1797

De casubus quibus hanc formulam $x^4 + kxxyy + y^4$ ad quadratum reducere licet

Leonhard Euler

DE
CASIBVS
QVIBVS HANC FORMVLAM
$x^4 + kxxyy + y^4$
AD QVADRATVM REDVCERE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 28 April. 1777.

§. 1.

Super hac formula primum obseruo, inde omnes casus excludi debere, quibus numerorum x et y alteruter esset $= 0$, quoniam tum haec formula sponte euaderet quadratum, quicunque numeri loco k acciperentur. Secundo porro obseruo, si sumeretur vel $k = 2$ vel $k = -2$, formulam iam sponte esse quadratum, quicunque numeri pro x et y statuerentur. Tertio vero obseruari conuenit, omnia quadrata negatiua loco k assumta nulla difficultate laborare. Si enim ponatur $k = -nn$, formula euadet $x^4 - nnxxyy + y^4$, quae ergo in quadratum abit, sumendo vel $x = ny$, vel $y = nx$, sicque pro littera k vltro se offerunt casus $k = \pm 2$ et $k = -nn$; vnde quaestio in hoc versatur, vt omnes reliqui valores pro k inuestigentur, quibus reductio formulae propositae ad quadratum locum habere queat.

§. 2. Cum igitur postulentur omnes numeri integri pro k accipiendi, quibus formula reductionem ad quadratum admittit, methodus *Diophantea* varios modos suppeditat id praestandi. Verum quacunque vtamur methodo, semper aliquod dubium relinquitur, an inde omnes plane valores idonei obtineantur; etiamsi facile sit innumerabiles valores idoneos exhibere, vt hoc modo omnes numeri inepti cognosci queant, cuiusmodi sunt $k = 1$, vel $k = 3$, vel $k = 4$, vel $k = 5$, vel $k = 6$, etc. pro quibus iam solide demonstratum est, reductionem ad quadratum nullo modo locum habere posse.

§. 3. Quod si enim quadrati, cui formula nostra aequari debet, radix statuatur $= xx + \frac{pyy}{q}$, prodit $k = \frac{2p}{q} + \frac{pp}{qq} \cdot \frac{yy}{xx} - \frac{yy}{xx}$, qui valor vt fiat integer, primo patet pro q sumi debere diuisorem ipsius yy, id quod eo pluribus modis fieri potest, quo plures factores numerus y inuoluit; vnde iam patet istam methodum nimis esse vagam, quam vt omnes plane casus in genere exhiberi queant. Si igitur huic conditioni satisfecerimus, vt sit $yy = aq$, aequatio inuenta dabit $kxx = \frac{2pxx + app}{q} - aq$. Requiritur igitur porro vt formula $2pxx + app$, siue $2xx + ap$, diuisionem per q admittat, quod si fuerit effectum, et Q sit valor huic fractioni aequalis, insuper, cum iam sit $k = \frac{Q - aq}{xx}$, effici debet, vt quantitas $Q - aq$ euadat diuisibilis per xx. Ex quo iam satis intelligitur, hac methodo perfectam enumerationem omnium valorum idoneorum ipsius k sperari non posse.

§. 4. Idem defectus se exerit, quando radicem quadratam formulae propositae statuimus $xx + \frac{p}{q}xy \pm yy$, tum enim facta euolutione reperitur

kxy

$$k\,x\,y = \frac{2p}{q}(x\,x \pm y\,y) \pm 2\,x\,y + \frac{pp}{qq}\,x\,y, \text{ siue}$$

$$k = \frac{2p}{q} \cdot \frac{x\,x \pm y\,y}{x\,y} \pm 2 + \frac{pp}{qq},$$

quae forma etiamsi facile ad numeros integros reuocatur, hincque infiniti numeri idonei erui possunt, tamen pariter ingens relinquitur dubium, num hoc modo omnes plane valores idonei, nullo praetermisso, obtineri queant.

§. 5. Nuper autem, cum haec perpendissem, incidi in methodum prorsus singularem, quae primo intuitu adeo naturae quaestionis aduersari videtur. Considero enim valorem litterae k quasi esset formula irrationalis, in binomio $P + \sqrt{Q}$ contenta, ita vt sit $k = P + \sqrt{Q}$. Euidens enim est, postquam in genere omnes valores pro P et Q fuerint inuenti, id insuper effici debere, vt Q reddatur numerus quadratus; hoc autem valore substituto formula proposita abibit pariter in tale binomium, cuius pars rationalis erit $x^4 + P\,x\,x\,y\,y + y^4$, irrationalis vero $x\,x\,y\,y\sqrt{Q}$, quod igitur quadratum effici debet. Constat autem hoc fieri non posse, nisi quadratum partis rationalis, ablato quadrato partis irrationalis, fiat quadratum; hinc autem peruenitur ad sequentem formam:

$$x^8 + 2\,P\,x^6\,y\,y + \begin{matrix} 2 \\ +PP \\ -Q \end{matrix}\, x^4\,y^4 + 2\,P\,x\,x\,y^6 + y^8$$

§. 6. Cum iam haec forma in genere debeat esse quadratum, quicunque numeri pro x et y accipiantur, manifestum est eius radicem aliam formam habere non posse, nisi vel $x^4 + P\,x\,x\,y\,y + y^4$ vel $x^4 + P\,x\,x\,y\,y - y^4$. At vero prior hic locum habere nequit; perduceret enim ad $Q = 0$;

 vn-

vnde adhibeamus alteram formam, cuius quadratum eſt

$$x^8 + 2Px^6yy \overset{}{\underset{+PP}{-2}} x^4y^4 - 2Pxxy^6 + y^8,$$

cui ſi formula inuenta aequalis ſtatuatur, peruenitur ad hanc aequationem:

$$4x^4y^4 - Qx^4y^4 + 4Pxxy^6 = 0,$$

quae per xxy^4 diuiſa praebet:

$$4Pyy - Qxx + 4xx = 0,$$

cui vt ſatisfiat, ſtatuatur $P = fxx$, hincque ſponte ſe prodit $Q = 4fyy + 4$, vbi id commodi ſumus aſſecuti, vt nullae amplius fractiones ſint abigendae.

§. 7. Quoniam igitur inuenimus $P = fxx$ et $Q = 4fyy + 4$, binomium pro numero k accipiendum fiet $k = fxx + 2\sqrt{(fyy + 1)}$, nihilque iam amplius ſupereſt, niſi vt formula $fyy + 1$ reddatur quadratum, quae cum ſit ipſa formula *Pelliana*, euidens eſt, hoc infinitis modis praeſtari poſſe, dum pro f pro lubitu omnes numeros poſitiuos aſſumere licet, exceptis ſolis numeris quadratis; quamobrem huc transferri poterunt, quae circa hanc formulam iam olim ſum commentatus, vbi pro ſingulis valoribus f vsque ad 100 valores requiſitos ipſius y in tabula ſum complexus:

f.

f	y	f	y	f	y
2	2	37	12	69	936
3	1	38	6	70	30
5	4	39	4	71	413
6	2	40	3	72	2
7	3	41	320	73	267000
8	1	42	2	74	430
10	6	43	531	75	3
11	3	44	30	76	6630
12	2	45	24	77	40
13	180	46	3588	78	6
14	4	47	7	79	9
15	1	48	1	80	1
17	8	50	14	82	18
18	4	51	17	83	9
19	39	52	90	84	6
20	2	53	9100	85	30996
21	12	54	66	86	1122
22	42	55	12	87	3
23	5	56	2	88	21
24	1	57	20	89	53000
26	10	58	2574	90	2
27	5	59	69	91	165
28	24	60	4	92	120
29	1820	61	226153980	93	1260
30	2	62	8	94	221064
31	273	63	1	95	4
32	3	65	16	96	5
33	4	66	8	97	6377352
34	6	67	5967	98	10
35	1	68	4	99	1

§. 8.

§. 8. Quin etiam, si loco k istum valorem substituamus, deprehendemus, formulam nostram propositam revera fieri quadratum. Prodit enim

$$x^4 + f x^4 y y + y^4 + 2 x x y y \surd (f y y + 1),$$

quae manifesto est quadratum huius formae:

$$y y + x x \surd (f y y + 1)$$

quemadmodum periculum facienti mox patebit. Ex quo intelligimus, etiam pro omnibus valoribus idoneis litterae k statim radicem quadratam ipsius formulae propositae assignari posse. Ita si fuerit $f = 2$ et $y = 2$, hinc fit $k = 2 x x + 6$, ex quo valore formula euadit

$$9 x^4 + 24 x x + 16 = (3 x x + 4)^2.$$

§. 9. Contemplemur iam accuratius formulam pro k inuentam $k = f x x + 2 \surd (f y y + 1)$, vbi per se manifestum est, membrum posterius radicale tam positiue quam negatiue accipi posse, ita vt sit $k = f x x \pm 2 \surd (f y y + 1)$; quare si primo sumamus $x = 1$ et $y = 1$, erit $k = f \pm 2 \surd (f + 1)$. Iam vt haec formula reddatur rationalis, ponatur $f + 1 = nn$, ideoque $f = n n - 1$, eritque,

$$k = n n \pm 2 n - 1 = (n \pm 1)^2 - 2.$$

Sicque pro k iam habentur omnes numeri quadrati binario minuti, vnde vsque ad centum pro k sumi poterunt sequentes valores:

2, 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98.

§. 10. Maneat $y = 1$, at x relinquatur indefinitum, sumtoque $f = n n - 1$ prodibit ista formula:

$$k = (n n - 1) x x \pm 2 n,$$

quae

quae iam infinitam multitudinem valorum idoneorum pro k ſuppeditat. Vbi imprimis notaſſe iuuabit, nihil impedire, quominus pro x fractiones accipiantur, dummodo valor ipſius k prodeat numerus integer, quandoquidem ſola ratio inter x et y eſt ſpectanda; vnde ſi prodierit $x = \frac{p}{q}$, quoniam ſumſimus $y = 1$, ſumi debebit $x : y = p : q$.

§. 11. Percurramus igitur caſus ſimpliciores numeri n; ac ſi eueniat vt $nn - 1$ habeat factorem quadratum, puta $nn - 1 = maa$, ſtatui poterit $x = \frac{z}{a}$, fietque hinc $k = mzz \pm 2n$, tum vero erit $x : y = z : a$, hincque nata eſt ſequens tabula:

n	k	$x : y$	n	k	$x : y$
2	$3zz \pm 4$	$z : 1$	28	$87zz \pm 56$	$z : 3$
3	$2zz \pm 6$	$z : 2$	31	$15zz \pm 62$	$z : 8$
4	$15zz \pm 8$	$z : 1$	33	$17zz \pm 66$	$z : 8$
5	$6zz \pm 10$	$z : 2$	35	$34zz \pm 70$	$z : 6$
6	$35zz \pm 12$	$z : 1$	37	$38zz \pm 74$	$z : 6$
7	$3zz \pm 14$	$z : 4$	39	$95zz \pm 78$	$z : 4$
8	$7zz \pm 16$	$z : 3$	48	$47zz \pm 96$	$z : 7$
9	$5zz \pm 18$	$z : 4$	49	$6zz \pm 98$	$z : 20$
10	$11zz \pm 20$	$z : 3$	50	$51zz \pm 100$	$z : 7$
11	$30zz \pm 22$	$z : 2$	51	$26zz \pm 102$	$z : 10$
13	$42zz \pm 26$	$z : 2$	53	$78zz \pm 106$	$z : 6$
15	$14zz \pm 30$	$z : 4$	55	$21zz \pm 110$	$z : 12$
17	$2zz \pm 34$	$z : 12$	63	$62zz \pm 126$	$z : 8$
19	$10zz \pm 38$	$z : 12$	65	$66zz \pm 130$	$z : 8$
23	$33zz \pm 46$	$z : 4$	71	$35zz \pm 142$	$z : 12$
24	$23zz \pm 48$	$z : 5$	73	$37zz \pm 146$	$z : 12$
25	$39zz \pm 50$	$z : 4$	80	$79zz \pm 160$	$z : 9$
26	$3zz \pm 52$	$z : 15$	82	$83zz \pm 164$	$z : 9$
			97	$3zz \pm 194$	$z : 56$
			99	$2zz \pm 198$	$z : 70$

§. 12. Hactenus scilicet pro f solos numeros integros admisimus; verum etiam fracti admitti possunt, dummodo pro k numeri integri resultent. Quod si enim in genere statuamus $x = 2v$, fiet $k = 4fvv + \surd(4fyy + 4)$, vbi euidens est sufficere dummodo $4f$ fuerit numerus integer. Ponatur ergo $4f = g$, eritque $k = gvv + \surd(gyy + 4)$; vbi quia pro x sumsimus numerum parem, intelligitur hic pro

pro y tantum numeros impares accipi debere, quia alioquin in casus praecedentes reuerteremur.

§. 13. Iam in hac formula statuamus $y = 1$, vt fit $k = gvv \pm \sqrt{(g+4)}$, et nunc vt $g+4$ euadat quadratum, primo omnium sumi poterit $g = -3$, vnde oritur $k = -3vv \pm 1$; vbi cum sit $x = 2v$, erit $x : y = 2v : 1$, ex qua formula meri numeri negatiui pro k resultant, qui vsque ad centum erunt:

$$-2, -4, -11, -13, -26, -28, -47, -49, -74, -76,$$

ad quos insuper, vti initio innuimus, quadrata negatiua accedunt, scilicet:

$$-1, -4, -9, -16, -25, -36, -49, -64, -81, -100.$$

§. 14. Pro reliquis valoribus ipsius g statuamus $g+4 = nn$, fietque $k = (nn-4)vv \pm n$. Hic ergo, vt supra, si euadat $nn - 4 = maa$ et loco av scribatur z, erit $k = mzz \pm n$; vbi cum sit $v = \frac{x}{2}$, erit $z = \frac{ax}{2}$, ideoque $x = \frac{2z}{a}$, hincque ratio inter x et y erit $x : y = 2z : a$.

§. 15. In hac autem formula sufficiet pro n numeros tantum impares sumsisse, quandoquidem ex paribus praecedentes formulae redirent. Hoc notato sequentes formulae speciales pro k obtinentur:

n	k	$x : y$
1	$-3zz \pm 1$	$2z : 1$
3	$5zz \pm 3$	$2z : 1$
5	$21zz \pm 5$	$2z : 1$
7	$5zz \pm 7$	$2z : 3$
9	$77zz \pm 9$	$2z : 1$
11	$13zz \pm 11$	$2z : 3$
23	$21zz \pm 23$	$2z : 5$
25	$69zz \pm 25$	$2z : 3$
27	$29zz \pm 27$	$2z : 5$
29	$93zz \pm 29$	$2z : 3$
47	$5zz \pm 47$	$2z : 21$
51	$53zz \pm 51$	$2z : 7$
79	$77zz \pm 79$	$2z : 9$
83	$85zz \pm 83$	$2z : 9$
119	$13zz \pm 119$	$2z : 33$
123	$5zz \pm 123$	$2z : 55$

§. 16. Ex his iam formulis haud difficulter omnes valores numeri k, vsque ad 100, computari poſſunt, qui cum ſponte diſtinguantur in poſitiuos et negatiuos, vtrosque ſeorſim in tabulis ſubiunctis referamus, et cuilibet valori adiungamus rationes inter x et y, vnde hi numeri producuntur.

Tabula

Tabula prior
exhibens omnes valores poſitiuos ipſius k centenario minores.

k	Rationes.	k	Rationes.
2	Omnes	57	$\frac{12}{55}$
7	$\frac{1}{1}$	61	$\frac{5}{4}$
8	$\frac{2}{1}$	62	$\frac{1}{1}$
12	$\frac{3}{2}$	63	$\frac{3}{4}$
13	$\frac{3}{4}$	64	$\frac{3}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{15}$
14	$\frac{1}{11}$	66	$\frac{3}{1}$
16	$\frac{2}{1}$, $\frac{5}{12}$	67	$\frac{4}{21}$
17	$\frac{1}{4}$	68	$\frac{2}{1}$
23	$\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{4}$	71	$\frac{5}{1}$
24	$\frac{3}{2}$	73	$\frac{3}{8}$
26	$\frac{2}{1}$	77	$\frac{1}{8}$
27	$\frac{3}{4}$	78	$\frac{3}{1}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{10}{21}$
31	$\frac{3}{1}$	79	$\frac{1}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{4}$
33	$\frac{8}{21}$	83	$\frac{1}{8}$
34	$\frac{1}{1}$	84	$\frac{5}{12}$
36	$\frac{1}{12}$	86	$\frac{2}{1}$
38	$\frac{2}{1}$	87	$\frac{3}{8}$
41	$\frac{3}{4}$	89	$\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{33}$
42	$\frac{1}{6}$	90	$\frac{6}{35}$
44	$\frac{4}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{70}$	92	$\frac{7}{2}$
47	$\frac{1}{1}$	94	$\frac{3}{2}$
48	$\frac{1}{12}$, $\frac{6}{1}$	95	$\frac{7}{15}$
49	$\frac{9}{56}$	96	$\frac{4}{3}$
52	$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{3}$,	98	$\frac{1}{1}$
55	$\frac{1}{15}$	100	$\frac{4}{15}$
56	$\frac{5}{2}$		

Tabula posterior

exhibens omnes valores negatiuos ipsius k centenario minores.

k	Rationes.	k	Rationes.
1	$\frac{1}{1}$	43	$\frac{8}{55}$
2	Omnes	44	$\frac{3}{20}$
4	$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{15}$	47	$\frac{1}{8}$
9	$\frac{3}{1}$	49	$\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{8}$
11	$\frac{1}{4}$	64	$\frac{1}{8}$
13	$\frac{1}{4}$	67	$\frac{4}{33}$
16	$\frac{1}{4}$	70	$\frac{4}{35}$
25	$\frac{1}{5}$	74	$\frac{1}{10}$
26	$\frac{1}{6}$	76	$\frac{1}{10}$
27	$\frac{4}{21}$	78	$\frac{6}{55}$
28	$\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$	81	$\frac{1}{9}$
32	$\frac{1}{12}$	86	$\frac{3}{28}$
36	$\frac{1}{6}$, $\frac{9}{70}$	89	$\frac{1}{12}$
40	$\frac{2}{15}$	92	$\frac{1}{20}$
42	$\frac{2}{21}$	100	$\frac{1}{10}$

§. 17. Quemadmodum in nostris formulis pro k inventis, quae sunt

$$k = (nn - 1)\,xx \pm 2n \text{ et } k = (nn + 4)\,vv \pm n,$$

loco x et y numeros fractos admisimus, ita etiam pro n fractiones admitti poterunt, dummodo ita fuerint comparatae, vt inde valores integri pro k reperiantur, quo obseruato inuestigatio harum formularum multo facilius institui poterit. Sumto enim $y = 1$, vt formula $x^4 + kxx + 1$ quadratum effici debeat, quaecunque eius fuerit radix, eam semper

fub

fub hac formula: $fxx \pm 1$ comprehendere licebit. Hinc autem ftatim prodit $k = (ff - 1)xx \pm 2f$, quae erat formula noftra prior, in qua fi ftatuatur $x = 2v$ et $2f = g$, prodit altera formula $k = (gg - 4)vv \pm g$, cui refpondet ratio $\frac{x}{y} = \frac{2v}{1}$.

§. 18. Quod fi iam loco g fractiones introducere velimus, facile patet ftatui debere $g = \frac{a}{bb}$, ac praeterea $v = bz$: hoc enim modo prodibit $k = \frac{(aa - 4b^4)}{bb} zz \pm \frac{a}{bb}$, cui refpondet ratio $\frac{2bz}{1}$, atque hic pro a et b eiusmodi numeros accipi oportet, vt pro k prodeant numeri integri. Requiritur ergo vt numerus $aazz \pm a$, hoc eft vt $azz \pm 1$ diuifionem per per bb admittat, tum enim erit

$$k = a . \frac{azz \pm 1}{bb} - 4bbzz;$$

hocque adeo in genere praeftari poteft, ponendo $a = b^4 + 1$, erit enim

$$k = \frac{(b^4 - 1)^2 zz}{bb} \pm \frac{b^4 + 1}{bb}.$$

Hic iam ponatur $z = \frac{t}{b^4 - 1}$, vt habeatur $k = \frac{tt \pm b^4 + 1}{bb}$, vbi ergo $tt \pm 1$ per bb diuifibile reddi debet, vnde prodit $k = \frac{tt \pm 1}{bb} \pm bb$. Quomodocunque autem haec formula euoluatur, omnes numeri in ea contenti iam in formulis fuperioribus contineri videntur.

§. 19. Hinc igitur patet, in Analyfi adhuc defiderari methodum certam, cuius ope omnes valores ipfius k affignari atque adeo quousque libuerit continuari queant. Quin etiam ex formula fracta fortaffe eiusmodi numeri erui poffe videntur, qui in formulis integris fupra exhibihibitis non contineantur; veluti ſe mihi obtulit iſte numerus $k = 131$, quem primo intuitu ex formulis ſupra datis deriuari poſſe non videbatur, cum tamen in formula $(nn - 4)zz + n$ contineatur, ſi poſito $z = 6$ pro n vel fractio $\frac{11}{4}$ vel $\frac{25}{9}$ ſumatur. Poſtea vero deprehendi hunc ipſum numerum ex formula $k = 21zz + 110$ oriri; num autem hoc ſemper eueniat, etiamnunc dubitare licet, vnde perfecta ſolutio etiamnunc plane vires Analyſeos ſuperare videtur. Quaeſtio igitur iſta maximi momenti ſequenti modo proponi poteſt:

Inuenire methodum, cuius ope omnes numeri integri aſſignari queant, qui ex formula $(nn - 4)zz + n$ *reſultare poſſint, ſi loco litterarum* n *et* z *non ſolum numeri integri ſed etiam fracti accipiantur.*

Huius autem quaeſtionis enodatio certe inſignia incrementa in Analyſin Diophanteam eſſet illatura.

IN-