1797

Investigatio superficierum quarum normales ad datum planum productae sint omnes inter se aequales

Leonhard Euler

INVESTIGATIO SVPERFICIERVM QVARVM NORMALES AD DATVM PLANVM PRODVCTAE SINT OMNES INTER SE AEQVALES.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 Decemb. 1777.

§. 1.

Referat tabula planum, ad quod omnes normales funt producendae, et pro fuperficie quaefita conftituatur inter tres coordinatas $AX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, haec aequatio differentialis: $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, atque conftat, normalem ex fuperficie Z ad planum productam effe $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, quam ergo conftantem effe oportet. Sit igitur $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$, atque vt irrationalitas tollatur, ponatur $p = \text{tang.}\,\omega\,\text{fin.}\,\Phi$ et $q = \text{tang.}\,\omega\,\text{cof.}\,\Phi$; tum enim normalis ZN ita exprimetur: $z\sqrt{(1 + \text{tang.}\,\omega^2)} = \frac{z}{\text{cof.}\,\omega} = a$, ficque erit $z = a\,\text{cof.}\,\omega$, quo valore fubftituto aequatio illa differentialis hanc induet formam: Tab. I. Fig. 1.

$$-a\,\partial\omega\,\text{fin.}\,\omega = \partial x\,\text{tang.}\,\omega\,\text{fin.}\,\Phi + \partial y\,\text{tang.}\,\omega\,\text{cof.}\,\Phi,$$

ideoque erit

$$-a\,\partial\omega\,\text{cof.}\,\omega = \partial x\,\text{fin.}\,\Phi + \partial y\,\text{cof.}\,\Phi.$$

Sieque adepti sumus aequationem, ex qua valores x et y per angulos ϕ et ω definiri poterunt.

§. 2. Cum enim prima pars huius aequationis $- a\,\partial\omega\,\text{cos.}\,\omega$ sponte sit integrabilis, etiam alteram partem integrabilem reddi oportet. Per notam iam integralium reductionem integratio ita instituatur:

$$- a\,\text{sin.}\,\omega = x\,\text{sin.}\,\phi - \int x\,\partial\phi\,\text{cos.}\,\phi + y\,\text{cos.}\,\phi + \int y\,\partial\phi\,\text{sin.}\,\phi,$$

vnde habebimus

$$- a\,\text{sin.}\,\omega = x\,\text{sin.}\,\phi + y\,\text{cos.}\,\phi + \int\partial\phi\,(y\,\text{sin.}\,\phi - x\,\text{cos.}\,\phi),$$

vbi postremum membrum integrabile esse nequit, nisi sit $y\,\text{sin.}\,\phi - x\,\text{cos.}\,\phi$ functio solius anguli ϕ, quae sit Φ', vt inde fiat $\int\Phi'\,\partial\phi = \Phi$; quo facto aequatio integralis erit

$$- a\,\text{sin.}\,\omega = x\,\text{sin.}\,\phi + y\,\text{cos.}\,\phi + \Phi.$$

§. 3. Habemus igitur has duas aequationes:

$$\text{I. } y\,\text{sin.}\,\phi - x\,\text{cos.}\,\phi = \Phi'.$$

$$\text{II. } x\,\text{sin.}\,\phi + y\,\text{cos.}\,\phi = - a\,\text{sin.}\,\omega - \Phi,$$

ex quibus facile eliciuntur coordinatae x et y, quippe quae reperiuntur

$$x = - \Phi\,\text{sin.}\,\phi - \Phi'\,\text{cos.}\,\phi - a\,\text{sin.}\,\phi\,\text{sin.}\,\omega \text{ et}$$

$$y = \Phi'\,\text{sin.}\,\phi - \Phi\,\text{cos.}\,\phi - a\,\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\phi.$$

Praeterea vero erit tertia coordinata $z = a\,\text{cos.}\,\omega$; ita vt iam omnes tres coordinatae per binos angulos variabiles exprimantur, scil. ϕ et ω.

§. 4. Quo has formulas magis ad vsum accomodemus, ponamus $a\,\text{sin.}\,\omega = - v$ et $- \Phi\,\text{sin.}\,\phi - \Phi'\,\text{cos.}\,\phi = t$ et et $-\Phi \operatorname{cof.} \phi + \Phi' \operatorname{fin.} \phi = u$, vt obtineamus has formulas: $x = v \operatorname{fin.} \phi + t$ et $y = v \operatorname{cof.} \phi + u$. Nunc vero erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$. Hic autem obferuetur, ambas litteras t et u functiones effe folius anguli ϕ, inde autem colligimus

$$t \operatorname{fin.} \phi + u \operatorname{cof.} \phi = -\Phi;$$
$$u \operatorname{fin.} \phi - t \operatorname{cof.} \phi = +\Phi'.$$

§. 5. Nunc vero notetur litteras Φ et Φ' ita a fe inuicem pendere, vt fit $\partial \Phi = \Phi' \partial \phi$; prior autem formula differentiata praebet

$$\partial t \operatorname{fin} \phi + t \partial \phi \operatorname{cof.} \phi + \partial u \operatorname{cof.} \phi - u \partial \phi \operatorname{fin.} \phi = -\Phi' \partial \phi,$$

cui fi addatur altera aequatio in $\partial \phi$ ducta, orietur haec:

$$\partial t \operatorname{fin.} \phi + \partial u \operatorname{cof.} \phi = 0,$$

vnde colligitur $\operatorname{tang.} \phi = -\frac{\partial u}{\partial t}$.

§. 6. Hinc iam pro u functio quaecunque ipfius t accipi poteft. Concipi igitur poterit curua quaecunque C U per coordinatas $CT = t$ et $TU = u$ determinata, ad quam fi in U ducatur tangens U Θ, innotefcet angulus ad Θ, qui fit θ, eritque $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{tang.} \theta$, ideoque $\phi = -\theta$. Tum ergo erit $x = t - v \operatorname{fin.} \theta$ et $y = u + v \operatorname{cof.} \theta$. Iam in normali ducta et producta in V capiatur pro lubitu interuallum $UV = v$, indeque ad axem ducto perpendiculo V X euidens eft fore interuallum $CX = CT - US$, ideoque $= t - v \operatorname{fin.} \theta = x$. Simili modo erit recta $XV = TU + VS = u + v \operatorname{cof.} \theta = y$. Si ergo in V erigatur perpendiculum $VZ = z = \sqrt{(aa - vv)}$, punctum Z erit in fuperficie quaefita. Patet ergo fore rectam $UZ = a$. Confequenter fi centro U in plano verticali fuper recta U V defcribatur Tig. I. Fig. 2.

 cir-

circulus radio $UZ = a$, totus hic circulus erit in superficie quaesita; vnde intelligimus totam hanc superficiem semper esse cylindrum, cuius axis secundum datam curuam arbitrariam incuruatur, quemadmodum iam dudum a me et aliis est obseruatum. Hic autem imprimis ipsa Analysis eo perducens spectari meretur.

Alia Solutio.

§. 7. In aequatione pro superficie quaesita, quae erat $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, ponatur $p = \frac{r}{z}$ et $q = \frac{s}{z}$, vt prodeat aequatio huius formae: $z\,\partial z = r\,\partial x + s\,\partial y$; tum vero erit normalis ad superficiem

$$ZN = \sqrt{(zz + rr + ss)},$$

quae cum debeat esse constans $= a$, erit

$$zz = aa - rr - ss,$$

ideoque

$$z\,\partial z = -r\,\partial r - s\,\partial s,$$

vnde ergo fiet

$$0 = r\,\partial x + s\,\partial y + r\,\partial r + s\,\partial s,$$

siue

$$r(\partial x + \partial r) + s(\partial y + \partial s) = 0.$$

Iam ponatur porro $x + r = t$ et $y + s = u$, atque aequatio solutionem quaestionis continens erit $r\,\partial t + s\,\partial u = 0$.

Tab. I. Fig. 3. §. 8. Haec autem aequatio facillime construitur, describendo curuam quamcunque CU, coordinatis $CT = t$ et $TU = u$ determinatam. Si enim ad hanc curuam ex U ad axem ducatur normalis UP, voceturque angulus $CPU = \phi$, qui amplitudinem curuae metietur, siquidem axis CP ad

cur-

curuam fuerit normalis; tum erit tang. $\Phi = \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi}$. Cum nunc ex aequatione inuenta fit $\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{s}{r}$, ftatui debebit $\frac{s}{r} = -\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{cof.}\,\Phi}$; quamobrem fiat $r = v\,\text{cof.}\,\Phi$ et $s = -v\,\text{fin.}\,\Phi$, hocque modo aequationi inuentae erit fatisfactum, quaecunque etiam quantitas variabilis pro v accipiatur.

§. 9. Hinc igitur cum fit $x = t - r$ et $y = u - s$, erit $x = t - v\,\text{cof.}\,\Phi$ et $y = u + v\,\text{fin.}\,\Phi$; tertia vero coordinata tum erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$. Quocirca fi in normali producta PU capiatur interuallum $UY = v$ et ex Y ad axem perpendiculum demittatur YX, erit

$$CX = CT - TX = t - v\,\text{cof.}\,\Phi,$$
$$XY = TU + SY = u + v\,\text{fin.}\,\Phi,$$

ficque erit, vt in praecedente conftructione, $CX = x$ et $XY = y$. Praeterea vero fi in Y perpendiculariter erigatur $YZ = z$, erit recta $YZ = \sqrt{(aa - vv)}$ et $UZ = a$; vnde patet, fuperficiem quaefitam defcribi, fi centrum circuli, radio a defcripti, fecundum curuam CU ita promoueatur, vt planum circuli perpetuo ad curuam CU fit normale. Hoc enim modo peripheria circuli ipfam fuperficiem quam quaerimus defcribet.

§. 10. Ex hac facillima conftructione patet, curvam CU penitus arbitrio noftro relinqui, neque adeo opus effe, vt eius natura certa aequatione inter t et u exprimatur; fed eam pro lubitu duci atque adeo ex partibus diuerfiffimis componi poffe. Haec fcilicet curua CU functionem illam arbitrariam inuoluit, quam huiusmodi problemata, quae circa functiones duarum variabilium verfantur,

 per

per integrationem recipere debent, loco conſtantis, quae in integrationibus ordinariis introduci ſolet.

§. 11. Ceterum, quia huiusmodi ſuperficies per motum continuum circuli generantur, dum directio motus perpetuo ad planum circuli eſt normalis, hic regula *Guldini* notiſſima in vſum vocari poteſt, ſi quidem velimus tam ipſam ſuperficiem genitam quam ſolidi ea incluſi quantitatem definire. Scilicet tota ſuperficies ſolidi hoc modo geneti ſecundum hanc regulam reperitur, ſi peripheria circuli, quae eſt $= 2\pi a$, multiplicetur per viam a centro grauitatis circuli deſcriptam, quae cum ſit longitudo curuae CU, ſuperficies iſtius ſolidi erit $= 2\pi a . CU$; ipſa autem eius ſoliditas reperietur, ſi area iſtius circuli, quae eſt πaa per eandem viam centri grauitatis, ſiue arcum CU multiplicetur, ita vt ſoliditas haec futura ſit $\pi aa . CU$.

VA-