



1797

De casibus quibus hanc formulam  $x^4 + kxxyy + y^4$   
ad quadratum reducere licet

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De casibus quibus hanc formulam  $x^4 + kxxyy + y^4$  ad quadratum reducere licet" (1797). *Euler Archive - All Works*. 696.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/696>

DE  
CASIBVS

QVIBVS HANC FORMVLAM

$$x^4 + k x x y y + y^4$$

AD QVADRATVM REDVCERE LICET.

Audore

L. EVLERO.

---

Conuentui exhib. die 28 April. 1777.

---

§. I.

Super hac formula primum obseruo, inde omnes casus excludi debere, quibus numerorum  $x$  et  $y$  altervter efflet  $= 0$ , quoniam tum haec formula sponte euaderet quadratum, quicumque numeri loco  $k$  acciperentur. Secundo porro obseruo, si sumeretur vel  $k = 0$  vel  $k = -$ , formulam iam sponte esse quadratum, quicumque numeri pro  $x$  et  $y$  statuerentur. Tertio vero obseruari conuenit, omnia quadrata negativa loco  $k$  assumta nulla difficultate laborare. Si enim ponatur  $k = -nn$ , formula euadet  $x^4 - nn x x y y + y^4$ , quae ergo in quadratum abit, sumendo vel  $x = ny$ , vel  $y = nx$ , sicque pro littera  $k$  vltro se offerunt casus  $k = +2$  et  $k = -nn$ ; vnde quaestio in hoc versa'ur, vt omnes reliqui valores pro  $k$  inuestigentur, quibus reductio formulae propositae ad quadratum locum habere queat.

D 2

§. 2.

§. 2. Cum igitur postulentur omnes numeri integri pro  $k$  accipiendi, quibus formula reductionem ad quadratum admittit, methodus *Diophantea* varios modos suppeditat id praestandi. Verum quacunq; utamur methodo, semper aliquod dubium relinquitur, an inde omnes plane valores idonei obtineantur; etiam si facile sit innumerabiles valores idoneos exhibere, ut hoc modo omnes numeri inepti cognosci queant, cuiusmodi sunt  $k = 1$ , vel  $k = 3$ , vel  $k = 4$ , vel  $k = 5$ , vel  $k = 6$ , etc. pro quibus iam solide demonstratum est, reductionem ad quadratum nullo modo locum habere posse.

§. 3. Quod si enim quadrati, cui formula nostra aequari debet, radix statuatur  $= xx + \frac{pyy}{q}$ , prodit  $k = \frac{2p}{q} + \frac{pp}{qq} \cdot \frac{yy}{xx} - \frac{yy}{xx}$ , qui valor ut fiat integer, primo patet pro  $q$  sumi debere diuisorem ipsius  $yy$ , id quod eo pluribus modis fieri potest, quo plures factores numerus  $y$  inuoluit; unde iam patet istam methodum nimis esse vagam, quam ut omnes plane casus in genere exhiberi queant. Si igitur huic conditioni satisfecerimus, ut sit  $yy = aq$ , aequatio inuenta dabit  $kxx = \frac{2pxx + app}{q} - aq$ . Requiritur igitur porro ut formula  $2pxx + app$ , siue  $2xx + ap$ , diuisionem per  $q$  admittat, quod si fuerit effectum, et  $Q$  sit valor huic fractioni aequalis, insuper, cum iam sit  $k = \frac{2 - aq}{xx}$ , effici debet, ut quantitas  $Q - aq$  euadat diuisibilis per  $xx$ . Ex quo iam satis intelligitur, hac methodo perfectam enumerationem omnium valorum idoneorum ipsius  $k$  sperari non posse.

§. 4. Idem defectus se exerit, quando radicem quadratam formulae propositae statuimus  $xx + \frac{p}{q}xy \pm yy$ , tum enim facta euolutione reperitur

$$kxy$$

qua  
hinc  
ingr  
lore

in  
nat  
lor  
P -  
est,  
int  
qu  
abi  
 $x^4$   
tu  
po  
tis  
sec

q  
n  
n  
r

$$k x y = \frac{2p}{q} (x x \pm y y) \pm 2 x y + \frac{pp}{qq} x y, \text{ siue}$$

$$k = \frac{2p}{q} \cdot \frac{x x \pm y y}{x y} \pm 2 + \frac{pp}{qq},$$

quae forma etiamfi facile ad numeros integros reuocatur, hincque infiniti numeri idonei erui possunt, tamen pariter ingens relinquitur dubium, num hoc modo omnes plane valores idonei, nullo praetermissio, obtineri queant.

§. 5. Nuper autem, cum haec perpendiffem, incidi in methodum prorsus singularem, quae primo intuitu adeo naturae quaeestionis aduersari videtur. Considero enim valorem litterae  $k$  quasi effet formula irrationalis, in binomio  $P + \sqrt{Q}$  contenta, ita vt fit  $k = P + \sqrt{Q}$ . Euidens enim est, postquam in genere omnes valores pro  $P$  et  $Q$  fuerint inuenti, id insuper effici debere, vt  $Q$  reddatur numerus quadratus; hoc autem valore substituto formula proposita abibit pariter in tale binomium, cuius pars rationalis erit  $x^4 + P x x y y + y^4$ , irrationalis vero  $x x y y \sqrt{Q}$ , quod igitur quadratum effici debet. Constat autem hoc fieri non posse, nisi quadratum partis rationalis, ablato quadrato partis irrationalis, fiat quadratum; hinc autem peruenitur ad sequentem formam:

$$x^8 + 2 P x^6 y y + 2 x^4 y^4 + 2 P x x y^6 + y^8 \\ + P P \\ - Q$$

§. 6. Cum iam haec forma in genere debeat esse quadratum, quicumque numeri pro  $x$  et  $y$  accipiantur, manifestum est eius radicem aliam formam habere non posse, nisi vel  $x^4 + P x x y y + y^4$  vel  $x^4 + P x x y y - y^4$ . At vero prior hic locum habere nequit; perduceret enim ad  $Q=0$ ;

vnde adhibeamus alteram formam, cuius quadratum est

$$x^8 + 2 P x^3 y y - 2 x^4 y^4 - 2 P x x y^6 + y^8, \\ + P P$$

cui si formula inuenta aequalis statuatur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$4 x^4 y^4 - Q x^4 y^4 + 4 P x x y^6 = 0,$$

quae per  $x x y^4$  diuisa praebet:

$$4 P y y - Q x x + 4 x x = 0,$$

cui vt satisfiat, statuatur  $P = f x x$ ; hincque sponte se prodit  $Q = 4 f y y + 4$ , vbi id commodi sumus affecti, vt nullae amplius fractiones sint abigendae.

§. 7. Quoniam igitur inuenimus  $P = f x x$  et  $Q = 4 f y y + 4$ , binomium pro numero  $k$  accipiendum fiet  $k = f x x + 2 \sqrt{f y y + 1}$ , nihilque iam amplius superest, nisi vt formula  $f y y + 1$  reddatur quadratum, quae cum sit ipsa formula *Pelliana*, euidentis est, hoc infinitis modis praestari posse, dum pro  $f$  pro lubitu omnes numeros positiuos assumere licet, exceptis solis numeris quadratis; quamobrem huc transferri poterunt, quae circa hanc formulam iam olim sum commentatus, vbi pro singulis valoribus  $f$  vsque ad 100 valores requisitos ipsius  $y$  in tabula sum complexus:

f.

<i>f</i>	<i>y</i>	<i>f</i>	<i>y</i>	<i>f</i>	<i>y</i>
2	2	37	12	69	936
3	1	38	6	70	30
5	4	39	4	71	413
6	2	40	3	72	2
7	3	41	320	73	267000
8	1	42	2	74	430
10	6	43	531	75	3
11	3	44	30	76	6630
12	2	45	24	77	40
13	180	46	3588	78	6
14	4	47	7	79	9
15	1	48	1	80	1
17	8	50	14	82	18
18	4	51	7	83	9
19	39	52	90	84	6
20	2	53	9100	85	30996
21	12	54	66	86	1122
22	42	55	12	87	3
23	5	56	2	88	21
24	1	57	20	89	53000
26	10	58	2574	90	2
27	5	59	69	91	165
28	24	60	4	92	120
29	1820	61	226153980	93	1260
30	2	62	8	94	221064
31	273	63	1	95	4
32	3	65	16	96	5
33	4	66	8	97	6377352
34	6	67	5967	98	10
35	1	68	4	99	1

S. S.

§. 8. Quin etiam, si loco  $k$  istum valorem substituiamus, deprehendemus, formulam nostram propositam revera fieri quadratum. Prodit enim

$$x^4 + f x^2 y y + y^4 + 2 x x y y \sqrt{(f y y + 1)},$$

quae manifesto est quadratum huius formae:

$$y y + x x \sqrt{(f y y + 1)}$$

quemadmodum periculum facienti mox patebit. Ex quo intelligimus, etiam pro omnibus valoribus idoneis litterae  $k$  statim radicem quadratam ipsius formulae propositae assignari posse. Ita si fuerit  $f=2$  et  $y=2$ , hinc fit  $k=2xx+6$ , ex quo valore formula euadit

$$9x^4 + 24xx + 16 = (3xx + 4)^2.$$

§. 9. Contemplemur iam accuratius formulam pro  $k$  inuentam  $k = f x x + 2 \sqrt{(f y y + 1)}$ , vbi per se manifestum est, membrum posterius radicale tam positue quam negatiue accipi posse, ita vt fit  $k = f x x \pm 2 \sqrt{(f y y + 1)}$ ; quare si primo sumamus  $x=1$  et  $y=1$ , erit  $k = f \pm 2 \sqrt{(f+1)}$ . Iam vt haec formula reddatur rationalis, ponatur  $f+1=nn$ , ideoque  $f=nn-1$ , eritque,

$$k = n n \pm 2 n - 1 = (n \pm 1)^2 - 2.$$

Sicque pro  $k$  iam habentur omnes numeri quadrati binario minuti, vnde vsque ad centum pro  $k$  sumi poterunt sequentes valores:

$$2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98.$$

§. 10. Maneat  $y=1$ , at  $x$  relinquatur indefinitum, sumtoque  $f=nn-1$  prodibit ista formula:

$$k = (n n - 1) x x \pm 2 n,$$

quae

quae iam infinitam multitudinem valorum idoneorum pro  $k$  suppeditat. Vbi imprimis notasse iuuabit, nihil impedire, quominus pro  $x$  fractiones accipiantur, dummodo valor ipsius  $k$  prodeat numerus integer, quandoquidem sola ratio inter  $x$  et  $y$  est spectanda; vnde si prodierit  $x = \frac{p}{q}$ , quoniam summus  $y = 1$ , sumi debet  $x : y = p : q$ .

§. II. Percurramus igitur casus simpliciores numeri  $n$ ; ac si eueniat vt  $nn - 1$  habeat factorem quadratum, puta  $nn - 1 = maa$ , statui poterit  $x = \frac{z}{a}$ , fietque hinc  $k = mzz \pm 2n$ , tum vero erit  $x : y = z : a$ , hincque nata est sequens tabula:



$n$	$k$	$x : y$	$n$	$k$	$x : y$
2	3 z z ± 4	z : 1	28	87 z z ± 56	z : 3
3	2 z z ± 6	z : 2	31	15 z z ± 62	z : 8
4	15 z z ± 8	z : 1	33	17 z z ± 66	z : 8
5	6 z z ± 10	z : 2	35	34 z z ± 70	z : 6
6	35 z z ± 12	z : 1	37	38 z z ± 74	z : 6
7	3 z z ± 14	z : 4	39	95 z z ± 78	z : 4
8	7 z z ± 16	z : 3	48	47 z z ± 96	z : 7
9	5 z z ± 18	z : 4	49	6 z z ± 98	z : 20
10	11 z z ± 20	z : 3	50	51 z z ± 100	z : 7
11	30 z z ± 22	z : 2	51	26 z z ± 102	z : 10
13	42 z z ± 26	z : 2	53	78 z z ± 106	z : 6
15	14 z z ± 30	z : 4	55	21 z z ± 110	z : 12
17	2 z z ± 34	z : 12	63	62 z z ± 126	z : 8
19	10 z z ± 38	z : 12	65	66 z z ± 130	z : 8
23	33 z z ± 46	z : 4	71	35 z z ± 142	z : 12
24	23 z z ± 48	z : 5	73	37 z z ± 146	z : 12
25	39 z z ± 50	z : 4	80	79 z z ± 160	z : 9
26	3 z z ± 52	z : 15	82	83 z z ± 164	z : 9
			97	3 z z ± 194	z : 56
			99	2 z z ± 198	z : 70

§. 12. Haecenus scilicet pro  $f$  solos numeros integros admisimus; verum etiam fracti admitti possunt, dummodo pro  $k$  numeri integri resultent. Quod si enim in genere statuamus  $x = 2v$ , fiet  $k = 4fvv + \sqrt{4fyv + 4}$ , vbi evidens est sufficere dummodo  $4f$  fuerit numerus integer. Ponatur ergo  $4f = g$ , eritque  $k = gvv + \sqrt{gyv + 4}$ ; vbi quia pro  $x$  sumimus numerum parem, intelligitur hic pro

pro  $y$  tantum numeros impares accipi debere, quia alioquin in casus praecedentes reuenteremur.

§. 13. Iam in hac formula statuamus  $y = 1$ , ut fit  $k = gvv \pm \sqrt{(g+4)}$ , et nunc ut  $g+4$  euadat quadratum, primo omnium sumi poterit  $g = -3$ , unde oritur  $k = -3vv \pm 1$ ; vbi cum fit  $x = 2v$ , erit  $x:y = 2v:1$ , ex qua formula meri numeri negatiui pro  $k$  resultant, qui vsque ad centum erunt:

-2, -4, -11, -13, -26, -28, -47, -49, -74, -76,

ad quos insuper, uti initio inuimus, quadrata negatiua accedunt, scilicet:

-1, -4, -9, -16, -25, -36, -49, -64,  
-81, -100.

§. 14. Pro reliquis valoribus ipsius  $g$  statuamus  $g+4 = nn$ , fietque  $k = (nn-4)vv \pm n$ . Hic ergo, ut supra, si euadat  $nn-4 = maa$  et loco  $av$  scribatur  $z$ , erit  $k = mzz \pm n$ ; vbi cum fit  $v = \frac{z}{2}$ , erit  $z = \frac{ax}{2}$ , ideoque  $x = \frac{2z}{a}$ , hincque ratio inter  $x$  et  $y$  erit  $x:y = 2z:a$ .

§. 15. In hac autem formula sufficet pro  $n$  numeros tantum impares sumisse, quandoquidem ex paribus praecedentes formulae redirent. Hoc notato sequentes formulae speciales pro  $k$  obtinentur:

$n$	$k$	$x : y$
1	$3z \pm 1$	$2z : 1$
3	$5z \pm 3$	$2z : 1$
5	$21z \pm 5$	$2z : 1$
7	$5z \pm 7$	$2z : 3$
9	$77z \pm 9$	$2z : 1$
11	$13z \pm 11$	$2z : 3$
23	$21z \pm 23$	$2z : 5$
25	$69z \pm 25$	$2z : 3$
27	$29z \pm 27$	$2z : 5$
29	$93z \pm 29$	$2z : 3$
47	$5z \pm 47$	$2z : 21$
51	$53z \pm 51$	$2z : 7$
79	$77z \pm 79$	$2z : 9$
83	$85z \pm 83$	$2z : 9$
119	$13z \pm 119$	$2z : 33$
123	$5z \pm 123$	$2z : 55$

§. 16. Ex his iam formulis haud difficulter omnes valores numeri  $k$ , vsque ad 100, computari possunt, qui cum sponte distinguantur in positivos et negativos, utrosque seorsim in tabulis subiunctis referamus, et cuilibet valori adiungamus rationes inter  $x$  et  $y$ , vnde hi numeri producuntur.

Tabula

Tabula prior  
exhibens omnes valores positivos ipsius  $k$   
centenario minores.

$k$	Rationes.		$k$	Rationes.
2	Omnes	7	57	$\frac{10}{55}$
7			61	5
8			62	4
12			63	4
13			64	3, $\frac{7}{12}$ , $\frac{2}{15}$
14			66	3
16	$\frac{5}{12}$		67	4
17			68	4
23	$\frac{3}{4}$ , $\frac{1}{4}$		71	5
24			73	3
26			77	3
27			78	3, $\frac{1}{6}$ , $\frac{10}{21}$
31			79	5, $\frac{1}{4}$
33			83	4
34			84	3
36			86	4
38			87	4
41			89	5, $\frac{1}{4}$ , $\frac{8}{33}$
42			90	4, $\frac{1}{5}$
44	$\frac{5}{2}$ , $\frac{3}{5}$ , $\frac{11}{70}$		92	6
47		94	3	
48	$\frac{6}{1}$	95	3, $\frac{1}{15}$	
49		96	4	
52	$\frac{4}{1}$ , $\frac{3}{3}$	98	4	
55	$\frac{1}{15}$	100	$\frac{4}{15}$	
56	$\frac{5}{2}$			

Tabula posterior  
exhibens omnes valores negativos ipsius  $k$   
centenario minores.

$k$	Rationes.		$k$	Rationes.
1	$\frac{1}{1}$		43	$\frac{8}{55}$
2	Omnes		44	$\frac{3}{20}$
4	$\frac{2}{3}, \frac{4}{15}$		47	$\frac{1}{8}$
9	$\frac{3}{4}, \frac{1}{5}$		49	$\frac{7}{15}, \frac{1}{8}$
11	$\frac{4}{5}, \frac{1}{6}$		64	$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$
13	$\frac{4}{5}, \frac{1}{6}$		67	$\frac{4}{33}$
16	$\frac{4}{5}, \frac{1}{6}$		70	$\frac{4}{33}, \frac{1}{10}$
25	$\frac{5}{6}, \frac{1}{7}$		74	$\frac{5}{35}, \frac{1}{10}$
26	$\frac{6}{7}, \frac{1}{8}$		76	$\frac{6}{42}, \frac{1}{10}$
27	$\frac{4}{5}, \frac{1}{6}$		78	$\frac{6}{55}, \frac{1}{10}$
28	$\frac{7}{8}, \frac{1}{6}$		81	$\frac{7}{55}, \frac{1}{10}$
32	$\frac{8}{9}, \frac{1}{7}$		86	$\frac{8}{63}, \frac{1}{10}$
36	$\frac{9}{10}, \frac{1}{7}$		89	$\frac{9}{77}, \frac{1}{10}$
40	$\frac{10}{11}, \frac{1}{8}$		92	$\frac{10}{99}, \frac{1}{10}$
42	$\frac{12}{13}, \frac{1}{8}$		100	$\frac{10}{10}, \frac{1}{10}$

§. 17. Quemadmodum in nostris formulis pro  $k$  inventis, quae sunt

$$k = (nn - 1)xx \pm 2n \text{ et } k = (nn + 4)vv \pm n,$$

loco  $x$  et  $y$  numeros fractos admisimus, ita etiam pro  $n$  fractiones admitti poterunt, dummodo ita fuerint comparatae, vt inde valores integri pro  $k$  reperiantur, quo obseruato investigatio harum formularum multo facilius infitui poterit. Sumto enim  $y = 1$ , vt formula  $x^2 + kxx + 1$  quadratum effici debeat, quaecunque eius fuerit radix, eam semper  
sub

sub  
 tem  
 la  
 dit  
 tio  
  
 lim  
 hoc  
 rat  
 op  
 vt  
 pe  
  
 ho  
 eri  
  
 Hi  
 ex  
 tu  
 tu  
 ril  
  
 d  
 k  
 a  
 n

sub hac formula:  $f x x \pm 1$  comprehendere licebit. Hinc autem statim prodit  $k = (f f - 1) x x \pm 2 f$ , quae erat formula nostra prior, in qua si statuatur  $x = 2 v$  et  $2 f = g$ , prodit altera formula  $k = (g g - 4) v v \pm g$ , cui respondet ratio  $\frac{x}{y} = \frac{2v}{1}$ .

§. 18. Quod si iam loco  $g$  fractiones introducere velimus, facile patet statui debere  $g = \frac{a}{b}$ , ac praeterea  $v = b z$ : hoc enim modo prodibit  $k = \frac{(a a - 4 b^4)}{b b} z z \pm \frac{a}{b}$ , cui respondet ratio  $\frac{2 z}{1}$ , atque hic pro  $a$  et  $b$  eiusmodi numeros accipi oportet, ut pro  $k$  prodeant numeri integri. Requiritur ergo ut numerus  $a a z z \pm a$ , hoc est ut  $a z z \pm 1$  diuisionem per  $b b$  admittat, tum enim erit

$$k = a \cdot \frac{a z z \pm 1}{b b} - 4 b b z z;$$

hocque adeo in genere praestari potest, ponendo  $a = b^4 + 1$ , erit enim

$$k = \frac{(b^4 - 1) z z \pm 1}{b b} + \frac{b^4 + 1}{b b}.$$

Hic iam ponatur  $z = \frac{t}{b^4 - 1}$ , ut habeatur  $k = \frac{t t \pm b^4 + 1}{b b}$ , vbi ergo  $t t \pm 1$  per  $b b$  diuisibile reddi debet, vnde prodit  $k = \frac{t t \pm 1}{b b} \pm b b$ . Quomocunque autem haec formula euoluatur, omnes numeri in ea contenti iam in formulis superioribus contineri videntur.

§. 19. Hinc igitur patet, in Analyfi adhuc desiderari methodum certam, cuius ope omnes valores ipsius  $k$  assignari atque adeo quousque libuerit continuari queant. Quin etiam ex formula fracta fortasse eiusmodi numeri erui posse videntur, qui in formulis integris supra exhibi-

hibitis non contineantur; veluti se mihi obtulit iste numerus  $k = 131$ , quem primo intuitu ex formulis supra datis derivari posse non videbatur, cum tamen in formula  $(n^2 - 4)zz + n$  contineatur, si posito  $z = 6$  pro  $n$  vel fractio  $\frac{11}{4}$  vel  $\frac{25}{9}$  sumatur. Postea vero deprehendi hunc ipsum numerum ex formula  $k = 21zz + 110$  oriri; num autem hoc semper eueniat, etiamnunc dubitare licet, unde perfecta solutio etiamnunc plane vires Analyticos superare videtur. Quaestio igitur ista maximi momenti sequenti modo proponi potest:

*Inuenire methodum, cuius ope omnes numeri integri assignari queant, qui ex formula  $(n^2 - 4)zz + n$  resultare possint, si loco litterarum  $n$  et  $z$  non solum numeri integri sed etiam fracti accipiantur.*

Huius autem quaestionis enodatio certe insignia incrementa in Analyfin Diophanteam effert illatura.