



1797

Utrum hic numerus 100009 sit primus necne inquiritur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Utrum hic numerus 100009 sit primus necne inquiritur" (1797). *Euler Archive - All Works*. 699.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/699>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

VTRVM HIC NVMERVS:

1000009.

SIT PRIMVS, NEC NE, INQVIRITVR

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Cum hic numerus manifeste sit summa duorum quadratorum, scilicet: $1000^2 + 3^2$, quaestio huc redit: num iste numerus adhuc alio modo in duo quadrata diuidi queat? Si enim id nullo modo fieri potest, hic numerus certe erit primus; sin autem adhuc alio modo talis resolutio succedat, tum non erit primus, atque tum adeo eius diuisores assignare licebit. Quare si vnum quadratum statuamus $= xx$, inquirendum est, vtrum altera pars, scilicet: $1000009 - xx$ euadere queat quadratum, praeter casus $x = 3$ et $x = 1000$, id quod sequenti modo explorari poterit.

§. 2. Quoniam iste numerus definit in 9, alterum quadratum necessario diuidi poterit per 5, atque adeo per 25. Statuamus igitur, hanc formulam $1000009 - xx$ esse diuisibilem per 25, ac perspicuum est, necessario esse debere $x = 25a + 3$; tum enim habitur haec formula:

1000000

$$1000000 - 6 \cdot 25 a - 25^2 \cdot a a$$

quae diuisa per 25 abit in hanc: $40000 - 6a - 25aa$,
quae ergo forma quadratum esse debet.

§. 3. Hic duo casus sunt considerandi, prouti a fuerit vel numerus par, vel imper. Sit pro priori casu $a = 2b$, et facta diuisione per 4. quadratum esse debet haec formula:

$$A = 10000 - 3b - 25bb.$$

Pro altero casu fit $a = 4c + 1$, et formula quadratum red-
denda erit

$$B = 39969 - 224c - 400cc,$$

quae utique quadratum impar esse potest: fin autem pro eodem casu statuamus $a = 4d - 1$, haec resultat formula:

$$C = 39981 + 176d - 400dd,$$

quae, quia per 8 diuisa relinquit 5, quadratum nunquam esse potest, ita vt tantum binae formulae A et B sint examinandae.

Eolutio formulae.

$$B = 39969 - 224c - 400cc.$$

§. 4. Hic igitur litterae c successive omnes valores 0, 1, 2, 3, etc. tam posituos quam negatios tribuamus, et quoniam a numero absoluto 39969 subtrahi debet formula $400cc \pm 224c$, prout c fuerit numerus vel positius vel negatius, istos numeros successive subtrahendos in duabus columnis, vna cum eorum differentiis annotemus:

c	400 c c — 224 c	Diff.	c	400 c c + 224 c	Diff.
0	0	176	0	0	624
1	176	976	1	624	1424
2	1152	1776	2	2048	2224
3	2928	2576	3	4272	3024
4	5504		4	7296	

Vbi statim patet, pro utroque casu differentias continuo crescere per 800.

§. 5. Ista igitur differentiae a numero illo absoluto 39969 continuo subtrahantur, id quod commode etiam per binas columnas fieri poterit; vbi ergo videndum erit, an vsquam numeri quadrati resultent.

39969 177	39969 624	31089 4176	28849 4624
39793 976	39345 1424	26913 4976	24225 5424
38817 1776	37921 2224	21937 5776	18801 6224
37041 2576	35697 3024	16161 6576	12577 7024
34465 3376	32673 3824	9585 7376	5553
31089	28849	* 2209	

§. 6. In utroque hoc calculo vnicum occurrit quadratum * 2209 = 47²; vnde patet, numerum propositum non esse primum, quemadmodum in dissertatione, Tomo XIX. nouor. Commentar. *De tabula numerorum primorum vsque ad millionem et ultra continuanda*, inserta, est confignatus, sed habere diuisores; ad quos inueniendos notetur, hoc quadratum prouenisse ex valore $c = -10$, vnde fit $a = -39$; tum vero colligitur $x = 25a + 3 = -97$; hincque

$$1000009 - xx = 55225 = 235^2,$$

ita vt hanc duplicem resolutionem habeamus:

$$1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2,$$

hinc transponendo

$$1000^2 - 235^2 = 972^2 - 3^2,$$

vnde sequitur

$$(1000 - 235)(1000 + 235) = (972 - 3)(972 + 3),$$

sive $1235 \cdot 765 = 969 \cdot 975$. Hinc fit $\frac{1235}{975} = \frac{969}{765}$, quae fractiones deprimuntur ad hanc simplicissimam: $\frac{7}{15}$, vnde denique denique concluditur, nostrum numerum cum summa quadratorum $19^2 + 15^2$ communem habere diuisorem, qui ergo erit 293, atque reuera reperimus esse

$$1000009 = 293 \cdot 3413.$$

Ex quo patet, in tabulam memoratae dissertationis, vbi omnes numeri primi intra 1000000 et 1002000 contenti exhibentur, errorem irrepsisse, inde natum, quod consideratio diuisoris primi 293 est praetermissa.

Evolutio formulae

$$A = 10000 - 3b - 25bb.$$

§. 7. Haec formula est pars centesima formulae $1000009 - xx$, ad quam igitur evoluendam iterum duo casus sunt distinguendi, alter quo b est numerus par, alter vero quo impar. Pro priori casu evidens est, nisi b sit numerus pariter par, formulam propositam quadratum esse non posse. Sit igitur $b = 4c$, et forma resultans, per 4 diuisa, fiet $2500 - 30 - 100cc$, quae num quadratum esse queat, praeter casum $c = 0$, haud difficulter apparebit. Primo enim evidens est, esse non posse $c = \pm 1$; deinde pariter sumi nequit $c = \pm 2$. Sit igitur $c = \pm 3$, et formula nostra euadet $2500 - 900 \pm 9 = 1600 \pm 9$, quod quadratum esse nequit. Sin autem sumatur $c = \pm 4$ fiet

$$2500 - 1600 \pm 12 = 900 \pm 12,$$

certe non quadratum. Denique sumto $c = \pm 5$, pariter quadratum oriri nequit: prodit enim

$$2500 - 2500 \pm 15 = 0 \pm 15.$$

§. 8. Pro altero casu, vbi b numerus impar, statuatur primo $b = 4d + 1$, ac formula proposita euadet

$$9972 - 212d - 400dd,$$

quae diuisa per 4 fit

$$2493 - 53d - 100dd,$$

quae casu $d = 0$ manifesto non est quadratum. Sumatur igitur $d = \pm 1$, prodibitque 2393 ± 53 , pariter non quadratum; at casus $d = \pm 2$, praebet 2093 ± 106 ; casus vero $d = \pm 3$ dat 1593 ± 159 , ex quorum neutro quadratum resultat, neque ex casu $d = \pm 4$, quippe qui dat 893 ± 212 .

Casus denique $d = -5$ praebet $-7 + 265$. Sit denique b numerus formae $4d - 1$, prodibitque

$$9978 + 188d - 400dd$$

qui numerus, cum sit par, neque tamen per 4 diuisibilis, quadratum esse nequit.

§. 9. Quo vis huius calculi magis eluceat, examinemus adhuc alium huiusmodi numerum in duo quadrata resoluibilem, qui sit $1000081 = 1000^2 + 9^2$, et videamus utrum adhuc alio modo in duo quadrata resolui possit, quorum alterum, uti in casu praecedente, necessario per 5 debet esse diuisibile. Posito igitur vno quadrato $= xx$, videamus an reliqua pars $1000081 - xx$ possit esse quadratum per 5 siue per 25 diuisibile.

§. 10. Hunc in finem statuamus $x = 25y + 9$, fietque formula illa $1000000 - 18 \cdot 25y - 25^2yy$, quae per 4 diuisa abit in hanc simplicem: $40000 - 18y - 25yy$. Sit nunc primo y numerus par, h. e. $y = 2a$, et formula iterum per 4 diuisa ita se habet:

$$A = 10000 - 9a - 25aa.$$

Secundo pro numero impari statuatur 1^o. $y = 4b + 1$, prodibitque

$$B = 39957 - 272b - 400bb,$$

qui numerus est impar et per 8 diuisus relinquit 5, ideoque quadratum esse nequit, vnde penitus omitti debet formula B.

2^o. Statuamus $y = 4c - 1$, et formula erit:

$$C = 39993 + 128c - 400cc,$$

vbi

vbi
pior

cell
cor
me
ne;

v

c
i

vbi numerus 39993 per 8 diuisus relinquit 1, ideoque pro-
piori examini est subiiciendus.

Euolutio formulae

$$C = 39993 + 128c - 400.c.c.$$

§. II. Quoniam hic a numero absoluto 39993 suc-
cessiue subtrahi debent numeri in forma $400.c.c. \pm 128c$
contenti, in subsidium calculi, vt supra, subtrahendos nu-
meros cum differentiis, prouti c fuerit vel positium vel
negatiuum, in sequenti tabula apponamus:

c	$400.c.c. - 128c$	Diff.	c	$400.c.c. + 128c$	Diff.
0	0	272	0	0	528
1	272	1072	1	528	1328
2	1344	1872	2	1856	2128
3	3216		3	3984	

Vbi iterum differentiae continuo 800 crescunt.

§. 12. Subtrahamus ergo a numero absoluto 39993
continuo has differentias odigentis crescentes, qui calculus
ita se habebit:

39993 272	39993 528	30633 4272	29353 4528
39721 1072	39465 1328	26361 5072	24825 5328
38649 1872	38137 2128	21289 5872	19497 6128
36777 2672	36009 2928	15417 6672	13369 6928
34105 3472	33081 3728	8745 7472	6441
30633	29353	1273	

Hic igitur nullum plane quadratum occurrit.

Evolutio formulae.

$$A = 10000 - 9a - 25aa.$$

§. 13. Ponamus loco a numerum parem, qui adeo debeat esse pariter par, fitque idcirco $a = 4e$, ita ut facta divisione per 4 oriatur haec forma: $2500 - 9e - 100ee$. Hic igitur a numero absoluto successive subtrahi debent numeri in forma $100ee \pm 9e$ contenti, qui igitur in sequenti tabula, prouti e fuerit numerus vel positivus vel negativus, referuntur:

e	$1000e - e$	Diff.	$10900e + 9e$	Diff.
0	0	91	0	109
1	91	291	109	309
1	382	491	418	509
3	873		927	

Has igitur differentias ducentis crescentes a numero absoluto 2500 continuo subtrahamus, sequenti modo:

2500	2500
91	109
<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>
2409	2391
291	309
<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>
2118	2082
491	509
<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>
1627	1573
691	709
<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>
936	864
891	
<hr style="width: 80%; margin: 0;"/>	
45	

vbi igitur nulli occurrunt quadrati, praeter 2500, qui autem numerus ad quadratum notum 1000² perducit.

§. 9. Sit nunc a numerus impar, ac primo quidem formae $4f + 1$, vnde formula nostra euadit,

$$9966 - 236f - 4ff,$$

qui numerus cum sit impariter par, quadratum esse nequit. Statuamus ergo $a = 4f - 1$, et formula prodit

9984

$$9984 + 164f - 4ff,$$

ideoque pariter par; at per 4 diuisa ea abit in hanc:

$$2496 + 41f - 100ff.$$

Hic igitur a numero absoluto numeri in forma $100ff \pm 41f$ sunt subtrahendi, qui, prouti f fuerit numerus positius vel negatiuus, ita se habebunt:

f	$100ff - 41f$	Diff.	f	$100ff + 41f$	Diff.
0	0		0	0	
1	59	59	1	141	141
2	318	259	2	482	341
3	777	459	3	1023	541

Subtrahantur iam differentiae ducentis crescentes a numero absoluto:

2496	2496
59	141
2437	2355
259	341
2178	2014
459	541
1719	1473
659	741
1060	732
859	
201	

Quoniam igitur in toto hoc calculo nullum quadratum occurrit, certum est numerum propositum 1000081 vnico tantum

tum modo in duo quadrata resolui posse, ideoque certo esse numerum primum, qualis in tabula dissertationis memoratae exhibetur; atque hic imprimis memorabile est, quod tam facili calculo de hac veritate sumus certiores facti.

§. 15. Dolendum autem est, hanc methodum non ad omnes numeros explorandos adhiberi posse, sed restringi ad eos tantum numeros, qui non solum sint summae duorum quadratorum, sed qui definant insuper in 1 vel 9; quia de his tantum valet, quod alterum quadratum diuisibile sit per 5.

§. 16. Interim tamen hac methodo omnes plane numeri in forma $4n + 1$ contenti et siue in 1 siue in 9 definentes pari successu examinari possunt; quandoquidem nouimus, si tales numeri in duo quadrata resolui queant, alterum certo per 5 esse diuisibile. Tum autem, calculo secundum praecepta data instituto, si reperiatur, numerum propositum unico modo in duo quadrata resolui posse, id certum erit signum, illum esse primum: sin autem hoc duobus pluribusue modis fieri queat, inde eius factores assignare licebit, eo modo, quo supra vsi sumus. Quod si vero eueniat, vt numerus propositus nullo plane modo in duo quadrata diuidi queat, tum id etiam erit signum, talem numerum non esse primum, etiam si eius factores hinc definire non licet; tantum autem concludere licet, duos ad minimum factores habere primos formae $4n - 1$.