1795

De radicibus aequationis infinitae $0 = 1 - xx/(n(n+1)) + x^4/(n(n+1)(n+2)(n+3)) - x^6/(n.....(n+5)) + \text{etc.}$

Leonhard Euler

DE RADICIBVS AEQVATIONIS INFINITAE

$$0 = 1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \ldots \ldots (n+5)} + \text{etc.}$$

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhibit. die 16 Ianuar. 1777.

§. 1.

In hac aequatione generali singulare phaenomenon se contemplandum offert, quod casibus, quibus est vel $n=1$, vel $n=2$, vel $n=3$, ea habeat omnes suas radices infinitas reales, quas adeo assignare licet; statim autem ac numerus n ternarium superat, omnes eius radices fiant imaginariae. Si enim ponamus $n=1$, vt prodeat ista aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1 \ldots 6} + \text{etc.}$$

quoniam huius seriei summa est $\cos. x$, omnes eius radices sequenti modo progredientur:

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \text{ etc.}$$

quae ergo progressionem arithmeticam constituunt, cuius differentia $=\pi$, ita vt, si quaepiam radix fuerit $x=r$, etiam radix futura sit $x=r\pm\pi$.

C 2 §. 2.

§. 2. Confideremus nunc etiam cafum quo $n = 2$, et aequatio propofita:

$$0 = 1 - \frac{xx}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2\ldots7} + \frac{x^8}{2\ldots9} - \text{etc.}$$

quae feries ducta in x exhibet valorem fin. x, hincque vtique euanefcet omnibus cafibus, quibus fin. $x = 0$, excepto folo cafu $x = 0$, (nam quia feriei fumma eft $\frac{\text{fin.}\, x}{x}$, cafu $x = 0$ eius fumma erit $= 1$), vnde omnes radices huius aequationis erunt:

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi, \text{etc.}$$

quae pariter progreffionem arithmeticam conftituunt, cuius differentia $= \pi$, ita vt, fi quaepiam radix fuerit $x = r$, etiam radix futura fit $x = r \pm \pi$, folo cafu excepto quo fieret $x = 0$.

§. 3. Statuamus nunc etiam $n = 3$, vt prodeat ifta aequatio:

$$0 = 1 - \frac{xx}{3.4} + \frac{x^4}{3.4.5.6} - \frac{x^6}{3\ldots8} + \text{etc.}$$

et quoniam eft

$$\text{cof.}\, x = 1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \text{etc.}$$

euidens eft feriei propofitae fummam effe $\frac{2(1 - \text{cof.}\, x)}{xx}$, quae ergo formula, quoties euanefcit, praebebit radicem iftius aequationis. Hoc autem euenit, quoties litterae x fequentes valores tribuuntur:

$$\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \pm 10\pi, \text{etc.}$$

ideoque in genere $\pm 2i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, fi modo excipiatur cafus $i = 0$, fiquidem pofito $x = 0$ fit $\frac{2(1 - \text{cof.}\, x)}{xx} = 1$. Hoc igitur cafu radices ipfius x etiam progreffionem arithmeticam conftituunt, fed cuius differentia non amplius eft π, fed 2π.

§. 4.

§. 4. Hinc igitur concludere licet, numerum omnium radicum huius poſtremae aequationis duplo eſſe minorem quam in binis caſibus antecedentibus, ex quo ſtatui poſſe videtur in hoc poſtremo caſu binas radices in vnam coaleſcere. Nouimus autem ex Analyſi perpetuo binas radices aequationum inter ſe euadere aequales in ipſis limitibus inter radices reales et imaginarias; vnde iam ratio intelligi poteſt, cur, ſi litterae n maiores valores quam 3 tribuantur, omnes radices ſubito fiant imaginariae.

§. 5. Quod quo clarius appareat, ſumamus $n = 4$, vt iam aequatio habeatur

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4\ldots9} + \text{etc.}$$

et quoniam eſt

$$\text{ſin.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \text{etc.}$$

manifeſtum eſt, iſtius ſeriei propoſitae ſummam fore $\frac{6(x - \text{ſin.}\, x)}{x^3}$. Conſtat autem ſemper eſſe $x > \text{ſin.}\, x$, ita vt iſta expreſſio plane nunquam fieri poſſit $= 0$, ne caſu quidem excepto $x = 0$. Interim tamen quia iſta expreſſio reuera euaneſcit, ſumto $x = \infty$, hinc vna ſaltem radix realis ſtatui poſſe videtur, ſiquidem quantitates infinitas admittere velimus.

§. 6. Hinc iam pro certo affirmari poſſe videtur, aequationem generalem propoſitam ſemper habituram eſſe infinitas radices reales tam poſitiuas quam negatiuas, quando numerus n ternarium non ſuperauerit; ſimul ac vero maior ternario accipiatur, tum ſubito omnes plane radices abituras eſſe in imaginarias. Interim tamen nulla methodus adhuc patet, cuius ope omnes illas radices reales aſſignare liceret, praeter caſus iam memoratos, quibus eſt vel $n = 1$, vel

vel $n=2$, vel $n=3$. Quod fi enim pro n accipiatur fractio quaecunque minor quam 3, formula fummam feriei propofitae exprimens tantopere fit transcendens et intricata, vt nullo modo cafus, quibus euanefcit, elici queant.

§. 7. Quae difficultates quo clarius perfpiciantur, inueftigemus generatim fummam feriei propofitae, quam ftatuamus $= \frac{s}{x^{n-1}}$, vt fiat

$$s = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \text{etc.}$$

cuius valorem quo facilius indagare queamus, ftatuamus porro $s = x^{n-1} - z$, vt fit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n\ldots(n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n\ldots(n+5)} - \text{etc.}$$

quae aequatio bis differentiata, fumto elemento ∂x conftante, praebet

$$\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} = x^{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+3}}{n\ldots(n+3)} - \text{etc.} = s,$$

quamobrem habebimus $\frac{\partial \partial z}{\partial x^2} + z = x^{n-1}$, ficque totum negotium huc redit, vt ifta aequatio differentialis fecundi gradus refoluatur.

§. 8. Hanc iam aequationem attentius confideranti facile patebit eam integrabilem duplici modo reddi, fi fcilicet vel per $\partial x \operatorname{cof.} x$ vel per $\partial x \operatorname{fin.} x$ multiplicetur. Cum enim per reductiones confuetas fit

$$\frac{\int \partial \partial z \operatorname{cof.} x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{cof.} x + \int \partial z \operatorname{fin.} x,$$

tum vero $\int \partial z \operatorname{fin.} x = z \operatorname{fin.} x - \int z \partial x \operatorname{cof.} x$, manifeftum eft

fore

fore

$$\frac{\int\partial\partial z\,\text{cof.}\,x}{\partial x} - \int z\,\partial x\,\text{cof.}\,x = \frac{\partial z}{\partial x}\,\text{cof.}\,x + z\,\text{fin.}\,x.$$

Ex quo perſpicuum eſt, ſi noſtra aequatio in $\partial x\,\text{cof.}\,x$ ducatur et integretur, prodire hanc aequationem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\text{cof.}\,x + z\,\text{fin.}\,x = \int x^{n-1}\,\partial x\,\text{cof.}\,x,$$

huius enim differentiatio manifeſto ad aequationem propoſitam deducit.

§. 9. Eodem modo cum ſit:

$$\frac{\int\partial\partial z\,\text{fin.}\,x}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\text{fin.}\,x - \int\partial z\,\text{cof.}\,x,$$

tum vero $\int\partial z\,\text{cof.}\,x = z\,\text{cof.}\,x + \int z\,\partial x\,\text{fin.}\,x$, hinc colligitur

$$\frac{\int\partial\partial z}{\partial x}\,\text{fin.}\,x + \int z\,\partial x\,\text{fin.}\,x = \frac{\partial z}{\partial x}\,\text{fin.}\,x - z\,\text{cof.}\,x;$$

ita vt aequatio noſtra in $\partial x\,\text{fin.}\,x$ ducta et integrata fiat

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\text{fin.}\,x - z\,\text{cof.}\,x = \int x^{n-1}\,\partial x\,\text{fin.}\,x,$$

huius enim differentiatio itidem ad aequationem propoſitam perducit.

§. 10. Quanquam autem hae aequationes tantum ſint differentiales primi gradus, tamen, quoniam duas ſumus aſſecuti, ex earum combinatione, ſine vlteriori integratione, valorem ipſius z elicere poterimus. Si enim a priore aequatione per $\text{fin.}\,x$ multiplicata, ſubtrahamus poſteriorem in $\text{cof.}\,x$ ductam, ſtatim colligitur fore

$$z = \text{fin.}\,x\int x^{n-1}\,\partial x\,\text{cof.}\,x - \text{cof.}\,x\int x^{n-1}\,\partial x\,\text{fin.}\,x,$$

ſicque z per binas formulas integrales determinatur, in quibus binae conſtantes arbitrariae per integrationes ingreſſae contineri ſunt cenſendae; vnde ſi ambo integralia ita accipiamus, vt euaneſcant poſito $x = 0$, integrale completum ita ex-

exhibebitur:

$$z = \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x + A\, \text{fin.}\, x - \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x - B\, \text{cof.}\, x.$$

Cum iam fit

$$z = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^{n+3}}{n \ldots (n+3)} + \frac{x^{n+5}}{n \ldots (n+5)} - \text{etc.}$$

euidens eft fumto $x = 0$ fieri $z = 0$, fi modo fuerit $n + 1 > 0$, id quod femper fupponere licet, quandoquidem etiam ipfe numerus n nihilo maior affumi debet. Ponamus igitur, ad conftantes determinandas, $x = 0$, et quia etiam fit $z = 0$, prodibit $0 = -B$, ideoque $B = 0$. Pro altera autem conftante A definienda contemplemur feriem valorem ipfius $\frac{\partial z}{\partial x}$ exprimentem, quae eft

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+2}}{n \ldots (n+2)} + \frac{x^{n+4}}{n \ldots (n+4)} - \text{etc.}$$

quae pariter euanefcit pofito $x = 0$, fi modo fuerit $n > 0$. At fi aequatio integralis completa differentietur, ob $B = 0$ reperietur:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\, \text{cof.}\, x + \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x + \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x.$$

Quare cum ambae formulae integrales euanefcant pofito $x = 0$, ob $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, hinc fiet $0 = A$, ideoque etiam conftans $A = 0$. Sicque formula integralis ad noftrum cafum accommodata erit

$$z = \text{fin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{cof.}\, x - \text{cof.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{fin.}\, x,$$

fi modo ambo integralia ita capiantur, vt euanefcant pofito $x = 0$. Tum vero pro ipfa feriei propofitae fumma erit $s = x^{n-1} - z$, quae per x^{n-1} diuifa dabit ipfam fummam feriei propofitae.

§. 11.

§. 11. Cum igitur quaeſtio noſtra in eo verſetur, vt pro quouis numero n valores ipſius x aſſignentur, quibus noſtra ſeries

$$1 - \frac{xx}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n\ldots(n+3)} - \frac{x^6}{n\ldots(n+5)} + \text{etc.}$$

euaneſcat, id quod euenit, quoties fuerit $s = 0$, reſolutio huius aequationis:

$$x^{n-1} = \text{ſin.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{coſ.}\, x - \text{coſ.}\, x \int x^{n-1} \partial x \,\text{ſin.}\, x$$

omnes dabit radices quaeſitas x.

§. 12. Euidens autem eſt, reſolutionem huius aequationis vires Analyſeos aeque ſuperare atque ipſam quaeſtionem propoſitam, exceptis iis ſolis caſibus, quos iam ſupra euoluimus, qui ſunt $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$; vnde operae pretium erit ſolutionem modo inuentam ad hos caſus applicare. Sit igitur primo $n = 1$, ideoque $x^{n-1} = 1$, et formula integralis prior dabit $\int \partial x \,\text{coſ.}\, x = \text{ſin.}\, x$, poſterior vero $\int \partial x \,\text{ſin.}\, x = 1 - \text{coſ.}\, x$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra erit

$$1 = \text{ſin.}\, x^2 - \text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, x^2 = 1 - \text{coſ.}\, x,$$

ideoque $\text{coſ.}\, x = 0$, vti per ſe eſt manifeſtum.

§. 13. Pro caſu ſecundo ſit $n = 2$, ideoque $x^{n-1} = x$, et formula integralis prior dabit

$$\int x \partial x \,\text{coſ.}\, x = x \,\text{ſin.}\, x - \int \partial x \,\text{coſ.}\, x = x \,\text{ſin.}\, x + \text{coſ.}\, x - 1,$$

poſterior vero

$$\int x \partial x \,\text{ſin.}\, x = -x \,\text{coſ.}\, x + \int \partial x \,\text{coſ.}\, x = -x \,\text{coſ.}\, x + \text{ſin.}\, x,$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra fit

$$x = x \,\text{ſin.}\, x^2 + x \,\text{coſ.}\, x^2 - \text{ſin.}\, x = x - \text{ſin.}\, x,$$

ideoque $\text{ſin.}\, x = 0$, prorſus vti ſupra habuimus.

§. 14. Pro casu tertio faciamus $n=3$, vt sit $x^{n-1}=xx$, et formula integralis prior dabit

$$\int xx\,\partial x \cos. x = xx \sin. x + 2x \cos. x - 2 \sin. x,$$

posterior vero praebet

$$\int xx\,\partial x \sin. x = -xx \cos. x + 2x \sin. x + 2 \cos. x - 2,$$

quibus inuentis aequatio nostra pro hoc casu erit

$$xx = xx \sin. x^2 + 2x \sin. x \cos. x - 2 \sin. x^2 + 2 \cos. x$$
$$+ xx \cos. x^2 - 2x \sin. x \cos. x - 2 \cos. x^2,$$

siue $xx = xx - 2 + 2\cos. x$, sicque esse oportet $1 - \cos. x = 0$, prorsus vti supra iam notauimus.

§. 15. Talis reductio autem succedit, quoties n fuerit numerus integer positiuus, ad quod ostendendum sit adhuc $n=4$ et $x^{n-1}=x^3$, ac prior formula integralis dabit

$$\int x^3 \partial x \cos. x = x^3 \sin. x - 3\int xx\,\partial x \sin. x, \text{ siue}$$
$$\int x^3 \partial x \cos. x = x^3 \sin. x + 3xx \cos. x - 6x \sin. x - 6 \cos. x + 6,$$

posterior vero

$$\int x^3 \partial x \sin. x = -x^3 \cos. x + 3\int xx\,\partial x \cos. x, \text{ siue}$$
$$\int x^3 \partial x \sin. x = -x^3 \cos. x + 3xx \sin. x + 6x \cos. x - 6 \sin. x,$$

ex quibus conficitur

$$x^3 = x^3 \sin. x^2 + 3xx \sin. x \cos. x - 6x \sin. x^2 - 6x \sin. x \cos. x + 6 \sin. x$$
$$+ x^3 \cos. x^2 - 3xx \sin. x \cos. x - 6x \cos. x^2 + 6x \sin. x \cos. x,$$

siue $x^3 = x^3 - 6x + 6 \sin. x$, ita vt esse debeat $x - \sin. x = 0$ prorsus vt supra. Huiusmodi autem expressiones pro casibus quibus n est numerus integer, facillime ex notissimis seriebus ipsius $\sin. x$ et $\cos. x$ deriuare licet.

§. 16. Quoniam igitur satis certi sumus, casibus quibus $n < 3$ aequationem propositam infinitas habere radices rea-

reales, maxime optandum esset, vt etiam istae radices, quando n non est numerus integer, assignari possent; verum in hoc negotio vires Analyseos deficiunt, atque nos contentos esse oportet, si modo has radices vero proxime exhibere valeamus. Consideremus igitur casum $n = \frac{1}{2}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$0 = 1 - \frac{4xx}{1.3} + \frac{16x^4}{1.3.5.7} - \frac{64x^6}{1 \ldots 11} + \text{etc.}$$

siue posito breuitatis gratia $4xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1.3} + \frac{zz}{1 \ldots 7} - \frac{z^3}{1 \ldots 11} + \frac{z^4}{1 \ldots 15} - \text{etc.}$$

vbi ii ipsius z valores requiruntur, qui summam huius seriei nihilo aequalem reddant.

§. 17. Hic primum notasse iuuabit, quoties fuerit $z < 3$, summam seriei semper esse positiuam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{2}$, minorem vero quam $\frac{3}{4}$. Nam si series habeatur $1 - a + b - c + d - e +$ etc. cuius omnes termini 1, a, b, c, d, etc. continuo decrescant, notum est, si ponatur $1 - a = \alpha$; $1 - 2a + b = \beta$; $1 - 3a + 3b - c = \gamma$; etc. tum summam fore $= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} + \frac{\gamma}{16} +$ etc. Vnde si tantum duo primi termini sumantur, summa maior erit quam $\frac{1}{2} + \frac{1-a}{4} = \frac{3-a}{4}$. Ex quo perspicuum est, nostram seriem nihilo aequalem fieri non posse, nisi sit $z > 3$. Hanc ob rem aequatio nostra ita repraesentetur:

$$0 = 1 - \frac{z}{3}\left(1 - \frac{z}{5.7} + \frac{zz}{5.7.9} - \frac{z^3}{5 \ldots 11} + \text{etc.}\right)$$

§. 18. Quod si iam fuerit $z < 5.7$, in hac postrema serie omnes termini continuo decrescunt, ideoque eius summa proxime erit $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{5.7}$. Ponamus igitur, vt fractiones euitentur, $\frac{z}{5.7} = v$, et habebimus hanc aequationem:

1 =

$$1 = \frac{z}{3} \cdot \frac{3 - v}{4} = \frac{35\, v\, (3 - v)}{12},$$

hinc ergo erit $\frac{12}{35} = 3\, v - v\, v$, ſiue $-\frac{12}{35} = v\, v - 3\, v$. Addamus vtrinque $\frac{9}{4}$ et habebimus $\frac{9}{4} - \frac{12}{35} = (v - \frac{3}{2})^2$, vnde extracta radice in fractionibus decimalibus erit $v - \frac{3}{2} = \pm 1, 380$, cuius minor valor praebet $v = 0, 120$. Hinc ergo erit $z = 4, 20 = 4\, x\, x$, vnde porro erit $2\, x = 2, 05$, ideoque $x = 1, 025$. Hunc autem valorem a vero multum aberrare mox videbimus, ſi rem accuratius definire velimus.

§. 19. In hunc finem autem commode adhiberi poterit methodus Celeb. *Bernoullii*, radicem minimam huiusmodi aequationum per ſeriem recurrentem definiendi. Si enim in genere habeatur huiusmodi aequatio:

$$1 = \alpha\, z - \beta\, z\, z + \gamma\, z^3 - \text{etc.}$$

indeque formetur ſeries recurrens ex ſcala relationis α, $-\beta$, $+\gamma$, $-\delta$, etc. quae ſit 1, A, B, C, D, E, etc. ita vt ſit

$$\begin{aligned} A &= \alpha; \\ B &= \alpha\, A - \beta; \\ C &= \alpha\, B - \beta\, A + \gamma; \\ D &= \alpha\, C - \beta\, B + \gamma\, A - \delta; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

tum ſequentes fractiones $\frac{1}{A}$, $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{D}$, etc. continuo propius ad verum valorem ipſius z accedunt, vnde patet hac methodo noſtram aequationem in genere reſolui poſſe.

§. 20. Cum igitur pro noſtro caſu, quo $n = \frac{1}{2}$ et $4\, x\, x = z$, ſit

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{1}{3.5.7},\ \gamma = \frac{1}{3.5.7.9.11},\ \delta = \frac{1}{3\ldots 15},\ \text{etc.}$$

in fractionibus decimalibus erit

$$A = 0, 33333,$$

B =

$B = 0,11111 - 0,00952 = 0,10159,$

$C = 0,03386 - 0,00317 + 0,00010 = 0,03079,$

vlterius progredi foret superfluum. Hinc fractiones continuo propius ad z accedentes erunt:

I. $z = 3,000$, II. $z = 3,281$, III. $z = 3,291$.

§. 21. Sin autem vlterius progredi velimus, reperiemus

$D = 0,01029 - 0,00097 = 0,00932,$

hinc ergo quartus valor pro z erit $\frac{C}{D} = 3,304$; vnde satis tuto concludere possumus, verum valorem ipsius z esse tantillo maiorem, quamobrem sumamus $z = 3,31$, et cum sit $z = 4xx$, extracta radice erit $2x = 1,819$, ideoque $x = 0,909$.

§. 22. Satis audacter igitur affirmare possumus, casu quo $n = \frac{1}{2}$ minimam nostrae aequationis radicem esse $x = 0,909$, quae ergo notabiliter minor est quam pro casu $n = 1$, vbi erat minima radix $x = \frac{\pi}{2} = 1,571$; attamen maior est quam huius semissis. Videamus igitur, quamnam rationem hi duo numeri $0,909$ et $1,571$ inter se proxime teneant. Diuidamus ergo maiorem per minorem, et continuo per residuum praecedentem diuisorem, et quoti resultantes erunt ordine $1, 1, 2, 1, 2, 8$, vnde fractiones continuo propius ad verum accedentes sunt $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}$. Hinc colligimus numerum inuentum $0,909$ se habere ad $\frac{\pi}{2}$ vti $11 : 19$, siue satis prope vt 4 ad 7, quae ratio cum satis exacte accedat ad rationem $1 : \sqrt{3}$, hinc suspicari merito licet, verum valorem ipsius x esse $x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

§. 23. Quo autem certiores reddamur circa hanc suspicionem, euoluamus simili modo alium casum, quo $n = \frac{1}{4}$, examinaturi, num minimus valor ipsius x etiam ad tam sim-

 plicem

plicem formam reduci queat. Tum autem, posito breuitatis gratia $16xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$1 - \frac{z}{1.5} + \frac{zz}{1.5.9.13} - \frac{z^4}{1.\ldots.21} + \text{etc.}$$

cuius radix minima vt methodo Bernoulliana inuestigetur, erit $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{5.9.13}$, $\gamma = \frac{1}{5.9.13.17.21}$, vnde series recurrens in fractionibus decimalibus erit

$A = 0,2000000$,

$B = 0,0400000 - 0,0017094 = 0,0382906$,

$C = 0,0076581 - 0,0003419 + 0,0000048 = 0,0073210$,

$D = 0,0014642 - 0,0000655 + 0,0000010 = 0,0013997$.

Hinc ergo fractiones continuo propius ad fractionem z appropinquantes erunt

I. $z = 5,0000$; II. $z = 5,2232$; III. $z = 5,2302$;
IV. $z = 4,2304$.

Vnde patet satis tuto concludi posse $z = 5,2305 = 16xx$, hinc extracta radice fit $4x = 2,2870$, ideoque $x = 0,5717$.

§. 25. Vt iam exploremus, vtrum iste valor pro x inuentus simplicem quandam teneat rationem ad π, id commodius in quadratis dispicietur, quaerendo valorem $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,4798764$, cui respondet numerus $30,191$; vnde suspicari licet verum valorem fortasse esse $= 30$, ita vt sit $xx = \frac{\pi\pi}{30}$, ideoque $x = \frac{\pi}{\sqrt{30}}$. At vero numerus 30 satis est notatu dignus et suspicionem nostram ideo augere videtur, quod in omnibus huiusmodi casibus radices x satis commode per peripheriam circuli π repraesentare liceat. Operae pretium igitur erit adhuc alios casus huius generis examinasse.

§. 26.

§. 26. Sumamus igitur $n = \frac{1}{3}$, et posito $9xx = z$, aequatio resoluenda erit

$$0 = 1 - \frac{z}{1 \cdot 4} + \frac{zz}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} - \frac{z^3}{1 \cdot \ldots 16} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10},\ \gamma = \frac{\beta}{13 \cdot 16},\ \delta = \frac{\gamma}{19 \cdot 22},\ \text{etc.}$$

Hinc termini seriei recurrentis erunt

$A = 0,2500000$,

$B = 0,0625000 - 0,0035714 = 0,0589286$,

$C = 0,0147321 - 0,0008928 + 0,0000172 = 0,0138565$

$D = 0,0034641 - 0,0002105 + 0,0000043 = 0,0032579$.

Hinc igitur pro z oriuntur sequentes valores:

I. $z = 4,0000$;

II. $z = 4,2424$;

III. $z = 4,2528$;

IV. $z = 4,2532$;

vnde tuto statuere licet $z = 4,2534$.

§. 27. Cum igitur sit $z = 9xx$, erit $3x = 2,0624$, ideoque $x = 0,6875$. At pro ratione huius numeri ad peripheriam circuli π detegenda consideretur fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$, cuius logarithmus est $= 1,3198060$, ideoque $\frac{\pi\pi}{xx} = 20,883$ qui numerus ita est comparatus, vt omnem spem euertat, quempiam ordinem in his valoribus detegendi, qui ergo ad quantitates magis transcendentes erunt referendi.

§. 28. Ex his exemplis patet, quo minor fractio pro n accipiatur, eo promptius seriem recurrentem dare verum valorem ipsius z, ita vt sufficiat statuisse $z = \frac{A}{B}$, si

modo

modo fuerit $n < \frac{1}{3}$. Statuamus igitur in genere $n = \frac{1}{\nu}$, et posito $\nu\nu xx = z$ aequatio nostra erit

$$1 - \frac{z}{1+\nu} + \frac{zz}{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)} - \frac{z^3}{(1+\nu)\dots(1+5\nu)},$$

vnde fit $\alpha = \frac{1}{1+\nu}$, $\beta = \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, hincque

$$A = \alpha = \frac{1}{1+\nu} \text{ et}$$
$$B = \alpha A - \frac{\alpha}{(1+2\nu)(1+3\nu)}.$$

Quia igitur $\alpha = A$, erit $B = \alpha A - \frac{A}{(1+2\nu)(1+3\nu)}$, vnde statim elicitur

$$z = \frac{A}{B} = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{(1+2\nu)(1+3\nu)-(1+\nu)}, \text{ siue}$$
$$z = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{4\nu+6\nu\nu}.$$

§. 29. Cum igitur sit $z = \nu\nu xx$, erit

$$xx = \frac{(1+\nu)(1+2\nu)(1+3\nu)}{2\nu^3(2+3\nu)}$$

ex quo valore manifestum est fieri non posse vt fractio $\frac{\pi\pi}{xx}$ praebeat numerum integrum, quemadmodum sumus suspicati, sed potius valores ipsius x ad altiora genera quantitatum transcendentium esse referendos; quemadmodum etiam valores ipsius seriei, casibus quibus n est numerus fractus, quantitates transcendentes altioris ordinis inuoluunt.

§. 30. Quando autem numerus n non est fractio tam parua, vti hic assumsimus, atque adeo si n superet vnitatem, seriem recurrentem ad multo plures terminos continuari necesse erit. Quod quo clarius perspiciatur, euoluamus casum quo $n = 3$, qui est extremus, qui adhuc radices reales implicat, quarum minimam nouimus esse $x = 2\pi$. Cum igitur aequatio nostra, posito $xx = z$, fit

o =

$$0 = 1 - \frac{z}{3.4} + \frac{zz}{3.4.5.6} - \frac{z^3}{3.\ldots.8} + \text{etc.}$$

ideoque habebimus

$$\alpha = \frac{1}{3.4},\ \beta = \frac{\alpha}{5.6},\ \gamma = \frac{\beta}{7.8},\ \delta = \frac{\gamma}{9.10},\ \text{etc.}$$

vnde in fractionibus decimalibus termini feriei recurrentis post primum, qui est $= 1$, erunt

$A = 0,0833333,$

$B = 0,0069444 - 0,0027777 = 0,0041667,$

$C = 0,0003472 - 0,0002315 + 0,0000496 = 0,0001653$

$$D = \begin{matrix} 0,0000138 - 0,0000116 \\ + 0,0000041 - 0,0000005 \end{matrix} = 0,0000058$$

$$E = \begin{matrix} 0,0000005 - 0,0000004 \\ + 0,0000002 - 0,0000000 \end{matrix} = 0,0000003.$$

§. 31. His terminis inuentis fractiones pro numero z erunt sequentes:

I. $z = \frac{1}{A} = 12,000$ IV. $z = \frac{C}{D} = 28,400,$

II. $z = \frac{A}{B} = 20,000$ V. $z = \frac{D}{E} = 19,333,$

III. $z = \frac{B}{C} = 25,206$ maxime incerta.

Quoniam autem constat reuera esse $z = xx = 4\pi\pi$, verus valor erit $z = 39,478$. Valores igitur inuenti nimis lente ad veritatem accedunt, ita vt hoc modo, etiamsi calculus ad plures terminos continuetur, nunquam satis prope verum valorem inuenire licuisset.

§. 32. Quoniam autem casus $n = 3$ est extremus eorum qui radicem realem admittunt, necesse est vt pro omnibus casibus, quibus $n > 3$, valores ex serie recurrente formati non solum non conuergant, sed adeo diuergant. Interim tamen, quoniam cafibus, quibus n erat numerus integer, omnes radices tam concinne per quadraturam circuli exhibere licuit, fufpicari poterimus, fi modo n fuerit numerus integer, etiam radices imaginarias per circulum fortaffe exhiberi poffe, id quod vnico cafu examinaffe non erit alienum, propterea quod nulla via patet factores trinomiales inueftigandi.

§. 33. Euoluamus igitur cafum quo $n = 4$ et aequatio euoluenda haec:

$$0 = 1 - \frac{xx}{4.5} + \frac{x^4}{4.5.6.7} - \frac{x^6}{4.\ldots.9} + \text{etc.}$$

quam ad hanc fimpliciorem formam reuocari fupra vidimus: $x = \text{fin.}\, x$, cui aequationi cum manifefto nulla radix realis fatisfaciat, omnes autem quantitates imaginariae in forma $a + b\sqrt{-1}$ comprehendi queant, ftatuamus $x = a + b\sqrt{-1}$, et quaeftio huc redit, quomodo etiam fin. x per talem formam exprimi poffit. Ad hoc praeftandum confugiamus ad formulas exponentiales, quibus eft

$$\text{fin.}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cum igitur fit

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}} . e^{-b} \text{ et}$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = e^{-a\sqrt{-1}} . e^{+b}.$$

viciffim erit

$$e^{a\sqrt{-1}} = \text{cof.}\, a + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, a \text{ et}$$
$$e^{-a\sqrt{-1}} = \text{cof.}\, a - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, a,$$

quibus valoribus fubftitutis colligimus fore

$$\text{fin.}\, x = \frac{\text{cof.}\, a\,(e^{-b} - e^{+b}) + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, a\,(e^{-b} + e^{+b})}{2\sqrt{-1}}.$$

§. 34.

§. 34. Cum igitur per hypotheſin eſſe debeat ſin. $x = x = a + b\sqrt{-1}$, erit $2\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,x = 2a\sqrt{-1} - 2b$, quae ergo expreſſio ſuperiori debet eſſe aequalis, id quod fieri nequit, niſi partes reales et imaginariae ſeorſim inter ſe aequentur, vnde ſequentes duae aequationes emergunt:

$$2a\,\text{sin.}\,a\,(e^{-b} + e^{+b}) \text{ et } 2b = \text{cos.}\,a\,(e^{+b} - e^{-b}),$$

vnde concludimus

$$\text{cos.}\,a = \frac{2b}{e^{b} - e^{-b}} \text{ et } \text{sin.}\,a = \frac{2a}{e^{b} + e^{-b}}.$$

Hinc autem primo eliminare poterimus ſin. a et coſ. a: additis enim quadratis prodit

$$1 = \frac{4bb}{(e^{b} - e^{-b})^2} + \frac{4aa}{(e^{b} + e^{-b})^2}.$$

Deinde etiam quantitates exponentiales eliminari poſſunt. Cum enim fit

$$e^{b} + e^{-b} = \frac{2a}{\text{sin.}\,a} \text{ et } e^{b} - e^{-b} = \frac{2b}{\text{cos.}\,a},$$

ſubtrahatur quadratum poſterioris aequationis a quadrato prioris, ac remanebit $1 = \frac{aa}{\text{sin.}\,a^2} - \frac{bb}{\text{cos.}\,a^2}$, vnde fit $bb = aa\,\text{cot.}\,a^2 - \text{cos.}\,a^2$; ex priore autem quantitas a per alteram b definiri poſſet hoc modo:

$$4aa = (e^{b} + e^{-b})^2 - \frac{4bb\,(e^{b} + e^{-b})^2}{(e^{b} - e^{-b})^2}.$$

§. 35. Ex binis autem formulis primo inuentis, quae erant: $\text{cos.}\,a = \frac{2b}{e^{b} - e^{-b}}$ et $\text{sin.}\,a = \frac{aa}{e^{b} + e^{-b}}$, intelligitur, eas non mutari, etiamſi loco b ſcribatur $-b$; deinde vero etiam nulla variatio oritur, etiamſi loco a ſcribatur $-a$; vnde ſi fuerit $x = a + b\sqrt{-1}$, ſimul tres alii valo-

valores imaginarii locum habebunt, qui omnes in hac forma dupliciter ambigua continentur: $x = \pm a \pm b \sqrt{-1}$.

§. 36. Sufficiet igitur solos valores positiuos pro a consideraffe, ac primo quidem patet, hinc omnes angulos excludi, quorum vel sinus vel cosinus est negatiuus; vnde nulli alii relinquuntur, nisi qui continentur in hac forma: $2 i \pi + \alpha$, existente $\alpha < 90^0$, denotante i numerum integrum quemcunque. Ex casu quidem $i = 0$ statim se prodit casus $a = 0$ et $b = 0$, qui autem instituto nostro est alienus, vnde nobis a casu $i = 1$ erit inchoandum, ponendo $a = 2 \pi + \alpha$, sicque aequationes nostrae erunt

$$\text{cos. } \alpha = \frac{2 b}{e^b - e^{-b}} \text{ et sin. } \alpha = \frac{4 \pi + 2 \alpha}{e^b + e^{-b}},$$

vbi cum sit $4 \pi + 2 \alpha > 12$, multo magis formula $e^b + e^{-b}$ superare debet numerum 12, vnde b notabiliter maius esse debet quam , ac fortasse non multum a ternario differt. Tum autem ob $e^b > 12$ ex priori formula certe erit cos. $\alpha < \frac{2 b}{12} < \frac{1}{2}$; vnde sequitur angulum α excedere debere 60^0; quamobrem ponamus $\alpha = 90^0 - \omega$, siue $a = \frac{5}{2} \pi - \omega$, et iam nostrae aequationes erunt $\text{sin. } \omega = \frac{2 b}{e^b - e^{-b}}$ et $\text{cos. } \omega = \frac{5 \pi - 2 \omega}{e^b + e^{-b}}$. Quaeruntur igitur valores litterarum ω et b, vt his ambabus aequationibus satisfiat; verum ad hoc nulla alia via patet, nisi vt tentando continuo propius ad earum valores progrediamur.

§. 37. Ne autem formulae exponentiales nobis calculum perturbent, statuamus $e^b = n$, vt sit $e^{-b} = \frac{1}{n}$; tum autem, logarithmis hyperbolicis sumendis, erit $b = l\, n$. Quo igitur

igitur logarithmis vulgaribus vti queamus, fiet

$$b = 2,30258509\, l\, n,$$

quippe qui numerus eſt logarithmus hyperbolicus denarii, vnde ex numero n facile colligitur b per logarithmos, cum ſit $l\, b = l\, l\, n + 0,3622156$. Hinc vero ſimul patet, ſi numerus n exiguum capiat incrementum ∂n, tum incrementum litterae b futurum eſſe $= \frac{\partial n}{n}$, et ſi accuratius deſideremus hoc incrementum, erit

$$= \frac{\partial n}{n} - \frac{\partial n^2}{2nn} + \frac{\partial n^3}{3n^3} - \text{etc.}$$

§. 38. Quod autem ad angulum ω attinet, ſi eum in minutis ſecundis expreſſum habeamus, quorum numerus ſit N, tum idem angulus ω in partibus radii expreſſus reperietur, ſi ad l N addatur iſte logarithmus conſtans 4,6855749; numerus enim reſpondens dabit quaeſitum.

§. 39. Nunc tentamen incipiamus, ponendo $n = 20$, vnde primo quaeramus b hoc modo:

$$\begin{aligned} l\, n &= 1,30103, \\ l\, l\, n &= 0,1142873, \\ \text{add.}\ & \ 0,3622156, \\ l\, b &= 0,4765029, \\ \text{ergo}\ b &= 2,9957. \end{aligned}$$

Cum iam prior aequatio ſit ſin. $\omega = \frac{2\, b}{n - \frac{1}{n}}$, altera vero coſ. $\omega = \frac{5\pi - 2\omega}{n + \frac{1}{n}}$, pro priore erit $n - \frac{1}{n} = 19,950$, eiusque ſemiſſis $= 9,9750$, vnde colligimus l ſin. $\omega = 9,4775900$, ergo

ergo angulus $\omega = 17^0. 28'$, ideoque in minutis ſecundis $\omega = 62880''$, conſequenter in partibus radii $\omega = 0,30485$. Hinc pro altera aequatione habebitur l coſ. $\omega = 9,9794991$. Pro parte dextra vero eſt primo numerator $5\pi - 2\omega = 15,098216$, eiusque logarithmus $= 1,1789256$, at denominator erit $n + \frac{1}{n} = 20,050$, vnde logarithmus partis dextrae erit $9,8763112$, qui minis eſt paruus; vnde concludimus denominatorem minorem eſſe debere, ideoque $n < 20$.

§. 40. Tribuamus igitur numero n minorem valorem, puta 18, atque totum calculum in ſequenti ſchemate adiiciamus:

	$n = 18$	$n = 16$	$n = 15,9333$
$l\,n$	1,2552725	1,2041200	1,2022985
$l\,l\,n$	0,0987379	0,0806699	0,0800125
add.	0,3622156	0,3622156	0,3622156
$l\,b$	0,4609535	0,442885[illegible]	0,4422281
$\frac{1}{n}$	0,05555	0,06250	0,06276
$n - \frac{1}{n}$	17,94444	15,93750	15,87057
$n + \frac{1}{n}$	18,05555	16,06250	15,99609
$l\,2\,b$	0,7619835	0,7439155	0,7432581
$l\,n - \frac{1}{n}$	1,2539300	1,2024202	1,2005925
l ſin. ω	1,5080535	9,5414953	9,5426656
ω	$18^0, 47'$	$20^0. 22'$	$20^0. 25'. 6''$.
N	67620	73320	73506
l N	4,8300752	4,8652225	4,8663228
add.	4,6855749	4,6855759	4,6855749
$l\,\omega$	9,5156501	9,5507974	9,5518977

ω

ω	0, 32783	0, 35547	0, 35637
2ω	0, 65566	0, 71094	0, 71274
2ω	0, 65566	0, 71094	0, 71274
5π	15, 70796	15, 70796	15, 70796
$5\pi - 2\omega$	15, 05230	14, 99702	14, 99522
$l(5\pi - 2\omega)$	1, 1776029	1, 1760050	1, 1759529
$l(n + \frac{1}{n})$	1, 2565975	1, 2058131	1, 2040138
. . . . .	9, 9210054	9, 9701919	9, 9719391
l cof. ω	9, 9762321	9, 9719642	9, 9718186
error	0, 0552267 —	0, 0017723 —	0, 0001205 +

§. 41. In prima ergo columna error prodiit —0,0552267, qui cafu $n = 20$ erat —0, 1026879, vnde conclufimus valorem ipfius n adhuc effe nimis magnum, ideoque fecundam columnam adiunximus, ponendo $n = 16$. At ex fecunda columna prodiit error —0, 0017723; quare cum prima columna dediffet errorem —0, 0552267, et differentia 0, 0534544 orta fit ex differentia hypothefium 2, fiat vt 5345 : 2 = 177 : 0, 066, et tanta fractione numerus $n = 16$ diminui debebit. Ponatur ergo pro tertia columna $n =$ 15, 9333, fiatque calculus vt in prioribus, atque error inde refultans reuera pro nihilo haberi poteft, ita vt iam certi fimus effe $a = 7, 49761$ et $b = 2, 76840$.

§. 42. Inuentis igitur litteris a et b nulla ratio fimplex inter eas deprehenditur, neque vero etiam ad peripheriam π notabilem rationem tenent. Confideremus autem

tem ipſum factorem trinomialem, ex quo haec radix imaginaria eſt nata, qui eſt

$$yy \pm 2ay + aa + bb,$$

et ex valoribus inuentis reperitur

$$aa + bb = 63, 87821,$$

qui numerus cum neque inſigni proprietate gaudeat, neque etiam ad $\pi\pi$ rationem teneat ſimplicem, omnis ſpes euaneſcit, factores trinomiales aequationis propoſitae ſimplici modo exprimendi, qui ergo etiam ſine dubio altiores quantitates tranſcendentes inuoluunt. Interim tamen confido, tractationem huius argumenti, in quo nonnulla egregia artificia occurrunt, Geometris non eſſe diſpliciturum.