalia, sumamus $q = 1$ et $r = 3$ prodibitque $a = 324$ et $f = 108$. Porro erit $p = 36$ et $s = 324$, hincque porro erit $c = 216$ et $b = 108$. Deinde $g = 540$ et $h = 432$, qui valores ergo sunt: $a = 324$; $b = 108$; $c = 216$; $f = 108$; $g = 540$ et $h = 432$; qui per 108 depressi abeunt in hos valores: $a = 3$; $b = 1$; $c = 2$; $f = 1$; $g = 5$ et $h = 4$; quae solutio pariter locum habere nequit, quia duo latera tertio reperiuntur aequalia.

Exemplum II.

quo $q = 2$ et $r = 1$.

§. 23. Hic igitur erit $qq + rr = 5$ et $9qq + rr = 37$, unde colligitur $a = 202$ et $f = 471$. Deinde fit $p = 121$ et $s = 249$, hinc porro $c = \frac{619}{2}$ et $b = \frac{377}{2}$. Denique $g = \frac{975}{2}$ et $h = \frac{477}{2}$. His igitur valoribus duplicatis habebimus $a = 404$; $b = 377$; $c = 619$; $f = 942$; $g = 975$ et $h = 477$.

Exem-

Exemplum III.

quo $q = 2$ et $r = 3$.

§. 24. Hic ergo erit $qq + rr = 13$ et $9qq + rr = 45$; unde colligitur $\frac{a}{2} = 459$ et $\frac{f}{3} = 711$; porro vero $p = 9$ et $s = 1161$. Ex his fit $c = \frac{2349}{2}$ et $b = +\frac{2295}{2}$; denique $g = \frac{3537}{2}$ et $h = \frac{3429}{2}$.

§. 25. Hi ergo valores duplicati et per communem factorem 9 divisi praebent hanc solutionem: $a = 204$; $b = 255$ et $c = 261$; $f = 474$; $g = 393$ et $h = 381$; ubi cum numeri f, g, h divisibiles sint per 3, per theorema supra allatum orietur sequens nova solutio: $a = 68$; $b = 85$; $c = 87$; $f = 158$; $g = 131$ et $h = 127$. Haec ergo solutio idem praebet triangulum, quod ex primo casu, quo $q = 1$ et $r = 2$, demum ope theorematis sumus nacti.

Exemplum IV.

quo $q = 3$ et $r = 5$.

§. 26. Hic ergo erit $qq + rr = 34$ et $9qq + rr = 106$, unde fit $\frac{a}{3} = 34 . 106 - 4 . 5^2 = 3396$ et $\frac{f}{5} = 3812$; porro $p = 4$ et $s = 7404$, hinc $c = 10816$ et $b = 10796$; deinde $2g = 18028$ et $2h = 17992$.

§. 27. Triangulum igitur hoc exemplo inventum, quoniam singuli valores factorem habent 4, sequentibus numeris continetur: $a = 2547$; $b = 2699$; $c = 2704$; $f = 4765$; $g = 4507$ et $h = 4498$. Hinc iam satis liquet, quomodo quotcunque huiusmodi triangula exhiberi queant, quibus conditiones praescriptae adimpleantur.