1801

De corporibus cylindricis incurvatis

Leonhard Euler

E712

DE CORPORIBVS CYLINDRICIS INCVRVATIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conv. Acad. exhib. die 21 Sept. 1778.

§. 1.

Quemadmodum cylindrus rectus generatur, si centrum circuli ita secundum lineam rectam promovetur, ut interea planum circuli perpetuo ad istam rectam perpendiculare conservetur: ita si centrum circuli secundum lineam curvam quamcunque ita promoveatur, ut planum circuli in singulis punctis ad tangentem curvae situm teneat perpendicularem, hoc modo generabitur cylindrus incurvatus, cuius scilicet axis erit linea curva atque omnes sectiones ad hunc axem normaliter factae erunt circuli circulo genitori aequales.

§. 2. Contemplemur nunc aequationem inter ternas coordinatas, qua natura talium cylindrorum incurvatorum more solito exprimi poterit. Hunc in finem referat curva AU, utcunque super plano tabulae descripta, viam, qua centrum circuli procedit, pro qua vocemus coordinatas $AT = t$ et $TU = u$, fitque $\partial u = s \partial t$; atque ducta ad curvam normali Tab. I. Fig. 1.

U N, erit subnormalis T N $= \frac{u \partial u}{\partial t} = s u$ et ipsa normalis U N $= u \sqrt{(1 + s s)}$. Haec igitur normalis producta dabit intersectionem circuli genitoris dum eius centrum per punctum U transit, ipse vero circulus plano tabulae perpendiculariter insistere est concipiendus.

§. 3. Sit nunc Z punctum quodcunque in peripheria istius circuli, quod ergo simul reperietur in superficie corporis, quod hic consideramus; unde si ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, tum vero ab Y ad rectam fixam A B normalis Y X, habebuntur ternae coordinatae, quas vocemus A X $= x$, X Y $= y$ et Y Z $= z$, inter quas aequatio quaeri debet naturam superficiei genitae exprimens, quae ergo quemadmodum ex indole curvae directricis A U deduci queat, videamus.

§. 4. Vocetur igitur radius circuli genitoris $= a$, et cum sit intervallum U Z $= a$ et Y Z $= z$, erit recta U Y $= \sqrt{(a a - z z)}$. Iam ducta ex U ad Y X normali U S, ex similitudine triangulorum U S Y et N T U colligemus

$$\mathrm{US} = \frac{s \sqrt{(a a - z z)}}{\sqrt{(1 + s s)}} = \mathrm{TX} \text{ et } \mathrm{SY} = \frac{\sqrt{(a a - z z)}}{\sqrt{(1 + s s)}},$$

hinc ergo nanciscimur coordinatas

$$\mathrm{AX} = x = t - \frac{s \sqrt{(a a - z z)}}{\sqrt{(1 + s s)}} \text{ et}$$

$$\mathrm{XY} = y = a + \frac{\sqrt{(a a - z z)}}{\sqrt{(1 + s s)}},$$

unde si eliminentur binae quantitates variabiles t et u, una cum littera s inde pendente, reperietur aequatio inter x, y et z, qua natura superficiei descriptae exprimetur.

§. 5.

§. 5. Veluti si curva AU etiam fuerit circulus, hac aequatione expressus: $uu = 2bt - tt$, ob $\partial u = \frac{b\partial t - t\partial t}{\sqrt{(2bt - tt)}}$, erit

$$s = \frac{b-t}{\sqrt{(2bt-tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+ss)} = \frac{b}{\sqrt{(2bt-tt)}},$$

quibus valoribus substitutis habebimus

$$x = +t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b} \text{ et}$$

$$y = \sqrt{(2bt-tt)} + \frac{\sqrt{(aa-zz)(2bt-tt)}}{b},$$

unde eliminando z erit

$$x\sqrt{(2bt-tt)} + y(b-t) = b\sqrt{(2bt-tt)}.$$

Hinc iam haud difficulter elicitur t; multo autem promptius ex priore aequatione

$$x = t - \frac{(b-t)\sqrt{(aa-zz)}}{b}: \text{ erit enim}$$

$$t = + \frac{bx + b\sqrt{(aa-zz)}}{b + \sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex altera vero aequatione elicitur

$$\sqrt{(2bt-tt)} = \frac{by}{b+\sqrt{(aa-zz)}}.$$

Ex priori formula colligitur $b - t = \frac{b(b-x)}{b+\sqrt{(aa-zz)}}$, hincque iam penitus expelletur littera t quadratis addendis, scilicet

$$(b-t)^2 + (\sqrt{2bt-tt})^2 = bb = \frac{bb[yy+(b-x)^2]}{b+\sqrt{(aa-zz)^2}}, \text{ sive}$$

$$(b-x)^2 + yy = bb + 2b\sqrt{(aa-zz)} + aa - zz,$$

quae aequatio ad rationalitatem perducta praebet

$$(xx+yy+zz-2bx-aa)^2 = 4bb(aa-zz),$$

quae ergo ad quartum gradum exsurgit.

§. 6. Maxime autem molestum, atque adeo superfluum foret, pro quavis curva AU talem aequationem rationalem elicere, cum omnia symtomata huiusmodi cylindrorum in-

incurvatorum facillime ex ipsis formulis principalibus

$$x = t - \frac{s\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1 + ss)}} \text{ et } y = u + \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1 + ss)}},$$

derivari queant, quemadmodum non ita pridem ostendi, cum omnes superficies investigassem, in quibus omnes normales ad datum planum productae sint inter se aequales. Evidens enim est omnes cylindros incurvatos huic quaestioni satisfacere, dum omnes normales ad eorum superficiem ductae sunt radio circuli genitoris aequales.

§. 7. Nunc autem istam ideam multo latius extendamus et loco circuli substituamus aliam curvam quamcunque IZG, cuius punctum fixum I simili modo secundum datam illam curvam AU continuo ita promoveatur, ut planum figurae IYZ perpetuo tangenti huius curvae in U normaliter insistat. Verum hoc ad motus determinationem nondum sufficit, sed insuper statui oportet, ut istius figurae axis IF perpetuo in plano tabulae conservetur. Quodsi ergo istam figuram loco circuli iuxta curvam datam AU promoveri concipiamus, ubi ad punctum U fuerit perventum, ibi simul punctum I reperietur, et recta IF incidet in ipsam normalem supra definitam UY. Et cum applicata istius figurae YZ iam praebeat tertiam nostram coordinatam z, ponamus eius abscissam IY $= v$, existente YZ $= z$, ita ut pro hac figura IFG aequatio inter v et z tanquam cognita sit spectanda.

Tab. I. Fig. 2.

§. 8. Cum igitur ista figura super curva AU in situm UYZ fuerit translata, ita ut punctum Z in superficie descripta reperiatur, cuius situm per ternas coordinatas AX $= x$; XY $= y$ et YZ $= z$ definiri oporteat, propter in-

Fig. 1.

intervallum UY $= v$ binae coordinatae x et y sequenti modo exprimentur:

$$x = t - \frac{sv}{\sqrt{(1+ss)}} \text{ et } y = w + \frac{v}{\sqrt{(1+ss)}},$$

hoc ergo modo corpus generabitur ad axem curvilineum AU referendum, cuius omnes sectiones ad istum axem normaliter factae ipsi figurae assumtae IFG futurae sint similes et aequales. Omnia igitur corpora hac ratione genita tanquam cylindrica incurvata spectare licebit.

§. 9. Plures insignes proprietates huiusmodi corporum sponte se offerunt ex ipsa generatione. Veluti si quaerantur normales in singulis punctis ad has superficies ductae, evidens est normalem in figura IFG ad punctum Z ductam simul esse normalem ad superficiem genitam; tum vero etiam tangentes illius figurae quoque ipsam superficiem tangent. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, quod tam soliditas horum corporum, quam eorum superficies per notissimam regulam Guldini facillime assignari queant, dum scilicet pro soliditate area figurae IFG, pro superficie vero arcus curvae IZG per viam a centro gravitatis descriptam multiplicatur. Quoniam enim in hac generatione directio motus perpetuo est ad planum figurae describentis normalis, regula Guldini sine errore adhiberi potest.

§. 10. Quodsi autem hinc ex ternis coordinatis x, y et z immediate sive soliditatem sive superficiem definire voluerimus, in calculos plane inextricabiles illaberemur, unde nihil plane concludere liceret. Cum enim formula integralis duplicata pro soliditate sit $\iint z\,\partial x\,\partial y$, si in ea loco ∂x et ∂y valores substituantur, evidens est nullum

lum plane successum inde sperari posse. Multo minus pro superficie exspectare licebit, quae posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$ hac formula integrali duplicata exprimitur:

$$\int\!\!\int \partial x\,\partial y\,\sqrt{(1 + pp + qq)}.$$

Tab. I. Fig. 3. §. 11. Interim tamen totum hoc negotium sequenti modo facillime expedire licebit: Cum pro curva AU detur aequatio inter t et u, ducta normali UN vocetur angulus ANU $= \Phi$, eritque $s = \cot.\,\Phi$, unde formulae pro x et y erunt: $x = t - v\cos.\,\Phi$ et $y = u + v\sin.\,\Phi$. At vero ista normalis UN producatur usque ad centrum circuli osculatoris O, ita ut recta UO sit radius osculi, quem vocemus $= r$, et cum sit angulus A$nu = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus ad O $= \partial\Phi$. Quodsi ergo elementum curvae Uu ponamus $= \partial w$, ut sit $\partial w = \partial t\sqrt{(1+ss)} = \frac{\partial t}{\sin.\,\Phi}$, vel etiam $\partial w = \frac{\partial u}{\cos.\,\Phi}$ erit $r = \frac{\partial w}{\partial \Phi}$.

Tab. I. Fig. 4. §. 12. Consideremus nunc seorsim elementum curvae U$u = \partial w$ et producantur radii osculi OU et Ou in Y et y, ita ut sit UY $= uy = v$, et perpendicula YZ $= yz = z$. Hic scilicet repraesentatur promotio figurae mobilis UYZ in situm proximum uyz, qua punctum Y transfertur in y per spatiolum Y$y = \partial w + v\,\partial\Phi$, quod simul exprimit translationem puncti Z in z, ita ut sit Z$z = \partial w + v\,\partial\Phi$.

§. 13. His praeparatis investigemus primo soliditatem corporis hoc modo geniti, cuius elementum, dum figura ex U in u promovetur, reperitur, si puncta Y et y in figura mobili promoveantur per spatiola YY$' = yy' = \partial v$, atque ele elementum prismaticum, cuius basis est

$$Y y Y y' = \partial v (\partial w + v \partial \Phi),$$

et altitudo $YZ = z$, erit $= z \partial v (\partial w + v \partial \Phi)$, cuius integrale, ex sola variabilitate ipsius v, dabit elementum soliditatis quod quaeritur et quod basi $U u Y y$ insistit, cuius ergo valor erit $= \partial w \int z \partial v + \partial \Phi \int z v \partial v$, quae integralia a puncto U usque ad terminum figurae extendi debent. Hic autem evidens est formulam $\int z \partial v$ exprimere aream figurae mobilis V Y Z, alteram vero formulam $\int z v \partial v$ exprimere momentum eiusdem areae respectu puncti U.

§. 14. Quo haec clariora evadant, consideremus ipsam figuram mobilem U Y Z seorsim, cuius centrum gravitatis sit in G, ex quo ad U Y demittatur perpendiculum G H, voceturque intervallum $UH = h$, tota autem area figurae describentis vocetur $= H$, ita ut sit $H = \int z \partial v$ et $h = \frac{\int v z \partial v}{\int z \partial v}$. His igitur valoribus substitutis totum incrementum soliditatis, dum figura per spatiolum $U u$ promovetur, erit $= H \partial w + H h \partial \Phi = H (\partial w + h \partial \Phi)$; ubi evidens est formulam $\partial w + h \partial \Phi$ exprimere spatiolum, per quod interea punctum H promovetur; sicque incrementum soliditatis reperitur, si area figurae mobilis, scilicet H, ducatur in viam, per quam interea centrum gravitatis figurae promovetur. Tab. I. Fig. 5.

§. 15. Quoniam igitur area figurae per totum motum manet eadem, soliditas totius corporis hoc modo geniti facillime determinatur, dum area figurae describentis per viam ab eius centro gravitatis descriptam multiplicetur; in quo ipso continetur regula iam olim a Guldino in medium

 alla-

allata. Postmodum autem observatum fuit, istam regulam tuto adhiberi non posse, nisi quovis momento directio motus ad planum figurae fuerit normalis, quemadmodum in casu quem tractamus manifesto usu venit.

§. 16. Dum autem figurae punctum U per lineam curvam A U ita promovetur, uti est praeceptum, punctum H, sive centrum gravitatis figurae, curvam isti parallelam percurret, quae ex illa formabitur, dum singulae normales O U per intervallum U H $= h$ producuntur. Talis ergo linea curva G H cum ipsa curva A U communem habebit evolutam, propterea quod ubique punctis U et H idem centrum circuli osculatoris O respondet. Tum vero etiam ex ipso elemento, per quod punctum H promoveri vidimus, quod erit $\partial w + h \partial \Phi$, cognoscimus longitudinem istius curvae G H $= w + h \Phi$, scilicet semper aequatur ipsi curvae A U $=$ W, una cum arcu circuli radio h descripti, angulo Φ conveniente existente hoc angulo Φ amplitudine curvae propositae.

Tab. I. Fig. 6.

§. 17. Simili modo superficies corporis hoc motu geniti inveniri poterit, quippe cuius incrementum oritur, dum arcus figurae describentis (Fig. 4.) U Z in situm proximum $u z$ promovetur. Hunc in finem statuamus ipsam longitudinem curvae describentis U Z $= q$, ut sit eius elementum Z Z$' = \partial q$, quod cum transferatur in $z z'$ per spatiolum Z$z = \partial w + v \partial \Phi$, ista areola erit $=$ ZzZ$'z' = \partial q(\partial w + v \partial \Phi)$ cuius integrale dabit incrementum totius superficiei, quam quaerimus, sicque hoc incrementum erit $= q \partial w + \partial \Phi \int v \partial q$ ub ubi integralia per totam figuram describendam sunt extendenda.

§. 18. Quemadmodum igitur in figura (Fig. 5.) U Y Z littera q exprimit longitudinem arcus U Z, ita formula $\int v \partial q$ exprimet momentum huius arcus respectu puncti U. Quare si iam centrum gravitatis in G statuamus, hincque in axem U Y perpendiculum G H demittamus, posito intervallo G H $= h$ erit $h = \frac{\int v \partial q}{q}$, ideoque incrementum superficiei quaesitum erit $= q(\partial w + h \partial \Phi)$; ubi evidens est formulam $\partial w + h \partial \Phi$ exprimere promotionem centri gravitatis momentaneam.

§. 19. Cum igitur q referat totum arcum curvae describentis, quia perpetuo eiusdem manet quantitatis, per integrationem repetitam colligitur tota superficies hoc motu genita $= q(w + h \Phi)$, ubi $w + h \Phi$ manifesto est tota via a centro gravitatis arcus percursa, id quod iterum egregie cum regula Guldini convenit.

§. 20. Hactenus quidem assumsimus totam curvam A U, per quam figura promovetur, in eodem plano esse constitutam; verum omnia, quae tam de soliditate quam superficie determinavimus, pariter valent, etiamsi curva directrix A U non in eodem plano versetur, sed per ternas coordinatas A T $= t$; T U $= u$ et U V $= v$ definiri debeat, si modo debita circumspectio adhibeatur, ut axis figurae, qui erat U Y rite quovis momento disponatur, quod facile fieri poterit, si ad illud planum attendamus, in quo bina elementa proxima huius curvae sunt disposita: in hoc enim plano perpetuo axis figurae mobilis dirigi debebit; tum autem ma- Tab. I. Fig. 7.

N 2 ni-

nifeftum eft totum negotium abfolvi poffe ut ante, ficque iterum regula Guldini cum optimo fucceffu adhiberi poterit.

§. 21. Neque vero hoc modo promotio figurae penitus determinatur: in locis enim, ubi via centri gravitatis nullam habet curvaturam, pofitio bafis figurae prorfus non determinatur. Hic igitur in fubfidium vocari oportet quae in Mechanica de motu progreffivo et gyratorio tradi folent; quomodocunque fcilicet corpus quodpiam agitatur, eius motus femper refolvi poteft in motum progreffivum centri gravitatis et motum gyratorium circa quempiam axem per ipfum centrum gravitatis tranfeuntem.

§. 22. Hoc igitur notato, in noftro cafu, quo figura plana promoveri concipitur, motus centri gravitatis femper ita debet effe comparatus, ut eius directio perpetuo ad planum figurae fit normalis; praeterea vero motus gyratorius quovis momento fieri debet circa axem per centrum gravitatis tranfeuntem, qui fimul in ipfo plano figurae fit fitus. Hoc enim modo evidens eft non folum directionem motus centri gravitatis, fed etiam omnium figurae punctorum quovis momento ad ipfum planum figurae fore normalem; quae conditio omnino eft neceffaria, ut five foliditas corporis hoc motu geniti, five eius fuperficies, fecundum regulam Guldini, per productum ex ipfa figura in viam a centro gravitatis percurfam rite definiri queat.

INVE-