1795

Problema geometricum quo inter omnes ellipses quae per data quatuor puncta traduci possunt ea quaeritur quae habet aream minimam

Leonhard Euler

PROBLEMA GEOMETRICVM,

QVO INTER OMNES ELLIPSES, QVAE PER DATA QVATVOR PVNCTA TRADVCI POSSVNT, EA QVAERITVR, QVAE HABET AREAM MINIMAM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhib. die 4 Sept. 1777.

§. 1.

Casum huius problematis, quo quatuor puncta in angulis parallelogrammi rectanguli constituta assumuntur, iam olim solutum dedi; verum problema generale tum temporis adgredi non sum ausus, propter ingentem quantitatum numerum, quae in calculum introduci deberent, vnde formulae analyticae penitus inextricabiles orirentur: quamobrem Geometris haud ingratum fore spero, si hic solutionem satis succinctam istius Problematis difficillimi tradidero.

§. 2. Primo igitur quatuor puncta data ita disposita esse debent, vt per ea saltem vnam ellipsin ducere liceat, id quod euenit, quando quodlibet istorum punctorum extra triangulum per terna reliqua formatum incidit. Statim vero atque vnica ellipsis per haec puncta duci potest, iam satis

ſatis conſtat ſimul quoque infinitas alias traduci poſſe, inter quas ergo noſtrum problema iubet eam inueſtigare, cuius area omnium ſit minima.

§. 3. Sint igitur A, B, C, D, quatuor illa puncta, per quae ellipſes tranſire oporteat. Agatur per bina quaeuis puncta A et B linea recta O A B, pro axe habenda, cui recta, per bina reliqua puncta C et D ducta, occurrat in puncto O, vbi initium abſciſſarum conſtituamus. Applicatas vero hic non more ſolito axi O A B normales, ſed alteri directioni O C D parallelas ſtatuamus; ſcilicet ſi vocetur abſciſſa $OX = x$, applicata ei reſpondens $XY = y$ ſemper rectae O C D parallela eſt concipienda. Vocetur ergo iſte angulus obliquitatis $AOC = \omega$, et quoniam quatuor puncta A, B, C, D, ſunt data, vocemus eorum diſtantias a puncto O vt ſequitur: $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$ et $OD = d$, vnde ſtatim tam ipſa latera quam diagonales per haec quatuor puncta tranſeuntes exprimere poterimus. Primo enim erit $AB = b - a$ et $CD = d - c$; tum vero erunt rectae in figura non expreſſae: Tab. I. Fig. 2.

$$AC = \sqrt{(cc + aa - 2ac\cos.\omega)},$$
$$AD = \sqrt{(aa + dd - 2ad\cos.\omega)},$$
$$BC = \sqrt{(bb + cc - 2bc\cos.\omega)},$$
$$BD = \sqrt{(bb + dd - 2bd\cos.\omega)}.$$

Caeterum hic obſeruetur perinde eſſe, per quaenam datorum punctorum axis traducatur, dummodo directio applicatarum per duo reliqua puncta tranſeat; quod notaſſe iuuabit, quando forte rectae A B et C D fuerint inter ſe parallelae; tum enim axem per puncta A et D vel B et C duci conueniet.

§. 4. Quia nunc curuas per quatuor puncta A, B, C, D, ducendas ellipſes eſſe oporteat, aequatio inter coordinanatas $OX = x$ et $XY = y$ hac forma repraesentetur:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

in qua ergo primo litterae A et C eodem signo debent esse affectae; praeterea vero earum productum AC maius esse debet, quam BB, quia alioquin curuae in hac aequatione contentae forent hyperbolae. Vt nunc istam aequationem generalem ad statum propositum accommodemus, statuamus primo $y = 0$, vnde aequatio abibit in hanc formam: $Axx + 2Dx + F = 0$, quae ergo praebere debet bina puncta in axe posita, scilicet A et B, pro quorum illo fit $x = a$, pro hoc vero $x = b$, quae ergo esse debent radices illius aequationis $Axx + 2Dx + F = 0$; quamobrem statuamus

$$Axx + 2Dx + F = m(x - a)(x - b),$$

vnde fiet

$$A = m;\ D = -\frac{m(a + b)}{2} \text{ et } F = mab.$$

§. 5. Ponamus nunc simili modo abscissam $x = 0$, vnde aequatio euadit $Cyy + 2Ey + F = 0$, cuius radices dare debent puncta C et D, siue eius radices esse debent $y = c$ et $y = d$; quamobrem statuatur:

$$Cyy + 2Ey + F = n(y - c)(y - d),$$

vnde fit

$$C = n;\ E = -\frac{n(c + d)}{2} \text{ et } F = ncd.$$

Ante vero inueneramus $F = mab$, qui valores vt congruant, capiatur $m = cd$ et $n = ab$, quocirca aequatio generalis quatuor data puncta complectetur, si fiat:

$$A = cd;\ C = ab;\ 2D = -cd(a + b);$$
$$2E = -ab(c + d) \text{ et } F = abcd,$$

ita vt iam omnes litterae, praeter B, sint determinatae. Hoc ergo

ergo modo littera B indeterminata relinquitur, ac pro variis valoribus innumerabiles nafcentur ellipfes per eadem quatuor puncta A, B, C, D tranfeuntes, dummodo accipiatur $BB < AC$. Si enim fumeretur $BB = AC$, curua foret parabola, fiue ellipfis infinite longa, cuius ergo area etiam foret infinita, quamobrem quaeftio propofita ad minimam aream adftringitur. Sin autem adeo effet $BB > AC$ curuae forent hyperbolae, ideoque a noftro problemate excluduntur.

§. 6. Quaeramus nunc applicatam XY. Manifeftum autem eft cuilibet abfciffae $CX = x$ geminam applicatam refpondere debere XY et XY', quandoquidem ifta applicata curuam fecabit in duobus punctis Y et Y', quae ergo applicatae erunt radices aequationis noftrae generalis, cuius refolutio dabit Tab. I. Fig. 3.

$$y = -\frac{E - Bx \pm \sqrt{[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C},$$

quorum duorum valorum alter dabit applicatam XY alter vero applicatam XY', ita vt fit:

$$XY = -\frac{E - Bx - \sqrt{[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C} \text{ et}$$

$$XY' = -\frac{E - Bx + \sqrt{[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C}.$$

§. 7. Quia nunc ambo puncta Y et Y' fita funt in ellipfi per puncta A, B, C, D tranfeunte, interuallum YY' intra ellipfin continebitur. Quare cum fit $YY' = XY' - XY$, erit iftud interuallum:

$$YY' = \frac{2\sqrt{[(E + Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC]}}{C}.$$

Quod fi iam illi applicatae ducatur proxima xyy', ea a priore remota eft interuallo xv (ducta fcilicet ex x in XY

X Y perpendiculari $x v$, quae ob $X x = \partial x$ et angulum $x X v = \omega$, erit $x v = \partial x \,\text{fin.}\, \omega$) per quod fi interuallum Y Y′ multiplicetur, orietur elementum areae $Y Y' y y'$, quod ergo erit

$$= \frac{2 \partial x \,\text{fin.}\, \omega}{C} \sqrt{[(E + B x)^2 - A C x x - 2 C D x - F C]},$$

cuius ergo integrale, per totam ellipfin extenfum, dabit totam aream ellipfis quam confideramus.

§. 8. Quoniam quadratura ellipfis pendet a quadratura circuli, hoc integrale commodiffime inueniemus, fi rem ad circulum referamus. Confideremus igitur circulum, cu-
Tab. I. ius radius fit $a r = r$, ideoque eius area $= \pi r r$, in quo
Fig. 4. capiatur elementum analogum $Y' y' y Y$, ad quod ex centro a ducatur normalis $a T = t$, eritque $Y Y' = 2 \sqrt{(r r - t t)}$, ideoque elementum areae $Y Y' y' y = 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)}$. Hinc difcimus, fi integrale per totam figuram extendatur, fore $\int 2 \partial t \sqrt{(r r - t t)} = \pi r r$, vnde fi vtrinque per n multiplicemus, erit

$$\int 2 \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi n r r,$$

eodemque modo

$$\int 2 m \partial t \sqrt{(n n r r - n n t t)} = \pi m n r r.$$

§. 9. Quo nunc hanc formam ad noftrum inftitutum accommodemus, fumamus $t = x + f$, eritque

$$\int 2 m \partial x \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r,$$

hincque

$$\int 2 m \partial x \,\text{fin.}\, \omega \sqrt{[n n r r - n n (x + f)^2]} = \pi m n r r \,\text{fin.}\, \omega.$$

Tantum igitur fupereft, vt iftam formulam ad noftrum cafum accommodemus, id quod fiet fumendo $m = \frac{1}{C}$, deinde vero

$n n r r$

$$nnrr = nn(x+f)^2 = (E+Bx)^2 - ACxx - 2CDx - FC,$$

quae aequatio euoluta ita fe habebit:

$$nnrr = nnff - 2nnfx - nnxx$$
$$= EE - FC + 2(BE - CD)x + (BB - AC)xx,$$

Hinc patet effe debere 1°.) $nn = AC - BB$, ideoque $n = \surd(AC - BB)$; 2°.) effe debet $nnf = CD - BE$, ideoque $f = \frac{CD - BE}{AC - BB}$; 3°.) vero neceffe eft vt fiat

$$rr = ff + \frac{EE - FC}{nn},$$

vbi fi valores inuentos fubftituamus, prodibit:

$$rr = \frac{(CD - BE)^2}{(AC - BB)^2} + \frac{EE - FC}{AC - BB},$$

fiue

$$rr = \frac{CCDD - 2BCDE + ACEE}{(AC - BB)^2} - \frac{CF}{AC - BB}.$$

His valoribus inuentis area tota noftrae ellipfis debet effe $= \pi mnrr\,\text{fin.}\,\omega$, vnde facta fubftitutione obtinebitur fequens expreffio:

$$\pi\frac{(CDD - 2BDE + AEE)\,\text{fin.}\,\omega}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi F\,\text{fin.}\,\omega}{\surd(AC - BB)},$$

quae area etiam hoc modo exhiberi poteft:

$$\pi\,\text{fin.}\,\omega\left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\surd(AC - BB)}\right).$$

Haec expreffio ideo maxime eft notatu digna, quod eius ope omnium ellipfium areae totae fatis expedite affignari poffunt ex fola aequatione inter coordinatas, fiue eae fint rectangulae fiue obliquangulae. Ita fi habeatur aequatio notiffima pro ellipfi: $ffxx + ggyy = ffgg$, inter coordinatas

natas rectangulas, erit primo sin. $\omega = 1$; tum vero $A = ff$; $B = 0$; $C = gg$; $D = 0$; $E = 0$; $F = -ffgg$, vnde tota area huius ellipsis per regulam nostram erit $= \pi f g$.

§. 10. Quoniam igitur hoc modo omnium ellipsium per data quatuor puncta A, B, C, D, transeuntium areae innotescunt, tantum superest, vt inter omnes has areas minima inuestigetur. Quare cum praeter litteram B reliquae omnes per quatuor data puncta sint determinatae, siquidem inuenimus esse $A = cd$; $C = ab$; $2D = -cd(a+b)$; $2E = -2ab(c+d)$ et $F = abcd$: quaestio huc redit, vt quaeratur valor litterae B, qui formulam modo inuentam reddat omnium minimam, siue vt, posito breuitatis gratia $CDD + AEE = \Delta$, haec formula:

$$\frac{\Delta - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}},$$

minima efficiatur.

§. 11. Tractetur ergo littera B tanquam variabilis, huiusque expressionis differentiale nihilo aequale statuatur, vnde nascetur sequens aequatio:

$$\frac{2DE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{BF}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3B(\Delta - 2BDE)}{(AC - BB)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

quae ducta in $(AC - BB)^{\frac{5}{2}}$ producet hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} -2ACDE + 3CDDB - 4DEBB + FB^3 \\ \qquad\qquad\;\; + 3AEEB \\ \qquad\qquad\;\; - \;\; ACFB \end{array}\right\} = 0.$$

§. 12

§. 12. Ecce ergo tota solutio problematis propositi perducta est ad resolutionem aequationis cubicae, quae cum semper habeat radicem realem, certum est, quomodocunque quatuor puncta fuerint disposita, semper vnam ellipsin assignari posse per quatuor illa puncta transeuntem, cuius area omnium sit minima, pro qua aequatio inter coordinatas x et y exhiberi poterit, si modo loco B radix ex illa aequatione cubica oriunda substituatur. Quodsi forte eueniat vt aequatio illa cubica tres admittat radices reales, totidem quoque solutiones locum habebunt, quarum autem indolem aliis perscrutandam relinquo.

APPLICATIO
huius solutionis ad casum, quo ellipsis minima dato parallelogrammo circumscribenda quaeritur.

§. 13. Cum hic latera opposita sint inter se parallela, neutrum eorum pro axe accipi conuenit; quamobrem alteram diagonalem pro axe sumamus, alteri vero applicatas parallelas statuamus. Sit igitur A D B C parallelogrammum propositum, cuius diagonales AB et CD se mutuo in O intersecent, vocenturque $AO = BO = a$ et $CO = OD = c$, angulus vero $AOC = \theta$. Quibus positis ponatur abscissa quaecunque, super diagonali A B a puncto O sumta, $OX = x$, eique applicata respondens, alteri diagonali C D parallela, $XY = y$, sitque aequatio relationem inter x et y exprimens: Tab. I. Fig. 5.

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

atque supra §. 9. vidimus aream ellipsis esse

$$\pi \text{ ſin. } \theta \left(\frac{CDD + AEE - 2BDE}{(AC - BB)^{\frac{3}{2}}} - \frac{F}{\sqrt{(AC - BB)}} \right).$$

§. 14. Accommodemus igitur iſtam aequationem generalem ad caſum propoſitum, ac primo quidem manifeſtum eſt, applicatam y euaneſcere debere in punctis A et B, pro quibus fit $x = +a$ et $x = -a$, vnde oriuntur hae duae aequationes:

$$Aaa + 2Da + F = 0 \text{ et}$$
$$Aaa - 2Da + F = 0,$$

vnde ſequitur eſſe $F = -Aaa$ et $D = 0$. Deinde poſito $x = 0$, fieri debet tam $y = +c$ quam $y = -c$, vnde oriuntur hac duae aequationes:

$$Ccc + 2Ec + F = 0 \text{ et}$$
$$Ccc - 2Ec + F = 0,$$

hincque fit $F = -Ccc$ et $E = 0$. Cum igitur eſſe debeat $Aaa = Ccc$, ſumi conueniet $A = cc$ et $C = aa$, ita vt fit $F = -aacc$, ideoque aequatio pro curua noſtra erit

$$ccxx + 2Bxy + aayy - aacc = 0.$$

§. 15. Hinc ergo area iſtius ellipſis hoc modo exprimetur: $\frac{\pi aacc \text{ ſin. } \theta}{\sqrt{(aacc - BB)}}$, quae omnium fit minima ſumto $B = 0$. Sit igitur $B = 0$, atque pro ellipſi omnium minima habebimus hanc aequationem:

$$ccxx + aayy - aacc = 0,$$

cuius area erit $= \pi ac \text{ ſin. } \theta$. Vbi notetur aream huius parallelogrammi eſſe $= 2ac \text{ ſin. } \theta$, ita vt area ellipſis ſe habeat ad aream parallelogrammi vt π ad 2.

§. 16.

§. 16. Apparet ergo huius ellipſis centrum cadere in ipſum punctum O, atque ambas diagonales A B et C D fore diametros coniungatos, ſub angulo obliquitatis eius $AOC = \theta$ inuicem inclinatos; ex quo ſequitur tangentes in punctis A et B diametro C D eſſe parallelas, tangentes vero in punctis C et D parallelas diametro A B, vnde haec curua facile deſcribitur. Quodſi angulus θ fuerit rectus, parallelogrammum abit in rhombum, cuius diagonales A B et C D erunt axes principales ellipſis.

§. 17. Sin autem ambae diagonales A B et C D fuerint inter ſe aequales, manente angulo θ obliquo, parallelogrammum noſtrum abit in rectangulum; huncque caſum iam olim ſum contemplatus, ellipſinque minimam determinaui tali rectangulo circumſcribendam, quae ſolutio quoque cum praeſenti egregie conuenit.

§. 18. Videamus nunc etiam quomodo axes principales ellipſis inuentae in genere definiri oporteat. Poſitis ergo coordinatis $OX = x$ et $XY = y$, exiſtente angulo $AXY = \theta$, inuenimus hanc aequationem: Tab. II. Fig. 1.

$$ccxx + aayy - aacc = 0.$$

Ponamus nunc O F eſſe ſemiaxem principalem huius ellipſis, inclinatum ad rectam O A ſub angulo $AOF = \Phi$, et referamus punctum ellipſis Y ad iſtum axem O F, per coordinatas orthogonales $Ox = X$ et $xY = Y$. Quem in finem ex x ducamus prioribus coordinatis parallelas xu et xt, atque in triangulo Oxt erit angulus $Oxt = \theta - \Phi$; in triangulo vero xuY, ob angulum $Oxu = \Phi$, erit angulus $uxY = 90^0 - \Phi$, et angulus xYu complementum anguli $\theta - \Phi$, tum vero angulus $xuY = \theta$.

S 3 §. 19.

§. 19. Iam resolutio horum triangulorum praebet:

$$O\,t = \frac{X\,\text{fin.}\,(\theta - \Phi)}{\text{fin.}\,\theta} \text{ et } t\,x = \frac{\text{fin.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\theta};$$

porro vero

$$x\,u = \frac{Y\,\text{cof.}\,(\theta - \Phi)}{\text{fin.}\,\theta} \text{ et } Y\,u = \frac{Y\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\theta},$$

vnde per X et Y priores coordinatae x et y ita determinantur, vt fit

$$x = \frac{X\,\text{fin.}\,(\theta - \Phi) - Y\,\text{cof.}\,(\theta - \Phi)}{\text{fin.}\,\theta} \text{ et } y = \frac{X\,\text{fin.}\,\Phi + Y\,\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\theta},$$

qui valores in aequatione:

$$c\,c\,x\,x + a\,a\,y\,y = a\,a\,c\,c,$$

substituti producunt inter X et Y hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} c\,c\,X\,X\,\text{fin.}\,(\theta - \Phi)^2 - 2\,c\,c\,X\,Y\,\text{fin.}\,(\theta - \Phi)\,\text{cof.}\,(\theta - \Phi) \\ \qquad\qquad + c\,c\,Y\,Y\,\text{cof.}\,(\theta - \Phi)^2 \\ + a\,a\,X\,X\,\text{fin.}\,\Phi^2 - 2\,a\,a\,X\,Y\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi \\ \qquad\qquad + a\,a\,Y\,Y\,\text{cof.}\,\Phi^2 \end{array}\right\} = a\,a\,c\,c\,\text{fin.}\,\theta^2.$$

In hac igitur aequatione, quia ad axem principalem refertur, ante omnia termini continentes X Y se mutuo destruere debent, vnde fit

$$c\,c\,\text{fin.}\,(\theta - \Phi)\,\text{cof.}\,(\theta - \Phi) = a\,a\,\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi,$$

ex qua aequatione angulum Φ eruere licet. Cum enim fit

$$a\,a\,\text{fin.}\,2\,\Phi = c\,c\,\text{fin.}\,(2\,\theta - 2\,\Phi) = c\,c\,\text{fin.}\,2\,\theta\,\text{cof.}\,2\,\Phi$$
$$- c\,c\,\text{cof.}\,2\,\theta\,\text{fin.}\,2\,\Phi,$$

per fin. 2 Φ diuidendo habebimus:

$$a\,a = c\,c\,\text{fin.}\,2\,\theta\,\text{cof.}\,2\,\Phi - c\,c\,\text{cof.}\,2\,\theta,$$

hincque fiet

$$\text{cof.}\,2\,\Phi\,\frac{a\,a + c\,c\,\text{cof.}\,2\,\theta}{c\,c\,\text{fin.}\,2\,\theta},$$

vnde duplex valor pro angulo Φ elicitur, pro vtriusque axis principalis positione.

§. 20.

§. 20. Sublato iam termino X Y aequatio nostra erit

$$\left.\begin{array}{l} XX[cc\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{sin.}\,\Phi^2] \\ + YY[cc\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{cos.}\,\Phi^2] \end{array}\right\} = aacc\,\text{sin.}\,\theta^2,$$

vnde ambo semiaxes principales, qui sint f et g, sequenti modo definientur:

$$ff = \frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{cc\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{sin.}\,\Phi^2} \text{ et } gg = \frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{cc\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{cos.}\,\Phi^2},$$

sicque erit

$$\frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{ff} = cc\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{sin.}\,\Phi^2 \text{ et}$$

$$\frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{gg} = cc\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{cos.}\,\Phi^2,$$

vnde ob iam inuentum angulum Φ ambo semiaxes principales f et g determinari poterunt.

§. 21. Si duae postremae aequalitates addantur, orietur ista aequatio:

$$\frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2(ff+gg)}{ffgg} = cc + aa, \text{ siue}$$

$$\frac{ff+gg}{ffgg} = \frac{aa+cc}{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}.$$

Deinde vero si in prioris aequationis

$$\frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{ff} = cc\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi)^2 + aa\,\text{sin.}\,\Phi^2,$$

membro dextro loco cc scribatur valor $\frac{aa\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(\theta-\Phi)\,\text{cos.}\,\theta-\Phi)}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{cc\,\text{sin.}\,\theta^2}{ff} = \frac{\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi)}{\text{cos.}\,(\theta-\Phi)} + \text{sin.}\,\Phi^2$$

$$= \frac{\text{sin.}\,\Phi\,[\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(\theta-\Phi) + \text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)]}{\text{cos.}\,(\theta-\Phi)} = \frac{\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\theta}{\text{cos.}\,(\theta-\Phi)},$$

sicque erit $\frac{cc\,\text{sin.}\,\theta}{ff} = \frac{\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,(\theta-\Phi)}$. Tum vero si in alterius aequationis

$$\frac{aacc\,\text{sin.}\,\theta^2}{gg} = cc\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi) + aa\,\text{cos.}\,\Phi^2.$$

mem-

membro dextro loco $a\,a$ scribatur valor $\frac{c\,c\,\text{sin.}(\theta-\Phi)\,\text{cos.}(\theta-\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi}$, prodibit haec aequatio:

$$\frac{a\,a\,\text{sin.}\,\theta^2}{g\,g} = \text{cos.}\,(\theta-\Phi)^2 + \frac{\text{sin.}\,(\theta-\Phi)\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{sin.}\,\Phi}$$
$$= \frac{\text{cos.}(\theta-\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi}[\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}(\theta-\Phi)+\text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}(\theta-\Phi)] = \frac{\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,(\theta-\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi}.$$

vnde fit $\frac{a\,a\,\text{sin.}\,\theta}{g\,g} = \frac{\text{cos.}\,(\theta-\Phi)}{\text{sin.}\,\Phi}$.

§. 22. Nunc binae postremae aequalitates in se invicem ductae dabunt $\frac{a\,a\,c\,c\,\text{sin.}\,\theta^2}{f\,f\,g\,g} = 1$, ideoque

$$f\,f\,g\,g = a\,a\,c\,c\,\text{sin.}\,\theta^2,$$

consequenter $f\,g = a\,c\,\text{sin.}\,\theta$, in qua aequatione continetur insignis illa proprietas, qua parallelogrammum circa binos diametros coniugatos descriptum aequale perhibetur parallelogrammo circa axes principales descripto. Cum deinde supra inuenerimus $\frac{f\,f+g\,g}{f\,f\,g\,g} = \frac{a\,a+c\,c}{a\,a\,c\,c\,\text{sin.}\,\theta^2}$, quoniam modo vidimus esse $a\,a+c\,c\,\text{sin.}\,\theta^2 = f\,f\,g\,g$, hinc resultat altera principalis proprietas, qua est $a\,a+c\,c = f\,f+g\,g$, scilicet in omni ellipsi summae quadratorum duorum diametrorum semper aequales sunt summae quadratorum axium principalium.

§. 23. Applicemus haec ad casum rectangulorum iam dudum tractatum, pro quo est $c = a$, atque pro situ axium principalium nunc habebitur ista aequatio:

$$\text{cos.}\,2\,\Phi = \frac{1+\text{cos.}\,2\,\theta}{\text{sin.}\,2\,\theta},$$

vnde colligitur

$$\text{cos.}\,2\,\Phi = \frac{1+\text{cos.}\,2\,\theta}{\sqrt{2\,(1+\text{cos.}\,2\,\theta)}} = \sqrt{\frac{1+\text{cos.}\,2\,\theta}{2}}.$$

Constat autem esse

$$\sqrt{\frac{1+\text{cos.}\,2\,\theta}{2}} = \pm\,\text{cos.}\,\theta,$$

vnde

vnde fit vel $2\Phi = \theta$, ideoque $\Phi = \frac{1}{2}\theta$; vel $2\Phi = \pi + \theta$, ideoque $\Phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\theta$. Hinc igitur patet alterum axem principalem OF angulum AOC $= \theta$ biſecare, alterumque OG, huic normalem, angulum BOC biſecare. Deinde vero erit Tab. II. Fig. 2.

$$fg = aa \sin.\theta \text{ et } ff + gg = 2aa,$$

vnde colligimus:

$$(f+g)^2 = 2aa(1 + \sin.\theta) = 4aa \cos.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

ideoque erit

$$f + g = 2a \cos.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta).$$

Simili modo habebitur:

$$(f-g)^2 = 2aa(1 - \sin.\theta) = 4aa \sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)^2,$$

conſequenter

$$f - g = 2a \sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta),$$

quocirca habebimus

$$f = a[\cos.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) + \sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)] = a \cos.\tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

ſimilique modo

$$g = a[\cos.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta) - \sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\theta)] = a \sin.\tfrac{1}{2}\theta . \sqrt{2},$$

qui valores manifeſto ſatisfaciunt; fit enim

$$fg = aa \sin.\theta \text{ et } ff + gg = 2aa,$$

haecque ſolutio perfecte congruit cum ea quam olim dederam.