1798

De novo genere quaestionum arithmeticarum pro quibus solvendis certa methodus adhuc desideratur

Leonhard Euler

E702

DE NOVO GENERE QVAESTIONVM ARITHMETICARVM PRO QVIBVS SOLVENDIS CERTA METHODVS ADHVC DESIDERATVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conventui exhib. die 19 Maii 1777.

§. 1.

Occasionem de huiusmodi quaestionibus cogitandi mi suppeditavit problema Diophanteum, quo quaerunt omnes numeri integri pro N accipiendi, ut ambae istae fo mulae: $A^2 + B^2$ et $A^2 + NB^2$, simul quadrata reddi qu ant. Satis enim constat infinitos numeros hinc exclud quibus conditioni praescriptae neutiquam satisfieri que Veluti si fuerit $N = -1$, demonstratio iam in vulgus nc est, quod hae duae formulae $A^2 + B^2$ et $A^2 - B^2$, nu modo simul quadrata evadere queant. Idem quoque ever si capiatur $N = 2$, vel $N = 3$, vel $N = 4$, vel $N =$ vel etiam $N = 6$. Post unitatem enim primus nume idoneus pro N accipiendus est $N = 7$; quandoquidem sum $A = 3$ et $B = 4$, ut $A^2 + B^2 = 25$, erit quoque A^2 N

N $B^2 = 121$. Praeterea vero infiniti alii exhiberi possunt uiusmodi numeri idonei tam positivi quam negativi; semper autem infiniti dantur alii, qui ex hoc ordine penitus excluduntur. Quamobrem quaestio non parum est curiosa, atque attentione satis digna: quemadmodum omnes numeros doneos pro N accipiendos indagari oporteat? Vbi imprimis riteria desiderantur, quorum ope numeri idonei ab ineptis istingui queant.

§. 2. Ante omnia autem evidens est ab hac quaeione penitus removeri debere casum, quo alterum quadraorum A^2 et B^2 evanesceret, siquidem si esset $B = 0$, amae formulae ultro erunt quadrata; sumto autem $A = 0$, mnes numeri quadrati pro N assumti satisfacerent. His rgo casibus exclusis primo conditioni priori, qua formula $^2 + B^2$ quadratum reddi debet, est satisfaciendum; quod t ponendo $A = xx - yy$ et $B = 2xy$, tum enim erit $^2 + B^2 = (xx + yy)^2$, ubi ambos numeros x et y pro luitu accipere licet, si modo excludantur casus, quibus vel lteruter horum numerorum evanescit, vel ambo inter se equales capiuntur; quandoquidem priori casu foret $B = 0$, osteriori vero fieret $A = 0$, quos casus modo a nostra traatione exclusimus.

§. 3. Substituamus nunc istos valores pro A et B signatos in formula $A^2 + N B^2$, et prodibit haec expressio: $x - yy)^2 + 4 N xxyy$, quam ergo quadratum effici oporet. Potuisset illa quidem quadrato cuicunque aequalis atui, indeque valor ipsius N definiri. Verum quia requirir, ut N prodeat numerus integer, in id erit incumbenum, cuiusmodi quadrato ista expressio aequalis statui de-

debeat,

beat, ut inde pro N numerus integer reſultet. Si enim quadratum illud ſtatuatur $= zz$, ex aequatione $(xx - yy)^2 + 4Nxxyy = zz$, elicitur $N = \frac{zz - (xx - yy)^2}{4xxyy}$. Neceſſe igitur eſt, ut numerator huius fractionis per denominatorem diviſibilis evadat.

§. 4. In genere autem hoc duplici modo fieri poſſe obſervavi, ſi ſumatur vel $Z = xx + 2\alpha xxyy + yy$, vel $Z = xx + 2\alpha xxyy - yy$. Si enim pro α etiam numeri fracti tam poſitivi quam negativi admittantur, quemcunque valorem habuerit quantitas Z, ea ſemper in utraque harum formularum comprehendi poterit. Evolvamus igitur valores, qui hinc pro noſtro numero N reſultant, ac prior quidem forma nobis dabit

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx + \alpha yy + 1 = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1);$$

ex altera autem forma reperitur

$$N = \alpha\alpha xxyy + \alpha xx - \alpha yy = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1.$$

§. 5. Certum igitur eſt omnes plane valores idoneos ipſius N in his formulis contineri debere, ſi modo pro littera α non ſolum numeri integri, ſed etiam fracti quicunque admittantur; dum pro binis litteris x et y ſufficit ſolos numeros integros aſſumſiſſe, propterea quod numeri illi primitivi A et B ſemper tanquam integri ſpectari poſſunt, ſine ulla quaeſtionis reſtrictione. Quin etiam quilibet valor ipſius N in utraque formula contineri debet, quoniam altera ex altera deduci poteſt. Si enim in priori ponamus $\alpha xx + 1 = \beta xx$, id quod ſemper fieri licet, quoniam pro α et β etiam fractiones admittuntur, ob $\alpha = \frac{\beta xx - 1}{xx}$, prior forma evadet $= \beta xxyy - \beta yy + \beta xx$, quae eſt ipſa forma

forma posterior, si scilicet ibi loco α scribatur β. Interim tamen, quia haec reductio per fractiones est facta, praestabit utraque forma primo inventa in sequentibus uti; quandoquidem eae essentialiter a se invicem distinguuntur, dum prior, utpote productum ex duobus factoribus, semper numeros compositos producit, posterior vero etiam numeros primos suppeditare potest. Veluti ponendo $\alpha = 1$; $x = 2$ et $y = 1$, prodit $N = 7$.

§. 6. Quin etiam in genere litteram α negative ac-ipere licet, hincque quatuor formulas generales pro N ancifcemur, quae erunt:

$$\text{I. } N = (\alpha xx + 1)(\alpha yy + 1),$$
$$\text{II. } N = (\alpha xx - 1)(\alpha yy + 1) + 1,$$
$$\text{III. } N = (\alpha xx - 1)(\alpha yy - 1),$$
$$\text{IV. } N = (\alpha xx + 1)(\alpha yy - 1) + 1,$$

videns autem est quartam formam a secunda non esse uersam, quia tantum numeri x et y permutantur, qui ero ex sua natura sunt permutabiles.

§. 7. Cum igitur totum negotium eo redeat, ut nc numeri integri pro N eliciantur, manifestum est hoc mper usu venire, quando litterae α valores integri tribuntur. Hos igitur casus primum consideremus, indeque actu nnes valores ipsius N usque ad 100 eliciamus. Vbi probe eminisse oportet, amborum numerorum x et y neutrum nilo aequalem statui posse; neque vero etiam inter se aeales capi debere. Sumamus igitur primo $\alpha = 1$, ac pri-a forma erit $N = (xx + 1)(yy + 1)$. Quia igitur nu-

meri

meri in forma $zz+1$ contenti, sunt: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101; producta ex binis horum numerorum valores idoneos pro N exhibebunt, si modo quadrata horum numerorum excludantur. Hoc observato numeri idonei centenario non maiores erunt 10, 20, 34, 50, 52, 74, 85, 100.

§. 8. Manente $\alpha = 1$ forma tertia dabit

$$N = (xx-1)(yy-1).$$

Hinc cum numeri formae $zz-1$ sint 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, producta ex binis horum numerorum diversis, quoque valores idoneos pro N praebebunt, qui ad 100 usque erunt 24, 45, 72. Secunda autem forma, casu $\alpha = 1$, erit $N = (xx-1)(yy+1)+1$, quae forma duplicis generis numeros involvit, qui sunt

$$zz-1 = 0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,$$

$$zz+1 = 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ 50,$$

et singuli numeri superioris seriei per singulos inferioris multiplicati, si ad productum unitas adiiciatur, dabunt valores idoneos pro N, si modo nullus superiorum per subscriptum multiplicetur. Hinc ergo valores idonei pro N ad 100 usque erunt: 7, 17, 31, 41, 49, 52, 71, 76, 79, 97.

§. 9. Sumamus nunc $\alpha = 2$, et ex forma prima habebimus $N = (2xx+1)(2yy+1)$; unde cum numeri formae $2zz+1$ sint 3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, quorum producta ex binis diversis sunt sumenda, hinc prodeunt pro N sequentes numeri: 27, 57, 99. Forma autem tertia dat $N = (2xx-1)(2yy-1)$. Hinc cum numeri formae $2zz-1$ sint 1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, producta ex binis diversis praebent sequentes valores idoneos pro N: 7, 17, 17, 31, 49, 71, 79. Forma autem secunda praebet $N = (2xx-1)(2xx+1)+1$, ubi duplicis generis factores erunt:

$$2zz-1 = 1, 7, 17, 49, 71, 97,$$
$$2zz+1 = 3, 9, 19, 51, 73, 100.$$

Hinc exclusis numeris subscriptis producta ex superioribus per inferiores unitate aucta dabunt valores pro N idoneos, qui ad 100 usque sunt hi: 10, 20, 22, 52, 74, 94, 101.

§. 10. Sit nunc $\alpha = 3$, ac prima forma dat

$$N = (3xx+1)(3yy+1),$$

unde numeri huius formae $3zz+1$ sunt 4, 13, 28, 49, 76. Hinc igitur producta ex binis diversis sumendo, unicus tantum oritur numerus idoneus pro N infra 100, scilicet 52. At ex forma tertia fit $N = (3xx-1)(3yy-1)$; unde quia numeri formae $3zz-1$ sunt 2, 11, 26, 47, 74, producta ex binis diversis dant 22, 52, 94. Ex forma autem secunda

$$N = (3xx-1)(3yy+1)+1,$$

prodeunt sequentes pro N valores: 27, 45, 57, 99.

§. 11. Superfluum foret pro α sumere 4. Nam quia $4xx$ et $4yy$ sunt quadrata, casus eodem rediret, ac $\alpha = 1$. Sit igitur $\alpha = 5$, ac prima forma dat

$$N = (5xx+1)(5yy+1),$$

unde infra 100 nullus numerus idoneus prodit. Ex forma autem tertia

$$N = (5xx-1)(5yy-1),$$

prodit

prodit 76. At secunda forma

$$N = (5xx - 1)(5yy + 1) + 1,$$

praebet 85.

§. 12. Si porro statuere velimus $\alpha = 6$, nullus numerus infra centenarium inde nascitur. Quamobrem si omnes numeros inventos colligamus, valores integri pro α assumti pro N sequentes numeros idoneos in ordine dispositos praebent: 7, 10, 17, 20, 22, 24, 27, 31, 34, 41, 45, 49, 50, 52, 57, 71, 72, 74, 76, 79, 85, 94, 97, 99, 100.

§. 13. Plurimum autem falleretur, si quis putaret plures valores idoneos usque ad centenarium non dari. Nullum enim est dubium, quin etiam valores fracti pro α assumti quosdam quoque centenario minores numeros pro N producant, quos casus ut perscrutemur, necesse est in eas fractiones pro α accipiendas inquirere, unde valores integri pro N oriri queant, id quod in sequente problemate expediemus.

Problema

Investigare eas fractiones pro α accipiendas, unde ista formula generalis: $(\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$ valores integros adipisci possit.

Solutio.

§. 14. Ista investigatio potissimum pendet ab indole binorum numerorum x et y, quos non solum semper tanquam integros, sed etiam primos inter se spectare licet. Res autem nunc praecipue huc redit, vtrum ambo hi numeri x et y factores habeant, nec ne? quandoquidem ab his factoribus

ribus fractiones per α introductae tolli debent. Statuamus igitur in genere $x = pq$ et $y = rs$, quippe qua positione defectus factorum non excluditur, quia nihil impedit, quo minus pro p et s unitas accipiatur. Caeterum quia x et y sunt primi inter se, p, q, r, s ut primi inter se spectari poterunt; hoc modo formula proposita erit

$$N = (\alpha ppqq \pm 1)(\alpha rrss \pm 1).$$

§. 15. Statuamus nunc pro α hanc fractionem: $\alpha = \frac{a}{qqss}$, ubi iam littera a numeros integros quoscunque designet; atque formula proposita sequentem induet formam:

$$\left(\frac{app}{ss} \pm 1\right)\left(\frac{arr}{qq} \pm 1\right) = \left(\frac{app \pm ss}{ss}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{qq}\right).$$

Vbi observasse iuvabit, quia tam numeri p et s quam q et r sunt primi inter se, neutram harum duarum fractionum in numerum integrum abire posse, propterea quod ex numero a tam factor qq quam ss excluditur; verum permutentur ambo denominatores, ut obtineatur ista forma:

$$\left(\frac{app \pm ss}{qq}\right)\left(\frac{arr \pm qq}{ss}\right),$$

ubi iam nihil impedit, quo minus utraque haec fractio numero integro aequari possit, quandoquidem fieri potest, ut tam $app \pm ss$ divisibile fiat per qq, quam $arr \pm qq$ divisibile per ss.

§. 16. Vt autem prius eveniat, ex proprietatibus numerorum iam satis cognitis oportet ut q sit numerus formae $aff + gg$; tum enim semper pro p numeros integros tales invenire licebit, ut forma $app + ss$ fiat divisibilis per qq. Simili modo etiam requiritur, ut sit s formae $aff \pm gg$;

tum

tum enim pariter ſemper numeri integri pro r aſſignari poterunt, quibus forma $arr \pm qq$ diviſionem per ss admittat.

§. 17. Hoc problemate ſoluto, ſi ſtatuamus $x = pq$ et $y = rs$, ſumto $\alpha = \frac{a}{qqss}$, tres noſtrae formae generales pro N inventae ſequenti modo repraeſentabuntur:

$$\text{I. } N = \left(\frac{app + ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right),$$

$$\text{II. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr + qq}{ss}\right) + 1,$$

$$\text{III. } N = \left(\frac{app - ss}{qq}\right)\left(\frac{arr - qq}{ss}\right),$$

ubi pro litteris p, q, r, s, eiusmodi valores accipi debent, ut binae illae fractiones ad numeros integros revocentur; ex quo intelligitur, has formas infinities eſſe generaliores quam praecedentes.

§. 18. Maximum autem diſcrimen hinc ſtatim elucet, quod cum priores formae nunquam ad numeros negativos pro N perducant, hic tam forma ſecunda quam tertia innumerabiles alios numeros negativos exhibere queat, quando ſcilicet vel $app < ss$, vel $arr < qq$, ex quo ſolo iam certo ſequitur, has formulas poſteriores innumerabiles praebere poſſe valores idoneos pro N, qui in formulis primo inventis plane non contineantur.

§. 19. Hae autem formulae ita latiſſime patent, ut difficillimum ſit omnes caſus in iis contentos repraeſentare; quamobrem caſus ſaltem quosdam maxime ſpeciales evolvamus. Ac primo quidem ſumamus $a = 1$ et $s = 1$, et forma noſtra prima dabit $N = \left(\frac{pp + 1}{qq}\right)(rr + qq)$, ubi ergo tan-

tantum opus eſt, ut qq fiat diviſor formulae $pp+1$, id quod ſtatim evenit ſumendo $p=7$ et $q=5$, ſicque enim fiet $N=2(rr+25)=2rr+50$. Hinc autem pro N infra 100 ſequentes novi prodeunt valores: 58, 68, 82.

§. 20. Quoniam ſecunda forma etiam hoc modo referri poteſt: $\left(\frac{app+ss}{qq}\right)\left(\frac{arr-qq}{ss}\right)+1$, ſumto $a=1$ et $s=1$ erit $N=\left(\frac{pp+1}{qq}\right)(rr-qq)+1$. Hinc ſumto $p=7$ & $q=5$, erit $N=2rr-49$, unde primum pro N iſti numeri negativi prodeunt: -17, -31, -41, -47, poſitivi autem infra 100 hinc oriundi ſunt: 23, 49, 19. Deinde vero formula $pp+1$ per numerum quadratum dividi nequit, usque ad $p=18$ et $q=5$, unde prodit $\frac{pp+1}{qq}=13$, ideoque ex forma prima fit

$$N=13(rr+25)=13rr+325,$$

ex ſecunda autem forma fit $N=13rr-324$. Hinc autem nulli numeri infra 100 oriuntur.

§. 21. Maneat $a=1$ et $s=1$, ac forma tertia dabit

$$N=\left(\frac{pp-1}{qq}\right)(rr-qq),$$

ſecunda vero dabit

$$N=\left(\frac{pp-1}{qq}\right)(rr+qq)+1,$$

quae formulae ſatis ſunt foecundae in numeris idoneis pro N exhibendis, quoniam pluribus modis $\frac{pp-1}{qq}$ poteſt eſſe numerus integer. Primo ſcilicet ſumto $p=3$ capi poterit $q=2$, unde prior forma erit $N=2rr-8$, poſterior vero $N=2rr+9$; illa igitur praebet hunc numerum negativum: $N=-6$, hos vero poſitivos: 10, 24, 42, 64, 90; ex poſteriore vero oriuntur hi poſitivi: 11, 17, 27, 41, 59, 81.

§. 22.

§. 22. Sit nunc $p = 5$ et $q = 2$, et ambae formulae erunt $N = 6rr - 24$ et $N = 6rr + 25$. Ex illa prodit numerus negativus -18; positivi vero 30, 72. Ex altera vero oriuntur hi numeri: 31, 49, 79. Sumatur nunc $p = 7$ et $q = 4$, et ambae formulae erunt $N = 3rr - 48$ et $N = 3rr + 49$. Prior dat hos negativos: -45, -36, -21; positivos vero hos: 27, 60, 99. Altera forma dat hos positivos: 52, 61, 76, 97.

§. 23. Sumamus nunc $p = 8$ et 3, et formulae nostrae erunt $N = 7rr - 63$ et $N = 7rr + 64$. Ex priore oriuntur hi negativi: -56, -35; et positivus 49. Secunda vero forma praebet hos positivos: 71, 92.

§. 24. Sumto porro $p = 9$, capi poterit $q = 4$, unde formulae nostrae fiunt $N = 5rr - 80$ et $N = 5rr + 81$. Prima praebet hos negativos: -75, -60, -35; positivos vero hos: 45, 100. Altera vero praebet 86.

§. 25. Sumto porro $p = 10$, erit $q = 3$, et formulae erunt $N = 11rr - 99$ et $N = 11rr + 100$. Prima forma dat hos negativos numeros: -88, -55; positivum vero 77. Si hoc modo ulterius progredi velimus, unicus novus numerus infra 100 reperitur, scilicet -90.

§. 26. Hactenus igitur sequentes numeros negativos pro N sumus adepti: -6, -17, -18, -21, -31, -35, -36, -41, -45, -47, -55, -56, -60, -75, -88, -90; at vero numeri positivi hactenus inventi et in ordinem redacti sunt: 7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42, 45, 49, 50, 52, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

§. 27.

§. 27. Hic ordo numerorum negativorum adhuc fatis eſt magnus, dum ex caſibus magis complicatis inſuper plures alii oriuntur; at vero ordo poſitivorum ex talibus caſibus vix uno vel altero augebitur, uti mox docebimus. Maneat adhuc $a = 1$, at ponatur $s = 2$, atque forma prima dabit $N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr+qq}{4})$, quae autem, quoniam ſumma duorum quadratorum nunquam per 4 eſt diviſibilis, praetermitti debet; hinc autem forma ſecunda praebet

$$N = (\frac{pp+4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}) + 1.$$

Hic iam ſumatur $p = 11$ et $q = 5$, fietque $N = 5(\frac{rr-25}{4}) + 1$. Statuatur porro $r = 2t+1$, eritque $N = 5(tt+t) - 29$ unde naſcuntur iſti numeri negativi; -19, -29; ad poſitivos vero hinc nullus accedit.

§. 28. Manente $s = 2$ et $a = 1$, forma tertia praebet

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr-qq}{4}),$$

ſecunda vero

$$N = (\frac{pp-4}{qq})(\frac{rr+qq}{4}) + 1;$$

quae autem, ob rationem ante memoratam, eſt omittenda. Sumatur nunc primo $p = 7$ et $q = 3$, eritque $N = 5(\frac{rr-9}{4})$, quae forma, poſito $r = 2t+1$, abit in $N = 5(tt+t) - 10$, unde oritur numerus negativus -10, poſitivus vero nullus novus hinc oritur. Sumto autem $p = 11$, erit

$$N = 13(\frac{rr-9}{4}) = 13(tt+t-2),$$

unde naſcitur iſte numerus negativus: -26, poſitivorum autem nullus novus accedit.

§. 29. Casu autem postremo si sumamus $p = 1$ et $q = 1$, erit $N = -3\left(\frac{rr-1}{4}\right)$, quae posito $r = 2t + 1$ abit in hanc: $N = -3(tt + t)$, unde oriuntur sequentes numeri negativi: -6, -18, -36, -60, -90, qui autem omnes iam sunt inventi. Sumatur vero $s = 3$ et $p = 1$ et $q = 2$, orietur hinc forma $N = -2\left(\frac{rr-4}{9}\right)$. Ponatur hic $r = 9t + 2$ fietque $N = -2(9tt + 4t)$, unde sumto $t = -1$, prodit $N = -10$. Ex $t = 1$ fit $N = -26$. At $t = -2$ praebet -56.

§. 30. Nimis longum autem foret omnes huiusmodi casus prosequi; praesertim cum nunquam certi esse possemus omnes valores idoneos pro N invenisse, siquidem terminus ultra 100 extenderetur; hanc ob rem tantum aliquos casus speciales subiungamus, unde saltem novi numeri positivi deduci queant. Pro forma autem prima, manente $a = 1$, erit $N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr+qq}{ss}\right)$, ubi iam notavimus hos factores integros fieri non posse, nisi numeri q et s sint summae duorum quadratorum. Sin autem pro forma secunda fit

$$N = \left(\frac{pp+ss}{qq}\right)\left(\frac{rr-qq}{ss}\right) + 1,$$

sufficiet ut tantum q sit summa duorum quadratorum. Hic ergo sumamus $p = 4$ et $s = 3$, at vero $q = 5$, ut prodeat

$$N = \frac{rr-25}{9} + 1 = \frac{rr-16}{9}.$$

Posito ergo hic $r = 9t + 4$, prodit $N = 9tt + 8t$, unde autem nulli novi numeri deducuntur.

§. 31. Consideremus casum, quo $\frac{pp+ss}{qq} = 1$, simul vero ambo numeri q et s sint summae duorum quadratorum, ut prima forma locum habere possit, id quod eveniet fiet sumendo $p = 12$, $s = 5$ et $q = 13$, fietque $N = \frac{rr + 169}{25}$, quae fractio si evadat integra casu $r = f$, etiam numeros integros dabit ponendo $r = 25\,t \pm f$; tum enim prodibit

$$N = 25\,tt \pm 2\,tf + \frac{ff + 169}{25},$$

haec conditio autem adimplebitur, sumendo $r = 25\,t \pm 9$, hinc enim fiet $N = 25\,tt \pm 18\,t + 10$, unde oriuntur sequentes valores: 10, 17, 53, 74, quorum 53 plane est novus. Si forma secunda pro iisdem positionibus uti vellemus, haberetur

$$N = \frac{rr - 169}{25} + 1 = \frac{rr - 144}{25},$$

quae si ponatur $r = 25\,t \pm 13$, transit in hanc formam:

$$N = 25\,tt \pm 26\,t + 1, \text{ sive } N = (t \pm 1)(25\,t \pm 1),$$

unde patet hanc formam iam in principali, quae erat

$$N = (\alpha xx \pm 1)(\alpha yy \pm 1)$$

contineri, sumendo $\alpha = t$; $x = 1$ et $y = 5$, unde novi numeri non sunt expectandi.

§. 32. Ex iis igitur, quae hactenus sunt tradita, patet valores idoneos positivos pro numero N usque ad 100 hoc ordine procedere:

7, 10, 11, 17, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31, 34, 41, 42
45, 49, 50, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 68, 71, 72
74, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 86, 90, 92, 94, 97, 99, 100.

Sequentes autem ex hoc ordine exclusi sunt putandi:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 21,
25, 26, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44
46, 47, 48, 51, 54, 55, 56, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70
73, 75, 78, 80, 83, 84, 87, 88, 89, 91, 93, 95, 96, 98.

Quomodocunque autem hos binos ordines contemplemur, nullum plane patefcit criterium, quo numeri idonei et inepti a fe invicem diftinguantur; unde affirmare haud dubito, certam methodum huiusmodi quaeftiones refolvendi in Analyfi etiamnunc effe incognitam.

§. 33. Cum autem quaeftio, quam hactenus tractavimus, fit quodammodo complicata, aliquas quaeftiones fimpliciores, fpeciminis loco, hic fubiungam, quas, quam diu methodus memorata latuerit, pariter refolvere non licet.

Quaeftio I.

§. 34. *Si litterae x et y denotent numeros quoscunque rationales, tam fractos, quam integros, inveftigare omnes numeros integros N, qui in hac formula: $N=(xx+1)(yy+1)$ contineantur.* Hic quidem primo patet, fumto $x=0$ fequentes numeros occurrere:

$$1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, \text{ etc.}$$

Praeterea vero manifeftum eft in ifta forma non folum quadrata fingulorum horum numerorum, fed etiam producta ex binis quibusque occurrere, quae funt

$$4, 10, 20, 25, 34, 50, 52, 74, 100.$$

Hi fcilicet numeri ex valoribus integris litterarum x et y nafcuntur; verum innumerabiles alii oriri poffunt ex valoribus fractis. Si enim ponamus $x=\frac{p}{q}$ et $y=\frac{r}{s}$, fiet

$$N=\left(\frac{pp+qq}{qq}\right)\left(\frac{rr+ss}{ss}\right), \text{ five } N=\left(\frac{pp+qq}{ss}\right)\left(\frac{rr+ss}{qq}\right),$$

ubi manifeftum eft infinitis modis fieri poffe, ut tam $pp+qq$ per ss quam $rr+ss$ per qq divifionem admittat. Hic igitur potiffimum certa methodus defideratur, quae omnes plane ne valores idoneos pro N, usque ad terminum quemcunque, aſſignare valeat.

Quaeſtio II.

§. 35. *Si x et y denotent omnes numeros rationales, tam fractos, quam integros, inveſtigare omnes numeros integros, qui in hac formula:* $N = (xx - 1)(yy - 1)$ *contineantur.* Hic autem ex valoribus integris ipſarum x et y numeri reſultantes facile aſſignantur, ac deſcribi poſſunt; at vero ex fractionibus $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{r}{s}$ innumerabiles alii reſultare poſſunt, quorum indolem et nexum cum prioribus perſcrutari — hoc opus hic labor eſt!

METHO-