1795

De singulari genere quaestionum Diophantearum et methodo maxime recondita eas resolvendi

Leonhard Euler

DE SINGVLARI GENERE QVAESTIONVM DIOPHANTEARVM ET METHODO MAXIME RECONDITA EAS RESOLVENDI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuentui exhibit die 13 Ianuar. 1777.

§. 1.

Notum est omnes potestates numerorum huius formae: $aa + nbb$ semper esse similis formae, scilicet $xx + nyy$; vnde si proponatur numerus $N = aa + nbb$, eius potestas quaecunque N^λ semper exprimi poterit per talem formulam: $N^\lambda = xx + nyy$, vbi pro singulis potestatibus numeri N tam x quam y certos valores sortientur. Erit enim

$$N^2 = (aa - nbb)^2 + n(2ab)^2;$$

$$N^3 = (a^3 - 3nabb)^2 + n(3aab - nb^3)^2;$$

$$N^4 = (a^4 - 6naabb + nnb^4)^2 + n(4a^3b - 4nab^3)^2;$$

vnde lex progressionis iam satis elucet, et facile potestates, quovsque lubuerit, continuari poterunt, ope huius Lemmatis, quod si fuerit

N =

$$N = aa + nbb \text{ et } M = cc + n\partial\partial$$

semper fit

$$MN = (ac - nb\partial)^2 + n(a\partial + bc)^2.$$

§. 2. Cum igitur, si fuerit $N = aa + nbb$, omnes eius potestates eandem habeant formam, ita vt fit $N^\lambda = xx + nyy$, nouum genus quaestionum, quas hic tractare institui, in hoc consistit, vt eae potestates ipsius N inuestigentur, in quibus vel numerus x vel y euadat minimus, seu ipsi vnitati aequalis. Quoniam enim hi numeri nunquam euanescunt, in integris etiam minorem valorem quam 1 recipere non poterunt; manifestum autem est in methodo Diophantea nullam reperiri viam huiusmodi quaestiones resoluendi.

§. 3. Quo indoles huiusmodi quaestionum clarius percipiatur, consideremus omnes potestates binarii, quae semper in hac forma $xx + 7yy$ contineri deprehenduntur, si modo pro prima et secunda potestate etiam fractiones admittantur, si quidem habebitur

$$2 = (\tfrac{1}{2})^2 + 7(\tfrac{1}{2})^2 \text{ et } 4 = (\tfrac{3}{2})^2 + 7(\tfrac{1}{2})^2;$$

altiores vero potestates omnes in integris tali forma exhiberi possunt, quemadmodum ex sequentibus exemplis elucet:

$$
\begin{aligned}
2^3 &= 8 = (1)^2 + 7(1)^2, \text{ ergo } x = 1 \text{ et } y = 1,\\
2^4 &= 16 = (3)^2 + 7(1)^2, \text{ ergo } x = 3 \text{ et } y = 1,\\
2^5 &= 32 = (5)^2 + 7(1)^2, \text{ ergo } x = 5 \text{ et } y = 1,\\
2^6 &= 64 = (1)^2 + 7(3)^2, \text{ ergo } x = 1 \text{ et } y = 3,\\
2^7 &= 128 = (11)^2 + 7(1)^2, \text{ ergo } x = 11 \text{ et } y = 1,\\
2^8 &= 256 = (9)^2 + 7(5)^2, \text{ ergo } x = 9 \text{ et } y = 5,\\
2^9 &= 512 = (13)^2 + 7(7)^2, \text{ ergo } x = 13 \text{ et } y = 7,\\
2^{10} &= 1024 = (31)^2 + 7(3)^2, \text{ ergo } x = 31 \text{ et } y = 3.
\end{aligned}
$$

Vbi imprimis moneri oportet, in his resolutionibus pro x et y alios numeros non esse admittendos, nisi qui inter se sint primi, si quidem numeri compositi nulla difficultate laborant; namque si in genere fuerit $N^\lambda = xx + nyy$, erit quoque $N^{\lambda+2} = (Nx)^2 + n(Ny)^2$, hanc ob causam hic perpetuo numeros x et y inter se primos assumi conueniet.

§. 4. Quodsi ergo in casu allato $2^\lambda = xx + 7yy$ quantitas y debeat esse minima, ea manifesto vnitati debet esse aequalis, ideoque quaestio huc reducitur, quinam numeri pro x accipi queant, vt formula $xx+7$ exhibeat potestatem binarii. Ex exemplis autem superioribus patet, id fieri casibus $x = 3$, $x = 5$, $x = 11$, dehinc autem alius casus non occurrit, vsque ad $x = 181$, hinc enim prodit $(181)^2 + 7 = 2^{15}$, sicque requiritur methodus hos casus a priori inuestigendi. His praemissis vis sequentis problematis haud difficulter perspicietur.

Problema generale.

Si fuerit $N = aa + nbb$, eas inuestigare potestates ipsius N, quibus fiat $N^\lambda = xx + n$, quo casu vtique valor ipsius y in formula generali $xx + nyy$ euadit omnium minimus.

Solutio.

§. 5. Hic plurimum iuuabit, formulam $aa + nbb$ in suos factores imaginorios resoluisse, quippe quae resolutio iam summum vsum in Analysi praestitit; erit igitur

$$N = (a + b\sqrt{-n})(a - b\sqrt{-n}),$$

vnde quaelibet potestas in genere hoc modo exprimetur:

$$N^\lambda = (a + b\sqrt{-n})^\lambda (a - b\sqrt{-n})^\lambda.$$

Talium autem formularum potestates semper simili ratione exprimuntur, vnde si fuerit $(a + b\sqrt{-n})^\lambda = A + B\sqrt{-n}$, erit $(a - b\sqrt{-n})^\lambda = A - B\sqrt{-n}$, hincque facta multiplicatione habebitur $N^\lambda = A^2 + nB^2$; sicque quaestio huc redit, quibusnam casibus valor litterae B vnitati euadat aequalis; quodsi forte fieri nequeat, ii saltem casus quaerantur, quibus littera B minimum accipiet valorem.

§. 6. Quo autem hoc minimum litterae B perscrutari queamus, recurramus ad formulam notissimam imaginariorum, cui vniuersa theoria angulorum plerumque innititur, scilicet $\cos.\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\Phi$, quippe cuius omnes potestates simili modo exprimi possunt, cum sit

$$(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi)^\lambda = \cos.\lambda\Phi + \sqrt{-1}\sin.\lambda\Phi.$$

Hunc in finem statuamus

$$a + b\sqrt{-n} = p(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi),$$

atque esse oportebit $a = p\cos.\Phi$; $b\sqrt{n} = p\sin.\Phi$, vnde colligitur $\tang.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, hincque porro

$$\sin.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{(aa + nbb)}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{a}{\sqrt{(aa + nbb)}}.$$

Inuento autem angulo Φ factor ille realis p colligitur fore $p = \sqrt{(aa + nbb)}$. Quare cum sit $N = aa + nbb$, quaeratur angulus Φ, vt sit $\tang.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, siue

$$\sin.\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{N}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{a}{\sqrt{N}};$$

et quia tum erit $p = \sqrt{N}$, ista transformatio nobis praebet

$$(a + b\sqrt{-n}) = \sqrt{N}(\cos.\Phi + \sqrt{-1}\sin.\Phi),$$

ideoque etiam

$$a - b\sqrt{-n} = \sqrt{N}(\cos.\Phi - \sqrt{-1}\sin.\Phi).$$

§. 7. His iam formulis introductis erit potestas quaecunque ipsius N, scilicet

$$N^\lambda = N^{\frac{\lambda}{2}} (\text{cos.}\, \lambda\Phi + \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, \lambda\Phi).\ N^{\frac{\lambda}{2}} (\text{cos.}\, \lambda\Phi - \sqrt{-1}\, \text{sin.}\, \lambda\Phi),$$

vnde facta euolutione prodit aequatio identica $N^\lambda = N^\lambda$. At vero si ponamus, vti fecimus, $N^\lambda = (A + B\sqrt{-n})\,(A - B\sqrt{-n})$, litterae A et B ita definientur, vt sit

$$A = N^{\frac{\lambda}{2}} \text{cos.}\, \lambda\Phi \text{ et } B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{sin.}\, \lambda\Phi}{\sqrt{n}},$$

hincque erit $N^\lambda = A^2 + nB^2$.

§. 8. Cum igitur ii casus quaerantur, quibus littera B minimum sortitur valorem, quaestio huc redit, vt pro λ ii inuestigentur numeri integri, quibus haec formula $\frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{sin.}\, \lambda\Phi}{\sqrt{n}}$ minimum adipiscatur valorem, quod manifesto eueniet, si $\text{sin.}\, \lambda\Phi$ minimum valorem accipiet, quod vtique eueniret, si angulus $\lambda\Phi$ fieret vel π, vel 2π, vel 3π, vel 4π, etc. vel in genere $i\pi$ denotante i numerum quemcunque integrum, π vero angulum duobus rectis aequalem, tum enim adeo prodiret $\text{sin.}\, \lambda\Phi = 0$, ideoque etiam $B = 0$. Quoniam autem plerumque angulus Φ cum peripheria circuli est incommensurabilis, fieri nequit, vt euadat $\lambda\Phi = i\pi$. In eos igitur casus inquirere debemus, quibus angulus $\lambda\Phi$ quam minime discrepet ab $i\pi$. Quodsi enim fuerit $\lambda\Phi = i\pi + \omega$, denotante ω angulum valde paruum, tum vtique erit $\text{sin.}\, \lambda\Phi = \pm\, \text{sin.}\, \omega$. His ergo casibus formula nostra $B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{sin.}\, \lambda\Phi}{\sqrt{n}}$ vtique eo minorem accipiet valorem, quo minor fuerit angulus ω; vbi quidem probe perpendi oportet, quando λ fuerit numerus satis magnus, tum valorem litterae B vnitatem excedere posse, etiamsi angulus ω fuerit

fuerit quam minimus. Interim tamen perſpicuum eſt, hac methodo omnes valores exponentis λ prodire debere, quibus littera B minimos adipiſcitur valores, etiamſi non omnes ſint $= 1$, ſimul vero hoc modo omnes caſus, quibus ſit $B = 1$, certe reperiri debere.

§. 9. Cum igitur proxime eſſe oporteat $\lambda \Phi = i \pi$ proxime quoque erit $\frac{\lambda}{i} = \frac{\pi}{\Phi}$. Quamobrem ſi methodo iam fatis nota omnes fractiones quaerantur, quae proxime accedant ad fractionem $\frac{\pi}{\Phi}$, harum fractionem numeratores dabunt valores exponentis λ, denominatores vero ipſius i; et quo accuratius iſtae fractiones cum fractione $\frac{\pi}{\Phi}$ conuenient, eo minores valores pro littera B reſultabunt, quorum omnium minimi erunt ii, quibus fit $B = 1$.

Exemplum 1.

§. 10. Euoluamus ſecundum haec praecepta caſum, quo $a = 1$; $b = 1$ et $n = 2$, ita vt numerus noſter propoſitus ſit $N = 3$, atque $3^{\lambda} = A^2 + 2 B^2$, ſicque eae poteſtates ternarii inueſtigari debeant, quibus fiat $3^{\lambda} = A^2 + 2$, quod euenit caſu $B = 1$. Praeterea vero ſimul eos caſus inueſtigemus, quibus B fit numerus ſatis paruus, veluti 2 vel 4, vel 5 etc., propterea quod caſus $B = 3$ hinc excluduntur. Hic quidem ſtatim iſti caſus ſe offerunt: $3^1 = (1)^2 + 2$; $3^3 = (5)^2 + 2$; vnde quaeritur, an tales caſus etiam in maioribus poteſtatibus exiſtant.

§. 11. Cum igitur ſit $a = 1$; $b = 1$ et $n = 2$; quaeri oportet angulum Φ, vt ſit tang. $\Phi = \sqrt{2}$, ideoque l tang. $\Phi = 10,1505150$, vnde colligitur $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$, quem angulum in minuta ſecunda conuertamus, quo facilius eum cum π comparare queamus, eritque $\Phi = 197048'', 19$. Quare cum ſit $\pi =$

$\pi = 648000''$, erit fractio nostra resoluenda $\frac{\pi}{\phi} = \frac{64800000}{19704819}$, cuius numerator per denominatorem diuidatur, tum vero residuum dabit diuisorem pro sequente diuisione, in qua praecedens diuisor fiet diuidendus, hocque modo eaedem operationes instituantur, quibus vulgo maximus communis diuisor quaeri solet, vbi imprimis quoti ex singulis diuisionibus oriundi sollicite notentur:

5685543	19704819	64800000	3
	17056629	59114457	3
389163	2648190	5685543	2
	2334978	5296380	6
75951	313212	389163	1
	303804	313212	4
687	9408	75951	8
	8931	75264	13
210	477	687	1
	420	477	9
39	57	210	3
	39	171	1
3	18	39	2
	18	36	6
	0	3	

§. 12. Iam ex his quotis ordine dispositis formentur more solito fractiones, dum continuo tam numeratores quam denominatores per indices suprascriptos multiplicantur et praecedentes adduntur, prouti hic videre licet:

$$3;\ 3;\ 2;\ 6;\ 1;\ 4;\ 8;\ 13;\ 1;$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{10}{3},\ \frac{23}{7},\ \frac{148}{45},\ \frac{171}{52},\ \frac{832}{253},\ \frac{6827}{2076},\ \frac{89583}{27241}.$$

Hae enim fractiones continuo propius ad ipsam fractionem propositam $\frac{\pi}{\Phi}$ accedent; vbi imprimis notari oportet, quod eae fractiones, quae maioribus indicibus respondent, caeteris paribus, quam minime a veritate aberrent. Has igitur fractiones, quousque licuerit, percurramus. Prima quidem $\frac{1}{0}$ statim dat $\lambda = 1$, vnde fit $3^1 = (1)^2 + 2$. Secunda fractio $\frac{3}{1}$ praebet $\lambda = 3$, vnde fit $3^3 = 5^2 + 2$, quae ergo, aeque ac prima, exacte quaesito satisfacit, propterea quod indices 3 et 3 iam satis sunt notabiles. Ex tertia vero fractione $\frac{10}{3}$ oritur $\lambda = 10$, eritque $3^{10} = 59049 = A^2 + 2B^2$, vbi foret $B = 0$ et $A = 243$, quam resolutionem autem hic reiicimus. At vero mox patet esse $59049 = (241)^2 + 2(22)^2$, vbi igitur est $B = 22$, neque autem hic valor tam paruus est quam desideratur; cuius rei ratio est, quod index suprascriptus 2 non satis est magnus. Idem autem iste valor pro B inuentus ex ipsis formulis nostris elici potest. Cum enim inuenerimus $B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \sin. \lambda\Phi}{\sqrt{n}}$, ob $\lambda = 10$, $N = 3$, $n = 2$ et $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$, erit $\lambda\Phi = 547^0, 21', 22''$, hinc auferendo 360^0, erit $\lambda\Phi = 187^0, 21', 22' = \pi + 7^0, 21', 22''$; ex quo angulo calculus sequenti modo per logarithmos instituatur:

$$\begin{array}{r l}
l \sin. \lambda\Phi & = 9,1073310 \\
l\, 3^5 & = 2,3856063 \\
\hline
\text{Summa} & = 1,4929373 \\
\text{Subtr. } l\sqrt{2} & = 0,1505150 \\
\hline
l\,B & = 1,3424223, \text{ ergo } B = 22.
\end{array}$$

Quin

Quin etiam ex nostris formulis valor litterae $A = N^{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{cos.} \lambda \Phi$ definiri potest hoc modo:

$$\begin{array}{r}
l \operatorname{cos.} \lambda \Phi = 9,9964108 \\
l\, 3^5 = 2,3856063 \\
\hline
l\, A = 2,3820171, \text{ ergo } A = 241.
\end{array}$$

§. 13. Simili modo euoluamus sequentem fractionem $\frac{23}{7}$, quae, quia respondet indici satis magno 6, promittit notabilem solutionem. Hic igitur erit $\lambda = 23$, vnde colligitur $\lambda \Phi = 1258^0, 55', 8''$ et peripheriam auferendo, quoties fieri potest $\lambda \Phi = 178^0, 55', 8'' = \pi - 1^0, 4', 52''$, vnde litterae A et B sequenti modo computentur:

$$\begin{array}{r|r}
l \operatorname{cos.} \lambda \Phi = 9,9999276 & l \operatorname{fin.} \lambda \Phi = 8,2757219 \\
l\, N^{\frac{23}{2}} = 5,4868944 & l\, N^{\frac{23}{2}} = 5,4868944 \\
\hline
l\, A = 5,4868220 & \text{Summa} = 3,7626163 \\
\text{ideoque } A = 306773 & l \sqrt{2} = 0,1505150 \\
\cline{2-2}
 & l\, B = 3,6121013 \\
 & \text{ideoque } B = 4093.
\end{array}$$

Hinc ergo fit $3^{23} = (306773)^2 + 2\,(4093)^2$, vbi igitur valor litterae B valde prodit magnus, etiamsi index 6 sit satis notabilis. Hinc igitur iam tuto concludi potest, ex sequentibus fractionibus multo adhuc maiores valores pro B esse procituros, quos adeo hac methodo, ob insufficientiam tabularum logarithmicarum definire haud licebit.

Exemplum 2.

§. 14. Quoniam omnes poteſtates binarii, vti vidimus, in forma $xx + nyy$ continentur, quaeramus eas poteſtates, pro quibus valor ipſius y fit quam minimus, atque adeo vnitati aequalis. Hic ergo erit $N = 2$; $n = 7$; tum vero $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, vnde ergo quaeri debet angulus Φ, vt fiat tang. $\Phi = \frac{b\sqrt{n}}{a} = \sqrt{7}$, ideoque l tang. $\Phi = 10,4225490$, conſequenter ipſe angulus $\Phi = 69^0, 17', 42'', 67$. Quare ſi ponamus $2^\lambda = A^2 + 7B^2$, erit

$$A = 2^{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{cof.} \lambda\Phi \text{ et } B = \frac{2^{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{fin.} \lambda\Phi}{\sqrt{7}}.$$

§. 15. Vt iam valor ipſius B prodeat quam minimus, in eos caſus inquirere debemus, quibus ſinus anguli $\lambda\Phi$ minimus euadit. Totum ergo negotium redit ad euolutionem fractionis $\frac{\pi}{\Phi}$, cui fractio $\frac{\lambda}{i}$ proxime debet eſſe aequalis. At vero in minutis ſecundis habebimus $\Phi = 249462'', 67$, ita vt ob $\pi = 648000''$ euolui oporteat hanc fractionem: $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{64800000}{24946267}$, vnde ſequentes quoti orientur: 2, 1, 1, 2, 16, 6, 1, 2, 7, 1, 6, 1, 9, 11, 2, ex quibus ſequentes fractiones continuo propius ad verum valorem accedentes formantur:

$$\begin{array}{cccccccc} 2; & 1; & 1; & 2; & 16; & 6; & 1; & 2; \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{13}{5}, & \frac{213}{82}, & \frac{1291}{497}, & \frac{1504}{579}. \end{array}$$

Ex harum fractionum primis ſtatim prodeunt caſus notiſſimi, veluti ex quarta fit $\lambda = 5$, vnde colligitur $\lambda\Phi = 2\pi - 13^0, 31', 26'', 65$, ex quo angulo litterae A et B hunc in modum deriuantur:

l cof.

$l\,\text{cof.}\,\lambda\Phi = 9,9877885$	$l\,\text{fin.}\,\lambda\Phi = 9,3689443$
$l\,N^{\frac{5}{2}} = 0,7525750$	$l\,N^{\frac{5}{2}} = 0,7525750$
$l\,A = 0,7403635$	Summa $= 0,1215193$
ideoque $A = 5,5.$	$l\sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\,B = 9,6989703$
	ideoque $B = 0,5.$

vnde fequitur fore $2^5 = (5\tfrac{1}{2})^2 + 7\,(\tfrac{1}{2})^2$, ideoque per 4 multiplicando erit $2^7 = (11)^2 + 7\,(1)^2$.

§. 16. Quinta autem fractio $\frac{13}{5}$ hic eft memorabilis, quia habet indicem 10, ideoque valde paruum valorem pro B pollicetur. Sit igitur $\lambda = 13$, eritque $13\,\Phi = 900^0, 50', 14'', 71$, fiue binis rectis, quoties fieri poteft, fubductis, erit $13\,\Phi = 0^0, 50', 14'', 71$, vnde litterae A et B fequenti modo definientur:

$l\,\text{cof.}\,\lambda\Phi = 9,9999536$	$l\,\text{fin.}\,\lambda\Phi = 8,1648107$
$l\,2^{\frac{13}{2}} = 1,9566949$	$l\,2^{\frac{13}{2}} = 1,9566949$
$l\,A = 1,9566485$	Summa $= 0,1215056$
$A = 90,5$	$l\sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\,B = 9,6989566$
	ideoque $B = 0,49999 = 0,5$

vnde fequitur fore $2^{13} = (90\tfrac{1}{2})^2 + 7\,(\tfrac{1}{2})^2$, fiue per 4 multiplicando erit $2^{15} = (181)^2 + 7\,(1)^2$; vbi valor ipfius B tam paruus prodiit, quoniam index refpondens 16 eft praemagnus.

§. 17. Hinc iam fatis intelligitur, ex fequentibus fractionibus tales cafus, quibus B fiat vel $\frac{1}{2}$ vel 1, refultare non poffe, nifi indices fuprafcripti adhuc multo fuerint maioiores, quod cum non eueniat, fatis tuto affirmare licet, in maioribus poteftatibus binarii nullas amplius occurrere, quae fint formae $A^2 + 7$. Quod quo facilius perfpiciatur, confideremus fequentem fractionem $\frac{213}{82}$, indici 6 fubfcriptam, vnde fit $\lambda = 213$. Hinc cum fit $13\,\Phi = 900^0, 50', 14'', 71$ et $200\,\Phi = 13859^0, 2'\ 14''$, erit $213\,\Phi = 14759^0, 52', 28'', 71$, vnde totam peripheriam, quadragies fumtam, fubtrahendo remanet $213\,\Phi = 359^0, 52', 28'', 71$, cuius complementum ad totam peripheriam eft $0^0, 7', 31'', 29$. Calculus ergo ita fe habebit:

$\text{cof. } 213\,\Phi = 9,9999990$	$\text{fin. } 213\,\Phi = 7,3400396$
$l\,2^{\frac{213}{2}} = 32,0596943$	$l\,2^{\frac{213}{2}} = 32,0596943$
$l\,A = 42,0596933$	$\text{Summa} = 39,3997339$
	$l\sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\,B = 38,9771849$

§. 18. Hinc igitur patet hoc cafu numerum A ex triginta tribus figuris conftare, quas ergo ex tabulis ne quidem reperire licet; at vero alter numerus B, etiamfi refpectiue fit minimus, hic tamen adhuc vsque ad 29 figuras excurrit, quae ergo pariter per tabulas inueniri nequeunt; cuius rei ratio in eo manifefto eft fita, quod poteftas $2^{\frac{\lambda}{2}}$ tam enormiter magna euafit; ex quo perfpicuum eft, multo minus in altioribus poteftatibus minores valores pro B exfpectari poffe. His igitur miffis aliud problema huic affine fubiungamus, quo ii cafus quaeruntur, quibus littera A minimum fortitur valorem.

Pro-

Problema.

Si fuerit $N = aa + nbb$, quoniam omnes eius poteſtates N^λ eandem formam $A^2 + nB^2$ accipiunt, inueſtigare eas poteſtates, pro quibus littera A minimum adipiſcatur valorem.

Solutio.

§. 19. Hoc problema ſimili ratione, ac praecedens, reſolui poterit. Quaeratur ſcilicet angulus ϕ, vt ſit tang. $\phi = \frac{b\sqrt{n}}{a}$, vnde erit vt ante

$$A = N^{\frac{\lambda}{2}} \text{coſ.}\, \lambda\phi \quad \text{et} \quad B = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}} \text{ſin.}\, \lambda\phi}{\sqrt{n}}.$$

Quare vt littera A minimum acquirat valorem, neceſſe eſt vt coſ. $\lambda\phi$ euadat minimus, id quod eueniet, ſi fiat proxime $\lambda\phi = \frac{\pi}{2}$; vel $\frac{3\pi}{2}$ vel $\frac{5\pi}{2}$ etc. ideoque generaliter $\lambda\phi = \frac{(2i+1)\pi}{2}$, vnde debet eſſe proxime $\lambda = \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi}{\phi}$, ſiue $\frac{2\lambda}{2i+1} = \frac{\pi}{\phi}$.

§. 20. Totum ergo negotium huc redit, vt omnes fractiones quaerantur ipſi $\frac{\pi}{\phi}$ proxime aequales, quemadmodum iam fecimus pro ſuperiore problemate; at vero ex his fractionibus eae tantum hic adhiberi poterunt, quarum numeratores ſint numeri pares, denominatores vero impares; ac ſi talis fractio occurrat, quae ſit $\frac{2f}{2g+1}$, ſumi oportebit $\lambda = f$; tum enim, ob coſ. $\lambda\phi$ minimum, numerus A minimum valorem obtinebit, qui ergo erit vel 1 vel etiam vnitate maior, quando ſcilicet minores valores locum habere nequeunt; contra vero euidens eſt his caſibus alterum numerum B maximum eſſe adepturum valorem.

§. 21. Applicemus hoc ad binos casus supra tractatos, ac primo quidem pro priore erat $N = 3$, $a = 1$, $b = 1$ et $n = 2$, vnde prodiit tang. $\Phi = \sqrt{2}$ et $\Phi = 54^0, 44', 8'', 19$; hinc autem fractiones ipsi $\frac{\pi}{\Phi}$ proxime aequales repertae sunt:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 3, & 3, & 2, & 6, & 1, & 4, & 8, & 13, & 1, \\ \frac{1}{0}; & \frac{3}{1}; & \frac{10}{3}; & \frac{23}{7}; & \frac{148}{45}; & \frac{171}{52}; & \frac{832}{253}; & \frac{6827}{2076}; & \frac{89583}{27241}; & \end{array}$$

inter quas occurrit fractio numeratorem parem habens $\frac{10}{3}$, vnde fit $\lambda = 5$, ideoque potestas $3^5 = 243$, quae manifesto est $(1)^2 + 2(11)^2$, ita vt hic sit $A = 1$ et $B = 11$, quos valores etiam formulae supra datae praebent. Cum enim sit $\lambda = 5$, erit $\lambda\Phi = 273^0, 40', 40'', 95$, siue $\lambda\Phi = 93^0, 40', 40'', 95$, siue eius complementum ad 180^0, $86^0, 19', 19'', 05$, vnde calculus ita se habet:

l cos. $\lambda\Phi = 8,8071973$	sin. $\lambda\Phi = 9,9991046$
$l\, 3^{\frac{5}{2}} = 1,1928032$	$l\, 3^{\frac{5}{2}} = 1,1928032$
$l\, A = 0,0000005$	Summa $= 1,1919078$
ideoque $A = 1$	$l \sqrt{2} = 0,1505150$
	$l\, B = 1,0413928$
	ideoque $B = 11$.

§. 22. Hactenus quidem tantum fractiones principales ipsi $\frac{\pi}{\Phi}$ proxime aequales exhibuimus, dantur vero etiam huiusmodi fractiones minus principales, quae oriuntur ex indicibus suprascriptis, si vnitate vel minuantur vel augeantur. Cum enim indices sint quoti ex diuisione oriundi, facile intelligitur, vbi quotus fuerit $= 9$, ibi quoque sumi potuisse siue $9 - 1$ siue $9 + 1$. Hoc obseruato subscribamus seriei illarum fractionum principalium etiam minus principales, sequenti modo:

3;

3;	3;	2;	6;	1;
$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{10}{3}$,	$\frac{23}{7}$,	$\frac{148}{45}$,
	$\frac{2}{1}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{13}{4}$,	$\frac{85}{38}$,
	$\frac{4}{1}$,	$\frac{15}{4}$,	$\frac{33}{10}$,	$\frac{171}{52}$.

Hic igitur occurrunt numeratores pares 2 et 4, vnde fit vel $\lambda = 1$, vel $\lambda = 2$; priore casu est $3^1 = (1)^2 + 2(1)^2$; altero vero $3^2 = (1)^2 + 2(2)^2$, sicque vtroque casu $A = 1$; quod quidem tantum euenit in fractionibus initialibus.

§. 23. Simili modo pro altero casu, quo erat $N = 2$; $n = 7$; $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, prodiit angulus $\Phi = 69^0, 17', 42'', 67$, et fractio $\frac{\pi}{\Phi}$ dederat quotos 2, 1, 1, 2, 16, 6, 1, vnde sequentes formantur fractiones tam principales, quam minus principales:

$\frac{1}{0}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{13}{5}$,
	$\frac{1}{1}$,		$\frac{8}{3}$,	
	$\frac{3}{1}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{8}{3}$,	$\frac{18}{7}$,

vnde numeratores pares praebent vel $\lambda = 1$, vel $\lambda = 4$, vel $\lambda = 9$. Ex primo valore $\lambda = 1$ fit $2^1 = (\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{1}{2})^2$, siue $2^3 = (1)^2 + 7(1)^2$. Ex secundo valore fit $2^4 = (\frac{1}{2})^2 + 7(\frac{3}{2})^2$, siue $2^6 = (1)^2 + 7(3)^2$. Tertio habemus $\lambda = 9$, pro quo casu calculum nostrum instituamus, et ob $\lambda\Phi = 623^0, 39', 24'', 03 = 3\pi + 83^0, 39', 24'', 03$, erit

$l\,\mathrm{cos.}\,\lambda\Phi = 9,0433074$	$l\,\mathrm{sin.}\,\lambda\Phi = 9,9973329$
$l\,N^{\frac{9}{2}} = 1,3546350$	$l\,N^{\frac{9}{2}} = 1,3546350$
$l\,A = 0,3979424$	Summa $= 1,3519679$
ideoque $A = 2,5$	$l\sqrt{7} = 0,4225490$
	$l\,B = 0,9294189$
	ideoque $B = 8,5$.

ſicque erit $2^9 = (\frac{5}{2})^2 + 7(\frac{17}{2})^2$, ſiue per 4 multiplicando erit $2^{11} = (5)^2 + 7(17)^2$. Atque hinc tuto concludere licet, pro maioribus exponentibus λ valores litterae A continuo multo maiores eſſe prodituros. Caeterum quia hic calculi genus prorſus ſingulare occurrit, ſperamus hanc ſpeculationem Geometris non eſſe diſplicituram.

DE