1794

Von dem Drucke eines mit einem Gewuchte beschwerten Tisches auf einer Flache. Aus den Papieren des sel. Leonhard Euler gozogen von Jakob Bernoulli

Leonhard Euler

V.

Von dem Drucke eines mit einem Gewichte beschwerten Tisches auf eine Fläche. Aus den Papieren des sel. Leonhard Eulers gezogen, von Jakob Bernoulli *).

Indem ich eines der Bücher durchblätterte, wo L. Euler seine Anmerkungen über verschiedene mathematische Gegenstände aufzuzeichnen pflegte, welche ihm dann meistentheils Stoff zu seinen zahlreichen und treflichen Abhandlungen an die Hand gaben; stieß ich unter andern auf folgende Aufgabe, die, so viel ich weiß, niemals bekannt gemacht worden, und die mir dennoch interessant genug vorgekommen ist, um sie dem mathematischen Publicum nicht vorzuenthalten. Ich werde sie daher, nebst der hinlänglich ausgeführten Auflösung, mit des Verfassers eigenen Worten hersetzen:

Wenn ein Tisch mit drey Füßen auf einer horizontalen Fläche aufsteht, und derselbe nach Belieben mit einem gegebenen Gewichte beschweret

*) Mitgetheilt von dessen Bruder, Herrn Johann Bernoulli, Director bey der königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin. Jakob Bernoulli, ein Sohn des 1790 als Prof. der Mathematik zu Basel verstorbenen Johann Bernoulli's, war 1759 zu Basel gebohren, und ward 1780 Licentiat der Rechte. Zweymal hat er versucht, Lehrstellen in seiner Vaterstadt zu erhalten; aber das Loos, welches dorten dafür entscheidet, war ihm nicht günstig. Er gieng daher 1786 nach St. Petersburg, als Adjunct bey der dortigen Akademie der Wissenschaften, und ward bald darauf derselben Mitglied. Er starb, zu frühzeitig für die Wissenschaft, die sich viel von ihm versprechen konnte, den 3 Jul. 1789. beym Baden in der Neva, an einem Schlagflusse. Seine Lebensbeschreibung: Noua Acta Acad. Sc, Imp. Petrop. T. VII.

ret wird, so ist die Frage, wie stark ein jeder Fuß auf die Fläche drücke?

Es seyen (Fig. 1) auf der Horizontal-Fläche, A, B, C, die drey Punkte, wo die Füße des Tisches aufstehen, und aus dem Centro gravitatis, sowohl des Tisches selbst, als des darauf gelegten Gewichts, werde auf diese Fläche eine perpendiculäre Linie gezogen, welche auf das Punkt O falle; ferner sey P das ganze Gewicht des Tisches, daher denn sogleich klar, daß alle drey Füße zusammen mit einer gleichen Kraft P drucken müssen; wie stark aber ein jeder Fuß insbesondere drucke, kann also bestimmt werden. Man ziehe aus dem Puncte O nach den drey Puncten A, B, C, die geraden Linien OA, OB, OC, und mache nun folgende Proportionen:

I. Wie sich verhält der Inhalt des ganzen Dreyecks ABC, zu dem ganzen Gewichte P, also verhält sich der Inhalt des Dreyecks BOC, zu dem Druck in A.

II. Und eben so verhält sich das Dreyeck AOC, zu dem Druck in B.

III. Und endlich verhält sich eben so das Dreyeck AOB, zu dem Druck in C. Daher wird seyn der Druck in A $= \frac{\Delta BOC}{\Delta ABC} . P$, der Druck in B $= \frac{\Delta AOC}{\Delta ABC} . P$, und den Druck in C $= \frac{\Delta AOB}{\Delta ABC} . P$.

[Euler setzt zwar den Beweis nicht hinzu, allein er zeigt sich von selbst, indem man die senkrechten Linien AD und OE auf BC (verlängert, wo nöthig) zieht, und BC als die Axe ansieht, in Ansehung welcher das Gewicht P zur Kraft in A sich verhalten muß, umgekehrt wie ihre Entfernungen von der Axe, also $= AD : OE$, oder die Kraft, der Druck in A, muß seyn $= \frac{OE}{AD} . P$.

Nun

Nun verhalten sich aber die Dreyecke ABC und OBC, wie ihre Höhen AD : OE, also ist der Druck in $A = \frac{\Delta OBC}{\Delta ABC} . P$, und auf eine ähnliche Weise wird der Druck für die Punkte B und C bestimmt werden].

Wenn dahero [fährt Euler fort] das Punkt O so steht, daß die drey Dreyecke AOB, AOC und BOC einander gleich seyen, so drucken alle drey Füße gleich stark auf die Fläche; dieses geschiehet nun, wenn das Punkt O just in das Centrum gravitatis des Dreyecks fällt; fällt dasselbe aber in ein anderes Punkt, so drucken auch die drey Füße ungleich auf die Fläche. Hieraus ist klar, daß, je näher das Punkt O gegen die Seite AB fällt, der Druck in C so viel kleiner werde; und endlich gar verschwinde, wenn das Punkt O just in A fällt, und die beyden Füße A und B müssen allein das ganze Gewicht tragen.

[Etwas weiter hinten, im angeführten Buche, behandelt Euler die gleiche Aufgabe weit allgemeiner; und ich will den Aufsatz, welcher lateinisch geschrieben ist, in einer Uebersetzung hier beyfügen].

Es ist schwer das, was oben von dem Drucke eines mit drey Füßen auf einer Fläche stehenden Tisches gesagt worden ist, auf vier Füße auszustrecken; denn wenn die Enden aller Füße nicht vollkommen in der gleichen Fläche sind, oder wenn der Boden nicht vollkommen eben ist, so wird der Tisch immer nur auf drey Füßen stehen, und der vierte wird so zu sagen überflüßig seyn. Aber wenn der Boden vollkommen eben ist, und die Spitzen aller Füße vollkommen in einer und derselben Ebene sich befinden, so wird die Frage von dem Drucke eines jeden Fußes zwar sehr schwer, doch kann sie folgendermaßen aufgelöst werden.

Wir wollen uns vorstellen, daß der Boden etwas nachgebe, und daß jeder Fuß einen gewissen Eindruck hinein

hinein macht: so werden folglich alle vier Füße auf diesen Boden drücken, und der Druck eines jeden wird mit der Tiefe, zu welcher er hineindringt, im Verhältnisse stehen.

Laßt uns also setzen, der Fuß A (Fig. 2) gehe zur Tiefe $A\alpha$, der Fuß B zur Tiefe $B\beta$, der Fuß C zur Tiefe $C\gamma$, und der Fuß D zur Tiefe $D\delta$ hinein; so werden die Punkte α, β, γ, δ, nothwendig in der gleichen Fläche seyn. Weil aber der Druck eines jeden Fußes diesen kleinen Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ proportional ist, so werden eben diese den Druck vorstellenden Linien so beschaffen seyn, daß die Punkte α, β, γ, δ in der gleichen Fläche sich befinden. Dieser Grundsatz kann nun auf so viele Füße, als man will, ausgedehnt werden, und sogar auf eine jede stete vollkommen ebene Grundfeste, von welcher Figur sie auch immer sey. Und so kann die ganze Sache mit Hülfe des folgenden Grundsatzes abgethan werden.

Der Körper habe die ebene Grundfeste ABCD (Fig. 3), und in jedem Punkte M derselben werde der Druck durch die kleine perpendiculare Linie $M\mu$ vorgestellt, so müssen alle diese Punkte μ sich in der gleichen Fläche befinden. Wenn daher die mittlere Richtung aller Kräfte, womit der Körper auf den Boden gedrücket wird, auf den Punkt O fällt, und der ganze Druck $= P$ gesetzt wird, so muß die Summe aller elementaren Drückungen $= P$ seyn: alsdann aber, weil das Moment des gänzlichen Druckes P in Ansehung einer willkührlich angenommenen Axe FG ist $= P.OP$ [indem OP senkrecht auf FG ist], so muß die Summe aller elementaren Momente $M\mu.\ MN$ diesem Momente gleich seyn; und dieselbe Gleichheit muß für jede andere Axe FH auch statt haben: Nun aber kann aus zwo solchen Gleichungen die Lage der Fläche, in welcher sich alle Punkte μ befinden, bestimmt wer-

werden, woraus dann der Druck für einem jeden Punkt der Grundfeste bekannt seyn wird.

Damit also dieses desto bequemer durch die Rechnung herausgefunden werde, so nehme man die bestimmte Axe AB (Fig. 4), auf welche aus M der Senkel MN herabgelassen werde, und dann nenne man die Coordinaten $AN = x$, $NM = y$, und $M\mu = z$, welche letztere den Druck für den Punkt M vorstellt. Ferner sey FG die Linie, in welcher die Fläche, welche alle Punkte μ begreift, die Fläche der Tafel durchschneidet, und der Neigungswinkel sey $= \theta$. Man setze auch $AF = f$, und den Winkel $AFG = \zeta$; so hat man $FN = f + x$, und, [wenn NL senkrecht auf FG gezogen wird], $FL = (f + x) \cos. \zeta$; $NL = (f + x) \sin. \zeta$. [Man ziehe auch MV senkrecht auf FG, und NT auf MV], so ist der Winkel $NMT = \zeta$, und also $MT = y \cos. \zeta$; $NT = y \sin. \zeta$; dann ferner $MV = (f + x) \sin. \zeta, + y \cos \zeta$, daraus man herleitet $z = (f + x) \sin \zeta \tan \theta + y \cos. \zeta \tan. \theta$, welches wir der Kürze wegen so setzen werden: $z = \alpha + \beta x + \gamma y$. Es ist also $\alpha = f \sin. \zeta \tan. \theta$; $\beta = \sin \zeta \tan \theta$; $\gamma = \cos. \zeta \tan \theta$. Aus diesen Buchstaben α, β, γ findet man also: 1) $\cot. \zeta = \frac{\gamma}{\beta}$; 2) $\tan. \theta = \frac{\beta}{\sin. \zeta}$; 3) $f = \frac{\alpha}{\beta}$. Weil also z immer dadurch bestimmt wird, daß man hat $z = \alpha + \beta x + \gamma y$, so werden hingegen die Buchstaben α, β, γ selbst aus den Umständen folgendermaßen angegeben. Man betrachte das Element der Grundfeste in dem Punkte M, welches $dx.dy$ seyn, und von der Kraft z gedruckt werden wird; daher entsteht der Druck auf die ganze Grundfeste $= \iint z\,dx\,dy$, welches doppelte Integrale durch die ganze Grundfeste erstreckt werden muß, so daß man hat $\iint z\,dx\,dy = P$.

Da

Da nun das Mo
sehung der Axe AB is
elementaren Momente
man dieses Integrale
ausdehnt, P. OP =
für die Axe AQ find
diesen drey Gleichung
α, β, γ, bestimmt, [in
und die Gleichung zu
alle Integralia keine
wird der Druck für
wie auch die Winkel ζ

Der Körper oder
winklicht geordnete F
Druck falle in O, s
nun die Drückungen
einer Fläche enden n
$A = p + q$, in B
$D = p - r$, deren
Moment in Ansehung
$= Pg$, für die K
$= b(2p - q - r)$
$= b$, und $AB = C$
aber findet man die
$= 4ph$; daraus
und $q - r = 2p$
$- \frac{2ph}{a}$, und $r =$
Druck $P = 4p$, so n
Punkt A, B, C, D

Da nun das Moment des ganzen Druckes P in Ansehung der Axe AB ist $= P.OP$, und die Summe aller elementaren Momente $= \iint zydxdy$, so wird, wenn man dieses Integrale wieder über die ganze Grundfeste ausdehnt, $P.OP = \iint zydxdy$. Eben so wird man für die Axe AQ finden $P.OQ = \iint zxdxdy$. Aus diesen drey Gleichungen werden nun die drey Buchstaben α, β, γ, bestimmt, [indem für z sein Werth gesetzt wird, und die Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so daß alle Integralia keine Schwierigkeit haben], und daraus wird der Druck für jeden Punkt M der Grundfeste, [so wie auch die Winkel ζ, θ, und die Linie f] bekannt.

Der Körper oder Tisch habe also z. E. vier rechtwinklicht geordnete Füße A, B, C, D (Fig. 5); der ganze Druck falle in O, so daß $AP = h$; $PO = g$. Weil nun die Drückungen in den Punkten A, B, C, D sich in einer Fläche enden müssen, so setze man den Druck in $A = p + q$, in $B = p + r$, in $C = p - q$, und in $D = p - r$, deren Summe $= 4p = P$. Nun ist das Moment in Ansehung der Axe AB für die ganze Kraft $= Pg$, für die Kräfte aber aller Füße zusammen $= b(2p - q - r) = Pg = 4pg$. [$AD = BC$ wird $= b$, und $AB = CD = a$ gesetzt]. Für die Axe AD aber findet man die Momente $Ph = a(2p - q + r) = 4ph$; daraus ziehe, wie $q + r = 2p - \frac{4pg}{b}$, und $q - r = 2p - \frac{4hp}{a}$; also $q = 2p - \frac{2pg}{b} - \frac{2ph}{a}$, und $r = \frac{2ph}{a} - \frac{2pg}{b}$. Weil also der ganze Druck $P = 4p$, so werden sich die Drückungen für jeden Punkt A, B, C, D, also verhalten: der Druck in

A

$$A = 3p - \frac{2pg}{b} - \frac{2ph}{a} = p\left(3 - \frac{2g}{b} - \frac{2h}{a}\right);$$

der Druck in $C = p\left(-1 + \frac{2g}{b} + \frac{2h}{a}\right)$; der Druck in $B = p\left(1 + \frac{2h}{a} - \frac{2g}{b}\right)$; der Druck in $D = p\left(1 - \frac{2h}{a} + \frac{2g}{b}\right)$.

Diese Kräfte können auch kürzlich so vorgestellt werden:

Der Druck in $A = \frac{1}{4}P\left(\frac{2OR}{AD} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$
$= \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{BC} + \frac{2BP}{AB} - 1\right)$;

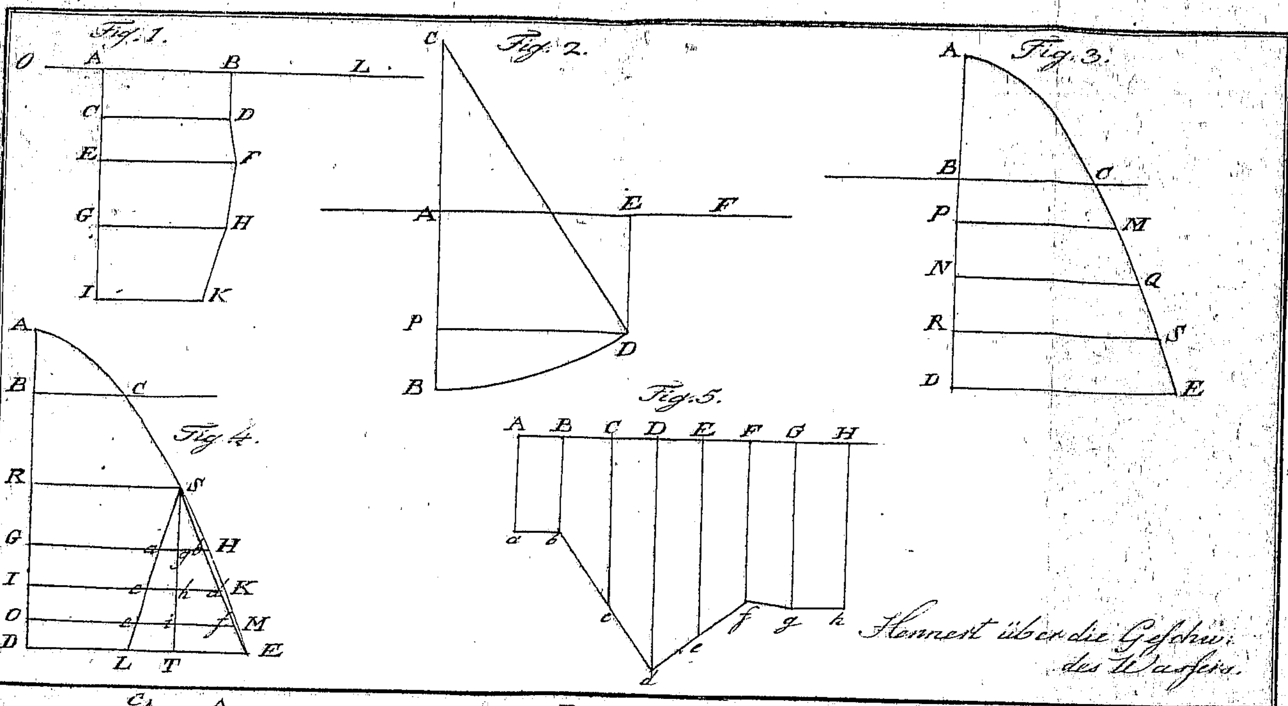
Der Druck in $B = \frac{1}{4}P\left(\frac{2AP}{AB} + \frac{2DS}{BC} - 1\right)$;

Der Druck in $C = \frac{1}{4}P\left(\frac{2CQ}{CB} + \frac{2CR}{CD} - 1\right)$;

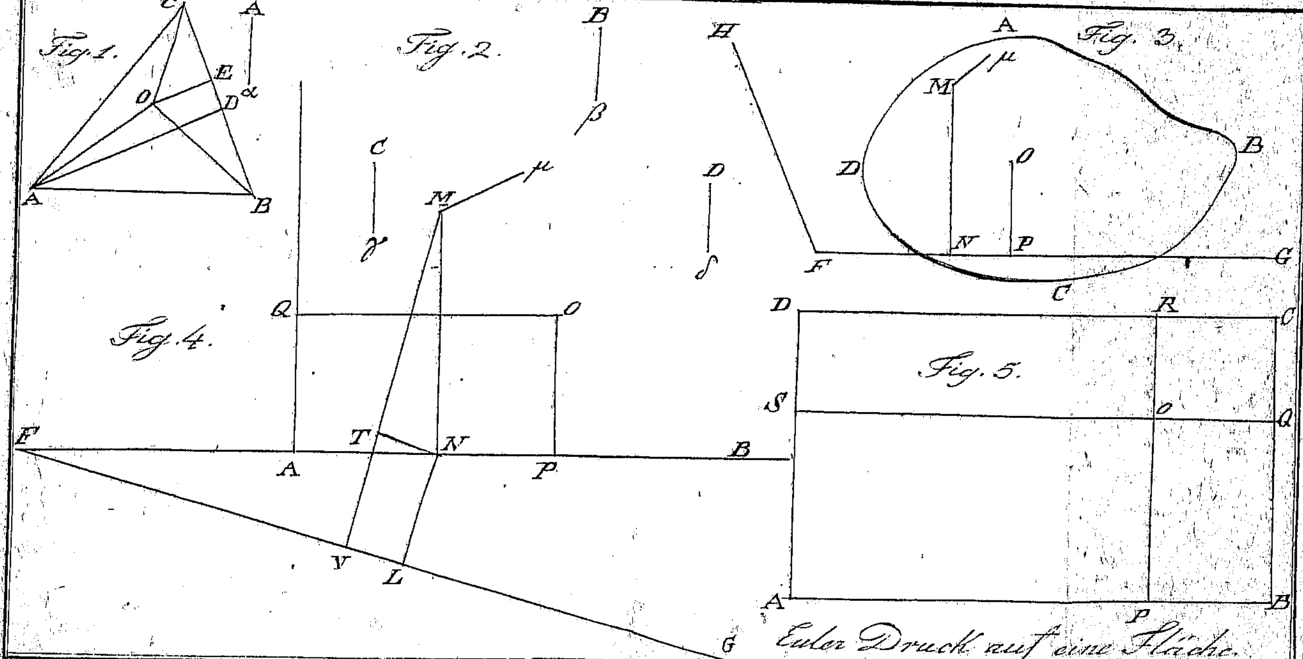
Der Druck in $D = \frac{1}{4}P\left(\frac{2DS}{AD} + \frac{2DR}{DC} - 1\right)$.

Wenn also der Punkt O in die Mitte des Rechteckes fällt, so werden, weil $\frac{CQ}{BC} = \frac{1}{2}$, etc. alle Drückungen gleich, und eine jede $= \frac{1}{4}P$.

VI.



Hennert über die Geschw. des Wassers.



Euler Druck auf eine Fläche.