1795

Solutio problematis maxime curiosi quo inter omnes ellipses quae circa datum triangulum circumscribi possunt ea quaeritur cuius area sit omnium minima

Leonhard Euler

SOLVTIO PROBLEMATIS MAXIME CVRIOSI, QVO INTER OMNES ELLIPSES, QVAE CIRCA DATVM TRIANGVLVM CIRCVMSCRIBI POSSVNT, EA QVAERITVR, CVIVS AREA SIT OMNIVM MINIMA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuentui exhibit. die 4 Sept. 1777.

§. 1.

Postquam hoc problema pluribus modis iam olim frustra tentassem, nuper tandem incidi in methodum prorsus singularem eius solutionem inuestigandi, quae eo magis est notatu digna, quod ad constructionem valde simplicem et facilem perducat. Vsus scilicet sum eadem methodo, qua nuper inter omnes ellipses, quas per data quatuor puncta traducere licet, eam assignare docui, quae minimam habeat aream, vnde praecipua calculi subsidia ex illa dissertatione sum petiturus.

Tab. II. Fig. 3. §. 2. Sit igitur A B C triangulum propositum, cuius angulum ad B vocemus $= \omega$, bina autem latera hunc angu-

angulum formantia vocemus $BA = a$ et $BC = c$, ita vt fit tertium latus:

$$AC = \sqrt{(aa + cc - 2ac \operatorname{coſ.} \omega)};$$

praeterea vero notaſſe iuuabit aream huius trianguli eſſe $= \frac{1}{2} ac \operatorname{ſin.} \omega$. Videbimus autem ſemper aream minimae ellipſis, per terna puncta A, B, C, tranſeuntis, certam tenere rationem ad aream huius trianguli, quippe quae ratio reperietur vt 4π ad $3\sqrt{3}$.

§. 3. Sit Y punctum quodcunque in ellipſi quaeſita, cuius ſitum definiamus per binas coordinatas obliquangulas binis lateribus BA et BC parallelas; quamobrem, ducta recta XY, lateri BC parallela, vocemus has coordinatas $BX = x$ et $XY = y$, quarum relatio exprimatur per hanc aequationem generaliſſimam ſecundi ordinis:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

atque in diſſertatione memorata, vbi quatuor puncta ſum contemplatus, oſtendi totam aream huius ellipſis eſſe:

$$= \pi \operatorname{ſin} \omega \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right),$$

vbi more ſolito π denotat peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$.

§. 4. Ante omnia igitur iſtam formam generalem ad caſum noſtri trianguli accommodemus. Ac primo quidem cum ſumto $x = 0$ pro ipſo puncto B fiat quoque $y = 0$, manifeſtum eſt ſtatui debere $F = 0$, vnde area ſuperior iam ſimplicius exprimetur. Deinde cum pro puncto A fit $x = a$ et $y = 0$, aequatio generalis dabit $Aaa + 2Da = 0$, vnde fit $2D = -Aa$. Tertio vero pro puncto C erit $x = 0$

et

et $y = c$, vnde fit $Ccc + 2Ec = 0$, ideoque $2E = -Cc$. Aequatio igitur generalis, ad casum propositum accommodata, erit

$$Axx + 2Bxy + Cyy - Aax - Ccy = 0,$$

quae ergo omnes plane ellipses complectitur, quae per data tria puncta A, B, C traduci possunt; in qua aequatione ergo adhuc insunt tres litterae indefinitae, scilicet A, B et C.

§. 5. Has igitur litteras ita determinari oportet, vt area ellipsis omnium minima reddatur. Cum igitur sit $F = 0$; $D = -\frac{1}{2}Aa$ et $E = -\frac{1}{2}Cc$, area ellipsis ex formula generali supra data ita exprimetur:

$$\frac{1}{4}\pi \sin.\omega \left(\frac{AACaa + ACCcc - 2ABCac}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

vbi ergo litteras A, B, C ita definiri oportet, vt ista expressio omnium euadat minima; vnde patet duplicem inuestigationem minimi institui debere.

§. 6. Quo istam formulam ad calculum propius accommodemus, statuamus primo $B = \cos.\Phi \sqrt{AC}$, vt fiat

$$AC - BB = AC \sin.\Phi^2, \text{ ideoque}$$

$$(AC - BB)^{\frac{3}{2}} = AC \sin.\Phi^3 \sqrt{AC},$$

quo valore introducto area ellipsis fiet

$$= \frac{1}{4}\pi \sin.\omega \left(\frac{Aaa + Ccc - 2ac\cos.\Phi\sqrt{AC}}{\sin.\Phi^3 \sqrt{AC}}\right).$$

Nunc ad irrationalitatem penitus tollendam fiat $C = Ass$, vt sit $\sqrt{AC} = As$, hocque modo area nostra erit

$$\frac{1}{4}\pi \sin.\omega \left(\frac{aa + ccss - 2acs\cos.\Phi}{s\sin.\Phi^3}\right),$$

et quaestio iam huc redit, quemadmodum quantitatem s et et angulum Φ determinari oporteat, vt valor huius expressionis: $\frac{aa+ccss-2acs\,\text{cof.}\,\Phi}{s\,\text{fin.}\,\Phi^3}$, omnium minimus reddatur?

§. 7. Ponamus angulo Φ iam datum esse valorem debitum, ita vt sola quantitas s inueſtigari debeat, qua iſti formulae minimus valor concilietur; in qua ergo inueſtigatione angulus Φ vt conſtans, ſola autem s vt variabilis erit consideranda, ſicque minima reddi debebit haec expreſſio:

$$\frac{aa+ccss-2acs\,\text{cof.}\,\Phi}{s} = \frac{aa+ccss}{s} - 2ac\,\text{cof.}\,\Phi,$$

cuius pars poſtrema iam eſt conſtans, vnde tantum haec formula: $\frac{aa}{s}+ccs$, ad minimum perduci debet, cuius ergo differentiale nihilo aequatum praebet hanc aequationem: $ccss-aa=0$, vnde colligitur $s=\frac{a}{c}$. Erat autem $ss=\frac{C}{A}$, ideoque ſumi debet $\frac{C}{A}=\frac{aa}{cc}$. Quoniam igitur in aequatione noſtra ſola ratio inter litteras A et C ſpectatur, ſumamus $A=cc$ et $C=aa$, hocque modo iam adimpleuimus vnam minimi conditionem.

§. 8. Loco A et C ſcribamus iſtos valores inuentos, atque area ellipſis, ex parte iam minima reddita, erit

$$\tfrac{1}{4}\pi\,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{2ac(1-\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^3}\right)=\tfrac{1}{2}\pi ac\,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{1-\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi^3}\right).$$

Tantum igitur angulus Φ ita definiendus reſtat, vt formula $\frac{1-\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi^3}$ minima euadat. Cum autem ſit $\text{fin.}\,\Phi^2=1-\text{cof.}\,\Phi^2$, iſta formula $\frac{1-\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi^3}$ transmutatur in hanc: $\frac{1}{\text{fin.}\,\Phi\,(1+\text{cof.}\,\Phi)}$, cuius ergo fractionis denominatorem maximum reddi oportet; eius autem differentiatio hanc dat aequationem: $\text{cof.}\,\Phi+\text{cof.}\,\Phi^2-\text{fin.}\,\Phi^2=0$, ſiue $\text{cof.}\,\Phi+2\,\text{cof.}\,\Phi^2-1=0$, quae manifeſto reſoluitur in hos factores: $(1+\text{cof.}\,\Phi)(2\,\text{cof.}\,\Phi-1)=0$, vnde duae ſequuntur ſolutiones: altera $1+\text{cof.}\,\Phi=0$, quae au-

autem redderet formulam $\sin.\,\Phi(1+\cos.\,\Phi)=0$, ideoque maximum non foret; quare altera solutio locum habebit, quae dat $2\cos.\,\Phi-1=0$, vnde fit $\cos.\,\Phi=\frac{1}{2}$, hincque $\sin.\,\Phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, scilicet ipse angulus foret $=60$ gr.

§. 9. Nunc igitur conditioni praescriptae penitus satisfecimus, et iam area ellipsis hoc modo exprimetur: $\frac{2\pi ac\sin.\,\omega}{3\sqrt{3}}$, quae est minima inter omnes ellipses, quas per tria data puncta traducere licet. Cum igitur area trianguli ABC sit $\frac{1}{2}ac\sin.\,\omega$, euidens est aream minimae ellipsis quaesitae se habere ad aream trianguli vt $4\pi : 3\sqrt{3}$, prorsus vt iam supra commemorauimus. Haec autem ratio proxime vera in numeris est vt $2,41840 : 1$, vnde sequentes fractiones continuo propius ad veritatem accedent:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{17}{7},\ \frac{29}{12},\ \frac{104}{43},\ \frac{237}{98}.$$

§. 10. Quaeramus nunc etiam ipsam aequationem pro curua inuenta, et quia sumsimus $A=cc$ et $C=aa$, hinc reperiemus litteram B, ex positione $B=\cos.\,\Phi\sqrt{AC}$, vnde ob $\cos.\,\Phi=\frac{1}{2}$ erit $B=\frac{1}{2}ac$, quo valore substituto aequatio pro ellipsi omnium minima erit:

$$ccxx+acxy+aayy-accx-aacy=0,$$

vnde pro qualibet abscissa x gemina applicata y definiri potest, reperietur enim:

$$y=\frac{ac-cx\pm\sqrt{(aa+2ax-3xx)}}{2a},$$

qui valor concinnius ita exprimitur:

$$y=\frac{c(a-x)\pm c\sqrt{(a-x)(a+3x)}}{2a}.$$

Ex hac aequatione primo patet abscissam x nunquam maiorem fieri posse quam a, negatiue autem abscissa non vltra

$\frac{1}{3}a$

$\frac{1}{3}a$ crescere potest. Sumto autem sinistrorsum $BD = \frac{1}{3}a$, fiet applicata $DE = \frac{2}{3}c = \frac{2}{3}BC$, atque in hoc puncto E bini valores ipsius y coalescunt, sicque recta DE curuam in puncto E tanget. Quodsi iam ducatur recta AE, latus BC secans in F, ob triangula similia erit $AD : DE = AB : BF$, vnde prodit $BF = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}BC$, ita vt recta AFE latus BC bisecet. Porro vero quia BD est tertia pars ipsius BA, erit quoque EF tertia pars ipsius AF, vnde facillime punctum E designatur. Tab. II. Fig. 4.

§. 11. Quodsi porro faciamus $x = a$, ob radicale euanescens ambo valores ipsius y quoque coalescunt, vtroque existente $= 0$, siue ducta $A\alpha$ ipsi BC parallela et infinite parua, erit etiam α punctum in curua, ideoque recta $A\alpha$ curuam tanget in A, quae cum sit parallela tangenti DE, sequitur rectam AE esse diametrum ellipsis, cuius ergo centrum in eius medium O incidet. Cum igitur sit $FE = \frac{1}{3}AF$, centrum ellipsis cadet in punctum O, sumta $AO = \frac{2}{3}AF$, siue $FO = \frac{1}{3}AF$. Iste igitur diameter omnes ordinatas lateri BC parallelas bisecabit. Praeterea vero quia terna puncta inter se permutare licet, simili modo recta BG, latus AC bisecans, quin etiam recta CH, latus BA bisecans, se mutuo in eodem puncto O secabunt. Notum autem est hoc modo centrum grauitatis trianguli determinari, vnde ista insignis proprietas elucet: *Quod centrum ellipsis omnium minimae, per terna puncta A, B, C, ducendae, in ipsum centrum grauitatis trianguli A, B, C, incidat*; vnde cum praeterea non solum dentur terna puncta A, B, C, sed etiam tangentes in his punctis, quippe quae lateribus oppositis sunt parallelae, ex proprietatibus cognitis sectionum conicarum facillime ista ellipsis quaesita construi poterit.

§. 12.

§. 12. Euoluamus aliquot casus. Ac primo quidem
Tab. II. Fig. 5. sit triangulum A B C aequilaterum, ideoque $c = a$ et angulus $\omega = 60^\circ$, cuius sinus $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, atque aequatio pro ellipsi minima erit $xx + xy + yy - ax - ay = 0$, ipsa vero area huius minimae ellipsis erit $= \frac{1}{3}\pi aa$. Facile autem intelligitur, hoc casu ellipsin fore circulum triangulo circumscriptum. Ex aequatione autem hoc ita ostendi potest: Sit Y punctum in ellipsi, vnde lateri B C agatur parallela Y X, vt sit $BX = x$ et $XY = y$; tum vero producatur recta B G, latus A C bisecans in G, in quam ex Y ducatur normalis Y T, voceturque $BT = t$ et $TY = u$. Producatur T Y, donec lateri B C producto occurrat in V; tum vero etiam agatur recta X S ipsi A C parallela, eritque $BS = XS = x = YV$. Erit igitur etiam $SV = XY = y$, ideoque $BV = x + y$, hincque ob angulum $CBG = 30^\circ$ erit $BT = t = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$ et $TV = \frac{1}{2}(x + y)$. Hinc auferatur $YV = x$ et relinquetur $TY = u = \frac{1}{2}(y - x)$.

§. 13. Ex aequationibus his inuentis erit primo $x + y = \frac{2t}{\sqrt{3}}$ et $y - x = 2u$, vnde colligitur $x = \frac{t}{\sqrt{3}} - u$ et $y = \frac{t}{\sqrt{3}} + u$, quibus valoribus substitutis orietur aequatio inter coordinatas rectangulas t et u, quae erit

$$tt + uu - \frac{2at}{\sqrt{3}} = 0, \text{ siue } uu = + \frac{2at}{\sqrt{3}} - tt,$$

quae manifesto est pro circulo, cuius radius $= \frac{a}{\sqrt{3}}$. Cum igitur sit recta $BG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, erit B G ad illum radium vt $3 : 2$, ideoque centrum circuli cadit in O, ita vt sit $BO = \frac{2}{3} BG$.

Fig. 6. §. 14. Sit nunc triangulum ABC isosceles et $BC = BA = a = c$, angulum vero ad B, qui erat ω, nunc statuamus $\omega = 2\theta$, ita vt, ducta recta B G T, latus A C bisecante in idque

[illegible] fit angulus $CBG = \theta$. Iam ponatur vt ante [illegible] $TY = u$, exiſtente $BX = x$ et $XY = y$; tum [illegible] parallelogrammum $XSVY$, eritque $BS = x$, et [illegible] $\text{fin.}\,\theta = YV$. Cum iam fit $SV = XY = y$, erit [illegible] $= x + y$, hincque [illegible]

$$BT = t = (x + y)\,\text{cof.}\,\theta \text{ et}$$

$$TV = (x + y)\,\text{fin.}\,\theta.$$

[illegible] auferatur $YV = 2x\,\text{fin.}\,\theta$, ac remanebit

$$TY = u = (y - x)\,\text{fin.}\,\theta.$$

Quare cum habeamus

$$x + y = \frac{t}{\text{cof.}\,\theta} \text{ et } y - x = \frac{u}{\text{fin.}\,\theta},$$

erunt coordinatae obliquangulae

$$x = \frac{t}{2\,\text{cof.}\,\theta} - \frac{u}{2\,\text{fin.}\,\theta} \text{ et } y = \frac{t}{2\,\text{cof.}\,\theta} + \frac{u}{2\,\text{fin.}\,\theta},$$

qui valores ſubſtituti ſuppeditant inter coordinatas orthogonales hanc aequationem

$$\frac{3tt}{4\,\text{cof.}\,\theta^2} + \frac{uu}{4\,\text{fin.}\,\theta^2} - \frac{at}{\text{cof.}\,\theta} = 0, \text{ ſiue}$$

$$uu = \frac{4at\,\text{fin.}\,\theta^2}{\text{cof.}\,\theta} - \frac{3tt\,\text{fin.}\,\theta^2}{\text{cof.}\,\theta^2},$$

vnde patet applicatam u euaneſcere tam caſu $t = 0$ quam $t = \frac{4}{3}a\,\text{cof.}\,\theta$, quae quantitas ergo dabit axem principalem ellipſis, qui fit $BI = \frac{4}{3}a\,\text{cof.}\,\theta$. Quare cum fit $BG = a\,\text{cof.}\,\theta$, erit $BI = \frac{4}{3}BG$, ſicque centrum incidet in O, exiſtente $BO = OI = \frac{2}{3}BG$. Quodſi iam ſumamus $t = BO = \frac{2}{3}a\,\text{cof.}\,\theta$, valor ipſius u dabit ſemiaxem coniugatum, qui fit OK, eritque $OK = \frac{2a\,\text{fin.}\,\theta}{\sqrt{3}}$, ſemiaxis vero alter erat $BO = OI = \frac{2}{3}a\,\text{cof.}\,\theta$, vnde prodit area huius ellipſis:

$$[\text{illegible}] = \pi \cdot BO \cdot OK = \frac{4\pi aa\,\text{fin.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi aa\,\text{fin.}\,\omega}{3\sqrt{3}},$$

quae perfecte congruit cum forma generali.