1794

Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile

Leonhard Euler

PROBLEMA GEOMETRICVM.

OB SINGVLARIA SYMTOMATA IMPRIMIS MEMORABILE.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 10 *Febr.* 1777.

§. 1.

Problema, quod hic tractandum suscipio, et quod nobis plura phaenomena maxime notatu digna offeret, ita se habet:

Problema.

Circa punctum fixum C describere lineam curuam AZ eius indolis, vt area sectoris ACZ proportionalis sit quadrato arcus AZ. Tab. II. Fig. 1.

Scilicet si vocetur arcus $AZ = s$, area vero sectoris $ACZ = \Sigma$, requiritur vt vbique $\Sigma : ss$ eandem teneat rationem, quam ita designemus, vt sit $ss = 4n\Sigma$.

§. 2. Primo obseruo huic problemati omnes spirales logarithmicas, circa centrum C descriptas, satisfacere. Sit enim ζ angulus, sub quo omnes radii CZ spiralem secant, ita vt sit angulus $CZA = \zeta$, voceturque ipse radius $CZ = z$, et ducto radio proximo $Cz = z + \partial z$, centroque C arcu-

lo

lo ZO erit elementum $Oz = \partial z$ et ob angulum $ZzO = \zeta$, erit $ZO = \partial z$ tang. z et $Zz = \partial z$ sec. $z = \frac{\partial z}{cos. \zeta}$. Hinc ergo erit elementum arcus $\partial s = \frac{\partial z}{cos. \zeta}$, ideoque $s = \frac{z}{cos. \zeta}$, quae formula totam spiralis longitudinem ab ipso centro C vsque ad Z protensam denotat. Deinde ob $ZO = \partial z$ tang. ζ, erit area trianguli $CZz = \frac{1}{2} z \partial z$ tang. ζ, quod cum sit differentiale areae Σ, erit integrando $\Sigma = \frac{1}{4} zz$ tang. ζ, quae area iterum ab ipso centro C est desumta. Vi igitur nostri problematis, cum esse debeat $ss = 4n\Sigma$, his valoribus substitutis habebimus $\frac{zz}{cos. \zeta^2} = nzz$ tang. ζ, siue $1 = n$ sin. ζ cos. ζ, ita vt hic sit $n = \frac{1}{sin. \zeta \, cos. \zeta}$, vnde patet his casibus n adeo binario maiorem esse debere, siquidem erit $n = \frac{2}{sin. 2\zeta}$. Hinc igitur, si detur numerus $n > 2$, duo anguli pro ζ dabuntur quaesito satisfacientes. Cum enim sit sin. $2\zeta = \frac{2}{n}$, si fuerit sin. $\alpha = \frac{2}{n}$, quoniam etiam est sin. $(180° - \alpha) = \frac{2}{n}$, erit duplici modo vel $\zeta = \frac{1}{2}\alpha$, vel $\zeta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$.

§. 3. Haec autem solutio hoc laborat incommodo: quod tam arcus quam area initium ab ipso centro C capiant, a quo spirales demum post infinitos gyros vsque ad Z porriguntur. Deinde etiam haec solutio locum habere nequit, nisi numerus n sit binario maior, vnde haec solutio pro maxime particulari haberi debet, siquidem nullo modo locum habere potest, quando initium A, a quo tam arcus quam areae sint computandae, extra centrum C situm proponitur, tum vero etiam pro n numerus quicunque, siue maior, siue minor quam 2 praescribitur. Quamobrem operam dabimus, vt solutionem generalem problematis propositi eruamus; quod negotium triplici modo expedire licebit.

Prima

Prima Solutio
problematis propositi.

§. 4. Sit igitur vt ante arcus $AZ = s$ et area sectoris $ACZ = \Sigma$, ita vt esse debeat $ss = 4n\Sigma$. Iam pro lubitu accipiatur axis CB, quem normalis ad curuam ZR secet in puncto N; tum vero ex C in istam normalem perpendiculariter ducatur recta CP, ac vocata distantia CZ, vt ante, $= z$, ponantur insuper $CP = t$ et $ZP = p$, ita vt sit $zz = pp + tt$, ductaque ad punctum proximum z recta Cz, in eamque normali ZO, triangulum ZzO simile erit triangulo CZP; vnde cum sit $zO = \partial z$ et $Zz = \partial s$, habebitur ista proportio: Tab. II. Fig. 2.

$$CZ : Zz = CP : zO = ZP : ZO,$$
$$z : \partial s = t : \partial z = p :$$

vnde primo colligitur $ZO = \frac{p \partial s}{z}$ et $t \partial s = z \partial z$. Hinc ex valore ZO prodit elementum areae sectoris:

$$CZz = \partial \Sigma = \tfrac{1}{2} p \partial s,$$

ideoque $\Sigma = \frac{1}{2} \int p \partial s$. Quare cum esse debeat $ss = 4n\Sigma$, erit differentiando:

$$s \partial s = 2n \partial \Sigma = np \partial s,$$

vnde colligitur $s = np$. Hinc insignis proprietas curuae quaesitae statim innotescit, qua arcus curuae AZ se semper habet ad rectam $ZP = p$ in ratione data, scilicet vt $n : 1$.

§. 5. Ducatur iam ex puncto z pariter normalis ad curuam zR priori in R occurrens, eritque ZR radius osculi curuae quaesitae, quem nominemus $= r$. In hanc porro normalem zR ex centro C demittatur quoque perpendiculum $Cp = t + \partial t$, priorem secans in π, et cum iam sit $zp = p + \partial p$, erit quoque $Z\pi = p + \partial p$, vnde colligitur $P\pi = \partial p$ et

$\pi p = \partial t$, ob omnes angulos rectos. Hinc quoque patet, fore angulum ZRz aequalem $PC\pi$; vnde sequitur triangulum $PC\pi \sim$ triang. ZRz, hincque colligitur $\partial p : t = \partial s : r$, ergo $r = \frac{t\,\partial s}{\partial p}$. Supra autem vidimus esse $s = np$, ideoque $\partial s = n\partial p$, quo valore loco ∂s substituto erit $r = nt$, quae est altera insignis proprietas huius curuae, scilicet vt eius radius osculi vbique ad rectam $OP = t$ datam teneat rationem, vt $n:1$; vnde patet in hac curua vbique esse arcum $AZ = s$ ad radium osculi $ZR = r$ vti $ZP : CP$.

§. 6. Vocemus iam angulum $CNZ = \Phi$, qui angulus amplitudinem curuae metitur, et cum sit $C\pi z = \Phi + \partial\Phi$, erit angulus $ZRz = \partial\Phi = PC\pi$, vnde fit $P\pi = t\,\partial\Phi = \partial p$, ideoque $p = \int t\,\partial\Phi$. Porro quia $\pi p = \partial t$, erit

$$Rp = \frac{\partial t}{\partial\Phi} = PR,$$

vnde componitur radius osculi

$$r = \frac{\partial t}{\partial\Phi} + \int t\,\partial\Phi.$$

Quare cum esse debeat $r = nt$, habebimus istam aequationem, duas tantum variabiles continentem: $nt = \frac{\partial t}{\partial\Phi} + \int t\,\partial\Phi$, qua tota solutio problematis nostri continetur; ex qua ergo quantitatem t per angulum Φ inuestigari oportet. Inuenta autem hoc modo recta t, vltro se offert formula integralis:

$$\int t\,\partial\Phi = nt - \frac{\partial t}{\partial\Phi} = p.$$

§. 7. Vt nunc aequationem inuentam a signo integrali liberemus, ea differentiata, sumto elemento $\partial\Phi$ constante, dabit hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$n\,\partial t = \frac{\partial\partial t}{\partial\Phi} + t\,\partial\Phi, \text{ siue}$$

$$t - \frac{n\,\partial t}{\partial\Phi} + \frac{\partial\partial t}{\partial\Phi^2} = 0,$$

quae forma ita est comparata, vt ei certo satisfaciat huiusmodi di valor: $t = A e^{\alpha \Phi}$; hinc enim fit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} \text{ et } \frac{\partial \partial t}{\partial \Phi^2} = A \alpha \alpha e^{\alpha \Phi},$$

quibus substitutis erit $1 - n\alpha + \alpha\alpha = 0$, ita vt α debeat esse radix istius aequationis quadraticae; vnde duplici modo fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)},$$

hinc si altera radix indicetur per β, etiam satisfaciet formula $t = B e^{\beta \Phi}$. Manifestum autem est aequationi inuentae etiam satisfacturum esse valorem ex his duobus compositum, scilicet $t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}$, vbi litterae A et B sunt binae constantes per duplicem integrationem ingressae; vnde patet, hanc aequationem continere integrale completum.

§. 8. Quodsi ergo propositus fuerit numerus n, vt fiat $ss = 4 n \Sigma$, ex eo quaerantur ambo numeri α et β, ita vt sit

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n + \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)} \text{ et } \beta = \tfrac{1}{2} n - \sqrt{(\tfrac{1}{4} n n - 1)},$$

ideoque $\alpha + \beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, qui ergo erunt ambo reales, quando fuerit $n > 2$; contra vero imaginarii, quando $n < 2$; casu autem $n = 2$, ambo hi valores erunt inter se aequales, vterque scilicet $= 1$. Accommodemus autem solutionem nostram ad primum casum, quo $n > 2$, quandoquidem hinc bini reliqui casus facile deriuari poterunt. Cum igitur habeamus

$$t = A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi},$$

hinc statim innotescit radius osculi curuae:

$$r = n t = n (A e^{\alpha \Phi} + B e^{\beta \Phi}).$$

Deinde cum sit

$$\frac{\partial t}{\partial \Phi} = A \alpha e^{\alpha \Phi} + B \beta e^{\beta \Phi}, \text{ erit}$$

$$\int t \partial \Phi = n t - \frac{\partial t}{\partial \Phi} = \beta A e^{\alpha \Phi} + \alpha B e^{\beta \Phi} = p;$$

ex quo statim patet, quia erat $s = np$, fore ipsum arcum curvae

$$AZ = s = n(\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi}),$$

vnde porro concluditur area fectoris $\Sigma = \frac{ss}{4n}$, hoc eſt

$$\Sigma = \frac{n}{4}(\beta A e^{\alpha\Phi} + \alpha B e^{\beta\Phi})^2.$$

Denique cum ſit $zz = pp + tt$, erit

$$zz = A^2 e^{2\alpha\Phi}(1 + \beta\beta) + B^2 e^{2\beta\Phi}(1 + \alpha\alpha)$$
$$+ 2AB e^{\alpha\Phi + \beta\Phi}(1 + \alpha\beta).$$

Quia autem $1 + \alpha\alpha = \alpha n$, $1 + \beta\beta = \beta n$ et $\alpha\beta = 1$, habebitur:

$$zz = \beta n A^2 e^{2\alpha\Phi} + \alpha n B^2 e^{2\beta\Phi} + 4AB e^{\alpha\Phi + \beta\Phi},$$

§. 9. Quoniam conſtantes A et B ab arbitrio noſtro pendent, eas ita ſumamus, vt poſito $\Phi = 0$ ipſe arcus curvae AZ euaneſcat, hocque modo punctum Z in ipſum initium A incidat; poſito autem $\Phi = 0$ fit $s = n(\beta A + \alpha B)$, ideoque ſtatui oportet $\beta A = -\alpha B$. Quamobrem ſumamus $A = C\alpha$ et $B = -C\beta$, quo facto nanciſcimur hos valores:

$$t = C(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}) \text{ et } p = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

ex quibus porro habebimus:

$$s = nC(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) \text{ et } r = nC(\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}).$$

§. 10. Quo nunc ad coordinatas orthogonales calculum redigamus, quas ponamus $CX = x$ et $ZX = y$, vocemus tantiſper interuallum $CN = u$, vt fiat $CP = t = u \text{ ſin.} \Phi$ et $NP = u \text{ coſ.} \Phi$, et quia $u = \frac{t}{\text{ſin.} \Phi}$, erit $NP = t \text{ coſ.} \Phi$, hincque tota Normalis $ZN = p + t \text{ coſ.} \Phi$, quam breuitatis gratia deſignemus per v, ita vt ſit

$$v = C(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}) + C \text{ coſ.} \Phi (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}), \text{ ſiue}$$
$$v = C e^{\alpha\Phi}(1 + \alpha \text{ coſ.} \Phi) - C e^{\beta\Phi}(1 + \beta \text{ coſ.} \Phi).$$

Hinc iam primo deducimus applicatam $XZ = y = v \text{ ſin.} \Phi$, ſiue fiue $y = p$ fin. $\Phi + t$ cof. Φ. Pro abfciffa vero erit $CX = x$ $= u - v$ cof. Φ, ideoque

$$x = t \text{ fin. } \Phi - p \text{ cof. } \Phi.$$

Hinc ambe coordinatae x et y fequenti modo per angulum Φ exprimentur:

$$x = C e^{\alpha\Phi} (\alpha \text{ fin.} \Phi - \text{cof.} \Phi) - C e^{\beta\Phi} (\beta \text{ fin.} \Phi - \text{cof.} \Phi) \text{ et}$$

$$y = C e^{\alpha\Phi} (\text{fin.} \Phi + \alpha \text{ cof.} \Phi) - C e^{\beta\Phi} (\text{fin.} \Phi + \beta \text{ cof.} \Phi).$$

Pro initio igitur, vbi $\Phi = o$, fiue pro puncto A, erit $x = o$ et $y = C(\alpha - \beta)$; vnde patet punctum A puncto C perpendiculariter imminere, exiftente interuallo $CA = C(\alpha - \beta)$; vnde fi ftatuamus hanc altitudinem $CA = a$, erit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$.

§. 11. Pofito igitur pro curuae initio A interuallo $CA = a$, vt fit $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$, confideremus reliqua fymptomata curuae in hoc loco. Ac primo quidem, cum fit $s = o$, erit quoque $p = o$, ideoque recta CA tanget curuam in puncto A. Deinde pro hoc loco erit $t = a$; vnde cum fit radius ofculi $r = nt$, in ipfo initio A erit radius ofculi curuae $= na$. Ante autem vidimus pro hoc puncto effe $x = o$ et $y = a$, haecque fymptomata femper locum habent, fiue numerus n fuerit maior, fiue minor quam Q; reliqua vero fymptomata huius curuae plurimum pendent ab hoc valore, atque adeo maxime variantur, provti fuerit vel $n > 2$, vel $n = 2$, vel $n < 2$, quos ergo cafus feorfim perpendamus.

Euolutio cafus primi,

quo $n > 2$.

§. 12. Hic igitur ambae litterae α et β reales habebunt valores, eosque pofitiuos, ergo pofito $C = \frac{a}{\alpha - \beta}$ primo habebimus:

$$Cp = t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}),$$

vbi erit $\alpha - \beta = \sqrt{(nn-4)}$, hincque radius osculi $ZR = nt = r$. Pro initio autem modo vidimus esse $t = a$ et $r = na$. Quodsi iam angulus Φ continuo augeatur, euidens est hanc quantitatem t, ideoque etiam radium osculi r continuo crescere, atque adeo in infinitum, quando angulus Φ in infinitum augetur; vnde patet hanc curuam per infinitos gyros continuo maiores circa C reuolui, quod etiam elucet ex valore

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}),$$

vnde fit $s = np$. Quoniam enim aucto angulo Φ arcus s continuo increscit, etiam interuallum ZP continuo augetur, atque adeo in infinitum vsque.

§. 13. Perpendamus autem etiam continuationem curvae in alteram partem vltra A, cui respondebunt anguli Φ negatiue sumti, et quoniam valor ipsius t in ipso puncto A erat $t = a$, curuam retro continuando huius lineae quantitas decrescet, atque adeo alicubi euanescet, vbi scilicet erit $\alpha e^{\alpha \Phi} = \beta e^{\beta \Phi}$, vnde sequitur $\Phi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\beta}{\alpha}$. Quia autem $l\beta = -l\alpha$, erit

$$\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{-2l\alpha}{\sqrt{(nn-4)}},$$

qui ergo valor ipsius Φ est negatiuus, ob $\alpha > \frac{1}{2}n$. Pro hoc porro puncto, vbi $t = 0$, manifesto radius CZ in curuam erit normalis, simulque radius osculi erit $= 0$. At vero pro eodem loco, vbi $\Phi = \frac{-2l\alpha}{\alpha - \beta}$, erit

$$e^{\alpha \Phi} = \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} \text{ et } e^{\beta \Phi} = \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}},$$

hincque colligitur fore:

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}} - \alpha^{\frac{-2\beta}{\alpha - \beta}}) = \frac{a}{\alpha - \beta} \cdot \alpha^{\frac{-2\alpha}{\alpha - \beta}}(1 - \alpha\alpha),$$

qui

qui ergo valor, ob $\alpha > 1$, est negatiuus, id quod necesse est, cum sit $p = \frac{s}{n}$, atque hoc casu arcus curuae s negatiue accipiatur. Quod quo clarius appareat, sit iste arcus retro continuatus, in eoque E punctum, vbi $t = 0$, ideoque radius CE ad curuam normalis $= p$, ita vt sit ipse arcus $AE = np = n CE$. In ipso autem hoc puncto E, quia radius osculi euanescit, satis tuto concludere licet curuam habere cuspidem, vnde in partem contrariam reflectatur. Tum vero pro situ huius puncti E cognoscendo notetur esse angulum $BCE = -\Phi$, ita vt habeamus angulum $BCE = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn-4)}}$, sicque hoc punctum E innotescit. Sin autem hunc angulum Φ negatiuum vltra istum terminum E augere velimus, quoniam, posito $\Phi = -\infty$, tam p quam s iterum euanescunt, patet arcum AE non vltra terminum E progredi, sed in E necessario reflecti debere, eiusque valorem in contrarium sensum conuerti; atque haud difficulter intelligitur, nostrae curvae portionem vltra hunc terminum E in spiralem esse abituram, post infinitos gyros in ipso centro C terminandam. Quia enim, sumto $\Phi = \infty$, etiam arcus s euanescit, sequitur arcum ab E vsque ad centrum C porrectum praecise aequalem esse futurum arcui AE. Tab. II. Fig. 3.

§. 14. Haec autem omnia clariora reddentur, si praeter elementa hactenus vsurpata insuper in computum introducamus angulum, quem curua in singulis punctis Z cum radio vectore CZ constituit. Ponamus igitur hunc angulum $CZA = \theta$, qui cum sit aequalis angulo ZCP, erit

$$\text{tang. } \theta = \frac{p}{t} = \frac{e^{\alpha \Phi} - e^{\beta \Phi}}{\alpha e^{\alpha \Phi} - \beta e^{\beta \Phi}};$$

tum vero quia angulus $ACP = $ ang. $CNZ = \Phi$, qui metitur amplitudinem arcus AZ, erit angulus $ACZ = \Phi - \theta$;

vnde

vnde patet, translato puncto Z in A, seu sumto $\Phi = 0$, fore angulum $\theta = 0$, vnde manifesto fit pro hoc casu $CZA = 0$.

§. 15. Progrediamur nunc ab initio A per Z continuo vlterius in infinitum, et quia $\alpha > \beta$, euidens est angulum $AZC = \theta$ paulatim fieri continuo maiorem; statim enim ab initio, vbi Φ adhuc valde paruum, ob $e^{\alpha\Phi} = 1 + \alpha\Phi$ et $e^{\beta\Phi} = 1 + \beta\Phi$ erit

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\Phi(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta) + (\alpha\alpha - \beta\beta)\Phi} = \frac{\Phi}{1 + (\alpha + \beta)\Phi},$$

seu proxime $\theta = \Phi$. Vnde patet, quo longius progrediamur, istum angulum increscere, neque vero vltra certum terminum augeri posse. Si enim amplitudo Φ statuatur infinita, ita vt curua iam per infinitos gyros a centro C recesserit, quia $\alpha > \beta$, terminus $e^{\beta\Phi}$ prae $e^{\alpha\Phi}$ euanescet, sicque tandem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\alpha} = \beta$. Quare cum $\alpha\beta = 1$ et $\alpha > \beta$, semper erit $\alpha > 1$ et $\beta < 1$, ideoque tang. $\theta < 1$; vnde patet limitem istum, ad quem angulus θ continuo magis propinquat, minorem esse quam $45°$, sicque ista curua, postquam plures gyros perfecerit, tandem confundetur cum spirali logarithmica, quae a radiis secatur sub angulo, cuius tangens $= \beta$.

§. 16. Egrediamur nunc ab initio A continuo propius ad centrum C, quo casu amplitudo euadet negatiua. Statuamus igitur $\Phi = -\psi$, ita vt ψ sit amplitudo ab initio A retrorsum continuata, eritque

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi}},$$

vnde dum angulus ψ existit quam minimus, erit

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\psi(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = -\psi,$$

ita vt hic sit $\theta = -\psi$, quo indicatur, istum angulum in partem

tem contrariam conuerti, et continuo fieri maiorem. Mox autem iſte angulus θ inſignia capiet incrementa, atque adeo vsque ad angulum rectum increſcet, quod fit vbi tang. θ euadet infinita, ſiue vbi fit denominator $\alpha e^{\beta\psi} - \beta e^{\alpha\psi} = 0$; tum igitur erit ſumtis logarithmis $l\alpha + \beta\psi = l\beta + \alpha\psi$, vnde colligitur amplitudo:

$$\psi = \frac{1}{\alpha - \beta} l \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta},$$

ſiue $\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}}$. Ponamus nunc hoc euenire in puncto E, ita vt radius CE hic ad curuam ſit normalis, et quia $\theta = -90°$, ob $\Phi = -\psi$, erit angulus $ACE = 90° - \psi$, ſicque ψ dabit angulum BCE. Quoniam vero hic eſt $t = 0$ et ipſa diſtantia $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit haec diſtantia:

$$CE = p = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\alpha\psi} - e^{-\beta\psi}) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{e^{\beta\psi} - e^{\alpha\psi}}{e^{n\psi}}.$$

Cum igitur ſit

$$\psi = \frac{2 l \alpha}{\sqrt{(nn - 4)}} = \frac{2 l \alpha}{\alpha - \beta}, \text{ erit}$$

$$e^{\alpha\psi} = \alpha^{\frac{2\alpha}{\alpha - \beta}}; \quad e^{\beta\psi} = \alpha^{\frac{2\beta}{\alpha - \beta}} \text{ et}$$

$$e^{(\alpha + \beta)\psi} = \alpha^{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}}.$$

Vbi ſignum negatiuum tantum lineam p afficit, ipſa enim diſtantia z ſemper eſt poſitiua.

§. 17. Nunc a puncto modo inuento E, vbi $\theta = -90°$, vlterius retro progrediamur, augendo ſcilicet amplitudinem ψ vltra terminum inuentum, atque denominator fractionis pro tang. θ inuentus euadet negatiuus, ſicque angulus θ, qui hactenus fuerat negatiuus, hic ſubito ſignum mutabit, et curua ex puncto E in plagam contrariam inflectetur, ita vt in E cuſpidem formauerit, et quo longius progrediamur, tang. θ

 con-

continuo magis diminuetur, neque tamen vltra certum terminum, quem cognofcemus ftatuendo amplitudinem $\psi = \infty$; tum autem fiet tang. $\theta = \frac{1}{\beta} = \alpha$. Poftquam igitur curua infinitos gyros continuo minores peregerit, tandem cum fpirali logarithmica conueniet, cum radiis angulum faciente, cuius tangens $= \alpha$, ideoque maior vnitate, ficque ifte angulus femper maior erit femirecto. Per fe autem perfpicuum eft diftantias z continuo magis imminui, atque adeo euanefcere ob $e^{-\alpha\psi} = 0$ et $e^{-\beta\psi} = 0$.

Euolutio cafus fecundi,
quo $n = 2$.

§. 18. Hunc cafum facile ex praecedente deriuabimus, ponendo $\alpha = \beta = 1$. Quoniam autem hoc cafu in fuperioribus formulis tam numeratores quam denominatores euanefcerent, ftatuemus inter α et β infinite paruam differentiam, ponamusque $\alpha = 1 + \omega$ et $\beta = 1 - \omega$, ficque erit $\alpha - \beta = 2\omega$; praeterea vero

$$e^{\alpha\Phi} = e^{(1+\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 + \omega\Phi) \text{ et}$$
$$e^{\beta\Phi} = e^{(1-\omega)\Phi} = e^{\Phi}(1 - \omega\Phi).$$

His autem valoribus fubftitutis vbique tam numeratorem quam denominatorem per ω diuidere licebit, ita vt hoc pacto littera infinite parua introducta ω ex calculo excedat.

§. 19. Hoc igitur modo fingulas formulas percurramus, ac primo quidem reperiemus $ZP = p = a\Phi e^{\Phi}$; hinc quia erat arcus $AZ = s = np$, hoc cafu habebimus arcum $AZ = 2a\Phi e^{\Phi}$. Deinde prodibit fimili modo interuallum $ZP = t = a(1 + \Phi)e^{\Phi}$, vnde fimul radius ofculi innotefcet, fcilicet $r = nt = 2a(1 + \Phi)e^{\Phi}$. Ex his autem coniunctis colligitur tang. $\theta = \frac{p}{t} = \frac{\Phi}{1+\Phi}$, tum vero hinc etiam facile definiri poterit ipfa diftantia:

CZ

$$CZ = a e^{\Phi} \sqrt{(1 + 2\Phi + 2\Phi\Phi)}.$$

Denique hic manet vt ante angulus $ACZ = \Phi - \theta$.

§. 20. Incipiamus hic quoque a puncto A, vbi $\Phi = 0$, ideoque $p = 0$ et $s = 0$, tum vero $t = a$, $r = 2a$ et angulus $\theta = 0$. Hinc autem, amplitudinem Φ progrediendo continuo magis augeamus, atque etiam angulus θ continuo magis increscet, attamen nunquam certum terminum excedet; posito enim $\Phi = \infty$, erit tang. $\theta = 1$, ideoque $\theta = 45°$, sicque ista curua in infinito confundetur cum spirali logarithmica semirectangula; multo tamen magis diuerget, quandoquidem pro spirali foret $z = a e^{\Phi}$; vnde patet hic distantias z esse infinities maiores pro paribus amplitudinibus. Ex quo perspicuum est hanc curuam prorsus vt casu praecedenti per spiras infinitas continuo longius a centro C recedere.

§. 21. Consideremus nunc etiam istam curuam retro continuatam, ac ponamus ψ loco $-\Phi$. Cum igitur sit $z = \frac{a}{e^{\psi}} \sqrt{(1 - 2\psi + 2\psi\psi)}$, euidens est aucta amplitudine ψ denominatorem e^{ψ} multo magis increscere quam numeratorem; vnde distantiae continuo euadent minores, et mox fere euanescent. Deinde cum iam ipse arcus negatiue sumtus sit $s = + \frac{2a\psi}{\psi}$, quam diu amplitudo ψ valde est parua, erit $s = \frac{2a\psi}{1+\psi}$; interim tamen, sumto $\psi = \infty$, etiam iste arcus iterum euanescit; ex quo perspicuum est longitudinem arcus tantum vsque ad certum terminum augeri, eoque superato rursus imminui: Alicubi igitur maximum nanciscetur valorem, quem differentiale huius formulae, nihilo aequatum, ostendet, vnde reperitur $\psi = 1$, hoc est, vbi amplitudo aequatur sinui toto, vnde iste valor maximus respondet amplitudini:

$$\psi = 57°, 17', 45'',$$

lon-

longitudo autem maxima huius arcus erit $= \frac{2a}{e}$, exiſtente $e = 2,71828$; tum vero, ob $\psi = 1$, erit diſtantia a centro $z = \frac{a}{e}$, angulus autem θ hoc loco euadet rectus, angulusque ad centrum $\Phi - \theta = 90^\circ - \psi$, ideoque angulus

$$BCE = \psi = 57^\circ, 17', 45';$$

vbi obſeruetur caſu praecedente, quo erat $n > 2$, angulum BCE ſemper fuiſſe minorem.

§. 22. Conſideremus nunc rurſus iſtam curuam ab A antrorſum continuatam, et cum vi problematis ſit $ss = 8\Sigma$, denotante s arcum et Σ aream ſectoris, ob $s = 2a\Phi e$, erit $\Sigma = \frac{1}{2}a^2\Phi^2 e^{2\Phi}$, ſicque omnes areae, a puncto fixo A ſumtae, quadratis arcuum ab eodem termino ſumtorum vtique ſunt proportionales; id quod etiam tenendum eſt de altera curuae portione a puncto A retrorſum verſus centrum C procedente, vbi pro loco cuſpidis E, quoniam inuenimus arcum $AE = \frac{2a}{e}$, erit area ſectoris $ACE = \frac{aa}{2ee}$. Quando autem vltra centrum C verſus E progredimur, arcus iterum diminuuntur, et etiam areae ſectorum iterum imminui ſunt cenſendae; propterea quod in plagam contrariam vergunt. At vbi vsque ad centrum C fuerit peruentum, tam longitudo arcus quam area euaneſcunt, id quod eueniet poſt infinitos gyros, qui tandem etiam cum ſpirali logarithmica ſemirectangula confundentur; propterea quod tang. $\theta = \frac{\psi}{\psi - 1}$, qui valor ſumto $\psi = \infty$ abit in vnitatem, fietque $\theta = 45^\circ$; ſicque iſta curua ita eſt comparata, vt tam in infinitum a centro recedens, quam proxime ad centrum accedens cum tali ſpirali conueniat.

§. 23. Cum igitur, ſi viciſſim a centro C per infinitas ſpiras vsque ad punctum fixum A progrediamur, tota arcus

cus longitudo euanescat, ideoque etiam area descripta: non
solum punctum fixum A problemati nostro satisfaciet, sed
etiam ipsum centrum C, ita vt omnes areae a centro C com-
putatae proportionales sint quadratis arcuum ab eodem puncto
C sumtorum. Namque si vt ante arcus quicunque A Z voce-
tur $= s$ et area sectoris A C Z $= \Sigma$, erit quoque totus arcus
a centro C ad punctum indefinitum Z porrectus $= s$, eodem-
que modo area a centro C vsque ad Z sumta $= \Sigma$, sicque
etiam pro centro C erit $ss = 8\,\Sigma$, quae obseruatio etiam lo-
cum habet pro casu primo, quo $n > 2$, vbi ergo proprietas
praescripta non solum ad punctum A sed etiam ad centrum
C pertinere est censenda.

Euolutio casus tertii,
quo $n < 2$.

§. 24. Quo istum casum facilius in calculo tractari
queamus, statuamus $n = 2\cos.\gamma$, siquidem hoc modo omnes
numeri binario minores exprimi possunt, et conditio praescrip-
ta nunc postulabit, vt sit $ss = 8\,\Sigma\cos.\gamma$; tum autem ambae
litterae α et β nunc ita per imaginaria exprimentur, vt sit

$$\alpha = \cos.\gamma + \sqrt{-1}\,\sin.\gamma \text{ et } \beta = \cos.\gamma - \sqrt{-1}\,\sin.\gamma.$$

Ponamus autem breuitatis gratia $\cos.\gamma = \mu$ et $\sin.\gamma = \nu$,
vt sit

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \text{ et } \beta = \mu - \nu\sqrt{-1},$$

sicque erit $\alpha - \beta = 2\nu\sqrt{-1}$.

§. 25. Euoluamus nunc ambas formulas exponentia-
les $e^{\alpha\Phi}$ et $e^{\beta\Phi}$, et quoniam ex computo Imaginariorum con-
stat esse:

$$e^{\omega\sqrt{-1}} = \cos.\omega + \sqrt{-1}\,\sin.\omega \text{ et}$$
$$e^{-\omega\sqrt{-1}} = \cos.\omega - \sqrt{-1}\,\sin.\omega,$$

 habe-

habemus primo: $e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi} \cdot e^{\nu\Phi\sqrt{-1}}$, vnde facta reductione erit:

$$e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\operatorname{cof.} \nu\Phi + \sqrt{-1}\, \operatorname{fin.} \nu\Phi),$$

fimilique modo erit

$$e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\operatorname{cof.} \nu\Phi - \sqrt{-1}\, \operatorname{fin.} \nu\Phi).$$

In formulis autem fupra inuentis in cafu primo occurrit expreffio $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}$, cuius ergo valor per iftam reductionem euadit $e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi} \cdot \sqrt{-1}\, \operatorname{fin.} \nu\Phi$. Deinde quoque occurrit formula $\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}$, quae reducta dabit:

1°. $\alpha e^{\alpha\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu \operatorname{cof.}\nu\Phi - \nu \operatorname{fin.}\nu\Phi + \mu\sqrt{-1}\operatorname{fin.}\nu\Phi + \nu\sqrt{-1}\operatorname{cof.}\nu\Phi)$,

2°. $\beta e^{\beta\Phi} = e^{\mu\Phi}(\mu \operatorname{cof.}\nu\Phi - \nu \operatorname{fin.}\nu\Phi - \mu\sqrt{-1}\operatorname{fin.}\nu\Phi - \nu\sqrt{-1}\operatorname{cof.}\nu\Phi)$,

vnde conficitur:

$$\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi} = 2\, e^{\mu\Phi}\sqrt{-1}\,(\mu \operatorname{fin.} \nu\Phi + \nu \operatorname{cof.} \nu\Phi).$$

§. 26. His iam factis reductionibus, ob

$$\alpha - \beta = 2\nu\sqrt{-1},$$

formulae in cafu primo inuentae ad cafum praefentem accommodari poterunt. Primo enim, quia fupra habuimus

$$p = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}),$$

pro cafu praefente habebimus:

$$p = \frac{a\, e^{\mu\Phi} \operatorname{fin.} \nu\Phi}{\nu}, \text{ hinc porro}$$

$$s = \frac{2\mu\, a\, e^{\mu\Phi} \operatorname{fin.} \nu\Phi}{\nu}.$$

Deinde erat

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}),$$

vnde pro cafu praefenti erit:

$$t = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \text{ fin. } \nu \Phi + \nu \text{ cof. } \nu \Phi),$$

vnde deductus est radius osculi:

$$r = n\, t = \frac{2 \mu a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} (\mu \text{ fin. } \nu \Phi + \nu \text{ cof. } \nu \Phi).$$

Praeterea consideravimus angulum ACT $= \theta$, vidimusque esse tang. $\theta = \frac{p}{t}$, quamobrem nunc habebimus:

$$\text{tang. } \theta = \frac{\text{fin. } \nu \Phi}{\mu \text{ fin. } \nu \Phi + \nu \text{ cof. } \nu \Phi} = \frac{1}{\mu + \nu \text{ cot. } \nu \Phi}.$$

Inuento autem angulo θ ostendimus esse angulum ACZ $= \Phi - \theta$. Denique posita ipsa distantia CZ $= z$, quoniam erat $z = \sqrt{(pp + tt)}$, erit nunc

$$z = \frac{a}{\nu} \cdot e^{\mu \Phi} \sqrt{[(\mu\mu + 1) \text{ fin. } \nu \Phi^2 + 2 \mu \nu \text{ fin. } \nu \Phi \text{ cof. } \nu \Phi + \nu\nu \text{ cof. } \nu \Phi^2]},$$

quae expressio reducitur ad sequentem:

$$z = \frac{a}{\nu} e^{\mu \Phi} \sqrt{(1 + \mu \nu \text{ fin. } 2 \nu \Phi - \mu \mu \text{ cof. } 2 \nu \Phi)}.$$

§. 27. His praeparatis contemplemur attentius singula symptomata harum curuarum. Ac primo quidem sumta amplitudine $\Phi = 0$, pro termino initiali A habebimus $p = 0$, ideoque etiam $s = 0$; tum vero erit $t = a$, ideoque radius osculi in A $= 2 \mu a$; porro habebimus $z = t = a$, ita vt prodeat, vti assumsimus, interuallum CA $= a$, quae recta simul curvam in A tanget, siquidem fit tang. $\theta = 0$. Ab hoc autem termino A antrorsum progrediemur, dum amplitudinem Φ continuo augebimus; tum autem arcus s non perpetuo crescet, vt casu primo, quoniam sumto $\nu \Phi = \pi$ denuo fit $s = 0$, vnde interea valorem maximum acquisiuerit necesse est, quem indicat haec aequatio differentialis:

$$\mu \text{ fin. } \nu \Phi + \nu \text{ cof. } \nu \Phi = 0,$$

iisdem casibus nempe, quibus tam t, quam r euanescunt; vnde in his locis angulus θ fiet rectus, ita vt radius CZ ibi

in

in curuam sit normalis. Quoniam igitur vltra hunc terminum arcus s iterum decrescit, necesse est vt curua quasi reflectatur et in partes contrarias vergat; ex quo patet, in omnibus his punctis curuam cuspidibus esse praeditam atque adeo curvaturam infinitae paruam esse habituram. Talia autem puncta adeo infinita dabuntur, ex aequatione:

$$\mu \,\text{sin.}\, \nu \Phi + \nu \,\text{cos.}\, \nu \Phi = 0$$

definienda; vnde cum sit $\mu = \text{cos.}\, \gamma$ et $\nu = \text{sin.}\, \gamma$, haec aequatio dabit:

$$\text{cos.}\, \gamma \,\text{sin.}\, \nu \Phi + \text{sin.}\, \gamma \,\text{cos.}\, \nu \Phi = 0,$$

ideoque $\text{sin.}\, (\gamma + \nu \Phi) = 0$, quod manifesto euenit infinitis casibus, quibus est $\gamma + \nu \Phi$ vel $\pm \pi$, vel $\pm 2\pi$, vel $\pm 3\pi$, vel in genere $\pm i\pi$, vnde consequimur pro his curuis amplitudinem $\Phi = \frac{\pm i\pi - \gamma}{\nu}$. Ex quo intelligitur, hanc curuam antrorsum progrediendo infinitas habituram esse cuspides his amplitudinibus ordine respondentes:

1°. $\Phi = \frac{\pi - \gamma}{\nu}$,

2°. $\Phi = \frac{2\pi - \gamma}{\nu}$,

3°. $\Phi = \frac{3\pi - \gamma}{\nu}$,

4°. $\Phi = \frac{4\pi - \gamma}{\nu}$,

etc.

Pro his autem punctis longitudo arcus a termino A sumta erit

1°. $s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)} \,\text{sin.}\, (\pi - \gamma) = 2\mu a \, e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)}$,

2°. $s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)} \,\text{sin.}\, (2\pi - \gamma) = -2\mu a \, e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)}$.

3°.

$3^{\circ}.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)} \text{fin.} (3\pi - \gamma) = 2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$

$4^{\circ}.\ s = \frac{2\mu a}{\nu} e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)} \text{fin.} (4\pi - \gamma) = -2\mu a e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$

etc. etc.

§. 28. Iam obferuauimus in omnibus his punctis fore $t = 0$, ideoque tang. $\theta = \infty$, id quod etiam noftra formula indicat, quae ad hanc reduci poteft: tang. $\theta = \frac{\text{fin.}\, \nu\Phi}{\text{fin.}\,(\gamma + \nu\Phi)}$. Hinc igitur quia angulus $ACZ = \Phi - \theta$, erit pro cafibus modo memoratis:

$1^{\circ}.$ Ang. $ACZ = \frac{\pi(2 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$2^{\circ}.$ Ang. $ACZ = \frac{\pi(4 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$3^{\circ}.$ Ang. $ACZ = \frac{\pi(6 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

$4^{\circ}.$ Ang. $ACZ = \frac{\pi(8 - \nu)}{2\nu} - \frac{\gamma}{\nu}$,

etc.

Succinctius autem horum angulorum complementa, fiue anguli BCZ exprimentur, hoc fcilicet modo:

$1^{\circ}.$ Ang. $BCZ = \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(1 - \nu)\pi}{\nu}$,

$2^{\circ}.$ Ang. $BCZ = \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(2 - \nu)\pi}{\nu}$,

$3^{\circ}.$ Ang. $BCZ = \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(3 - \nu)\pi}{\nu}$,

$4^{\circ}.$ Ang. $BCZ = \frac{\gamma}{\nu} - \frac{(4 - \nu)\pi}{\nu}$,

Denique ipfae diftantiae $CZ = z$, quia ob $t = 0$ eft $z = p$, erunt pro iis locis:

$1^{\circ}.\ CZ = a e^{\frac{\mu}{\nu}(\pi - \gamma)},$

$2^{\circ}.\ CZ = a e^{\frac{\mu}{\nu}(2\pi - \gamma)},$

$$3^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(3\pi - \gamma)},$$

$$4^\circ.\ CZ = a\, e^{\frac{\mu}{\nu}(4\pi - \gamma)},$$

etc.

§. 29. Eodem prorſus modo a termino A ad centrum C accedendo innumerabiles dabuntur cuſpides, quae reſpondebunt ſequentibus amplitudinibus negatiuis:

1°. $\Phi = \frac{-\gamma}{\nu}$, (quae puncto E ſupra conſiderato reſpondet),

2°. $\Phi = \frac{-\pi - \gamma}{\nu}$,

3°. $\Phi = \frac{-2\pi - \gamma}{\nu}$,

4°. $\Phi = \frac{-3\pi - \gamma}{\nu}$,

etc. etc.

quae puncta continuo propius ad centrum C accedent, et per infinitas ſpiras, cuſpidibus permixtas, tandem in centro C euaneſcent.

§. 30. Denique iſtae curuae a praecedentibus etiam in hoc diſcrepabunt, quod in infinitis locis longitudo arcus s euaneſcat. Cum enim ſit $s = \frac{2\mu a e^{\mu\Phi}}{\nu}$ ſin. $\nu\Phi$, hoc euenit, vbi fuerit Φ vel $\frac{\pi}{\nu}$, vel $\frac{2\pi}{\nu}$, vel $\frac{3\pi}{\nu}$, etc. vel etiam negatiue $\Phi = \frac{-\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-2\pi}{\nu}$, vel $= \frac{-3\pi}{\nu}$, etc. Quare cum in omnibus iſtis locis ſit longitudo arcus $s = 0$, ibidem quoque area Σ euaneſcet, id quod etiam in ipſo centro C eueniet. Vnde concludimus praeter duo puncta A et C innumerabilia inſuper alia dari puncta eiusdem indolis, vt areae a quolibet eorum computatae pariter proportionales ſint quadratis arcuum ab iisdem punctis ſumtorum. Poſtremo hic non eſt praetereundum, in omnibus iſtis punctis curuam a radiis CZ tangi, veluti

veluti euenit in puncto A; et quoniam eſt $\theta = 0$, pro ſingulis erit etiam angulus $ACZ = \Phi$, ſcilicet ipſi amplitudini aequalis, ex quo forma harum curuarum haud difficulter colligi poteſt.

Alia ſolutio problematis, ex radio vectore $CZ = z$ et angulo deſcripto $ACZ = \omega$, deriuata.

§. 31. Ex his binis variabilibus z et ω primo area $ACZ = \Sigma$ ita exprimitur, vt ſit $\Sigma = \frac{1}{2}\int zz\partial\omega$; deinde vero pro arcu curuae $AZ = s$ habebimus:

$$s = \int\sqrt{(\partial z^2 + zz\partial\omega^2)},$$

quibus formulis inuentis noſtrum problema poſtulat vt ſit

$$ss = 4n\Sigma = 2n\int zz\partial\omega,$$

quae aequatio quo euolui queat, ſtatuamus $z\partial\omega = q\partial z$, vt ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, ſicque loco anguli ω nouam variabilem q introducimus, eritque $\int zz\partial\omega = \int qz\partial z$; tum vero fiet

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz\partial\omega^2)} = \partial z\sqrt{(1+qq)}.$$

Differentiemus nunc noſtram aequationem, prodibitque $2s\partial s = 2nqz\partial z$, ideoque $s = \frac{nqz}{\sqrt{(1+qq)}}$, quae denuo differentiata praebet

$$\partial z\sqrt{(1+qq)} = \frac{nq\partial z}{\sqrt{(1+qq)}} + \frac{nz\partial q}{(1+qq)^{\frac{3}{2}}},$$

quae ducta in $(1+qq)^{\frac{3}{2}}$ dat hanc aequationem rationalem:

$$\partial z(1+qq)^2 = nq\partial z(1+qq) + nz\partial q.$$

§. 32. Iſta aequatio porro inſigne hoc commodum praeſtat, vt binae variabiles a ſe inuicem ſeparari queant; inde

 enim

enim deducitur $\frac{\partial z}{z} = \frac{+ n \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, vnde quantitas z per q definiri poterit. Tum autem, cum ſit $\partial \omega = \frac{q \partial z}{z}$, erit

$$\partial \omega = \frac{n q \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)},$$

ſicque etiam angulus ω per eandem variabilem q determinabitur. His autem inuentis binae coordinatae $CX = x$ et $XZ = y$, ſponte ſe produnt, ac pariter per ſolam variabilem q exprimentur: erit enim $x = z$ ſin. ω et $y = z$ coſ. ω, id quod ad ſolutionem ſufficere poſſet. Verum hic maxime oſtendi conueniet, quomodo haec ſolutio cum praecedente conſentiat. Hunc in finem magis euoluamus formulas inuentas, ac quoniam denominator duobus conſtat factoribus, formula pro $\frac{\partial z}{z}$ inuenta diſcerpatur in has partes:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{q \partial q}{1+qq} + \frac{(n-q) \partial q}{1-nq+qq},$$

vnde integrando colligitur:

$$l z = l \sqrt{(1+qq)} + \int \frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq}.$$

Hic iam pro parte poſteriore ponamus denominatoris $1-nq+qq$ factores eſſe $(q-\alpha)(q-\beta)$, eritque $\alpha+\beta = n$ et $\alpha\beta = 1$, quo facto reſoluetur fractio $\frac{n-q}{(q-\alpha)(q-\beta)}$, in has duas: $\frac{A}{q-\alpha} + \frac{B}{q-\beta}$, exiſtente $A = \frac{\beta}{\alpha-\beta}$ et $B = \frac{-\alpha}{\alpha-\beta}$, ſicque habebitur:

$$\int \frac{(n-q)\partial q}{1-nq+qq} = A\, l(q-\alpha) + B\, l(q-\beta),$$

conſequenter per meros logarithmos habebimus

$$l z = l \sqrt{(1+qq)} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} l(q-\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} l(q-\beta),$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$z = \frac{a\sqrt{(1+qq)}\,(q-\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}},$$

quae ergo expreſſio adeo eſt algebraica, ſi modo litterae α et β

β ſint numeri rationales; ſin autem fiunt imaginarii, quod euenit quando $n < 2$, tum poſterior integratio ad arcus circulares reuocetur.

§. 33. Tractemus ſimili modo alteram formulam inventam $\partial\omega = \frac{n q \partial q}{(1+qq)(1-nq+qq)}$, quae vt ſupra in duas partes diuellatur, ſcilicet:

$$\partial\omega = \frac{-\partial q}{1+qq} + \frac{\partial q}{1-nq+qq};$$

vbi pars prior praebet arcum circularem, cuius tangens $= q$; poſterior vero, vt ante, per logarithmos exprimetur, ſiquidem litterae α et β fuerint reales. Hic autem plurimum notaſſe iuuabit, cum ſit $\partial\omega = \frac{q\partial z}{z}$, q fore tangentem anguli CZA, quem in ſolutione praecedente littera θ deſignauimus, ita vt ſit $\int\frac{\partial q}{1+qq} = \theta$, vnde aequatio noſtra erit

$$\omega + \theta = \int\frac{\partial q}{1-nq+qq}.$$

Facile autem perſpicitur ſummam horum angulorum exhibere amplitudinem arcus AZ, quam ante vocauimus $= \Phi$, ita vt ſit $\theta + \omega = \Phi = \int\frac{\partial q}{1-nq+qq}$.

§. 34. Videamus igitur, vtrum hinc eandem relationem inter binos angulos θ et Φ elicere queamus, quam in ſuperiore ſolutione ſumus adepti, quae erat

$$\text{tang.}\ \theta = \frac{e^{\alpha\Phi} - e^{\beta\Phi}}{\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}}.$$

Cum igit ſit $q = \text{tang.}\,\theta$, erit $\partial q = \frac{\partial\theta}{\text{coſ.}\,\theta^2}$, quibus valoribus introductis erit

$$\Phi = \int\frac{\partial\theta}{1-n\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\theta} = \int\frac{2\partial\theta}{2-n\,\text{ſin.}\,2\theta}.$$

Ad hanc conuenientiam oſtendendam retineamus in calculo litteram $q = \text{tang.}\,\theta$, vt ſit $\partial\Phi = \frac{\partial q}{1-nq+qq}$, atque denomina-

 torem

torem per hos factores repraesentemus: $(q-\alpha)(q-\beta)$, existente $\alpha+\beta=n$ et $\alpha\beta=1$, eritque

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=\frac{1}{(q-\alpha)(q-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\alpha)}-\frac{1}{(\alpha-\beta)(q-\beta)}.$$

Nunc igitur erit

$$(\alpha-\beta)\,\partial\Phi=\frac{\partial q}{q-\alpha}-\frac{\partial q}{q-\beta},$$

vnde integrando fit $(\alpha-\beta)\Phi=l\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, hincque ad numeros progrediendo erit $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$, ex qua aequatione elicitur $q=\dfrac{\beta C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-\alpha}{C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}-1}$.

§. 35. Haec porro formula supra et infra multiplicata per $e^{\beta\Phi}$ transit in hanc: $q=\dfrac{\beta C\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{C\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}$, vbi si capiatur $C=\frac{\alpha}{\beta}$, prodibit

$$q=\frac{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\alpha\,e^{\beta\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\,e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}=\frac{e^{\alpha\Phi}-e^{\beta\Phi}}{\alpha\,e^{\alpha\Phi}-\beta\,e^{\beta\Phi}},$$

quae est ea ipsa expressio quam ante inuenimus. Quod autem constanti C hic ipse valor $\frac{\alpha}{\beta}$ tribui debeat, ex prima aequatione inuenta $C\,e^{(\alpha-\beta)\Phi}=\frac{q-\alpha}{q-\beta}$ colligitur, ad ipsum curvae initium A regrediendo, vbi quia recta CA curuam tangit, hic erit $\Phi=0$ et $\theta=0$, ideoque etiam $q=0$, vnde prodit $C=\frac{\alpha}{\beta}$, sicque conformitas huius solutionis cum praecedente perfecte est euicta.

Solutio

Solutio tertia eiusdem problematis, ex binis coordinatis $CX = x$ et $XZ = y$ immediate deducta.

§. 36. Cum igitur hic sit area $CAZX = \int y \partial x$, area vero trianguli $CXZ = \frac{1}{2} xy$, erit area sectoris Tab. II. Fig. 2.

$$ACZ = \Sigma = \tfrac{1}{2}\int (y \partial x - x \partial y).$$

Nunc autem porro ponamus $\partial y = p \partial x$, eritque

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\int \partial x (y - p x),$$

hinc vero erit elementum curuae $\partial s = \partial x \sqrt{(1 + pp)}$, quare cum problema nostrum postulet vt sit $ss = 4 n \Sigma$, prima differentiatio statim dat:

$$s \sqrt{(1 + pp)} = n (y - p x), \text{ ideoque}$$
$$s = \frac{n (y - p x)}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

§. 37. Ante autem quam denuo differentiemus, ponamus $y = u x$, vnde, quia fit

$$\partial y = u \partial x + x \partial u = p \partial x,$$

habebimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{+ \partial u}{p - u}$. Nunc igitur erit

$$y - p x = - x (p - u),$$

at vero differentiando commode fit

$$\partial . (y - p x) = - x \partial p.$$

His praeparatis differentiatio repetita dabit:

$$\partial x \sqrt{(1 + pp)} = - \frac{n x \partial p}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{n x (p - u) p \partial p}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}},$$

quae aequatio ducta in $(1 + pp)^{\frac{3}{2}}$ nobis largitur:

$$\partial x (1 + pp)^2 = - n x \partial p (1 + pp) + n x (p - u) p \partial p,$$

ex

ex qua ſtatim elicimus:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2}.$$

Cum igitur modo inuenerimus $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$, nunc habebimus aequationem differentialem primi gradus inter binas tantum variabiles p et u, quae ita ſe habet:

$$\frac{\partial u}{p - u} = -\frac{n \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2}, \text{ ſiue}$$

$$\partial u = -\frac{n \partial p (p - u)(1 + p u)}{(1 + p p)^2},$$

vbi autem ambae variabiles p et u tantopere inter ſe ſunt permixtae, vt vix vlla via patere videatur ad eam reſoluendam; at vero ſimplex ſubſtitutio totum negotium facile conficiet. Statuamus enim $u = \frac{p + q}{1 + p q}$, tum enim ſtatim ſatis concinne prodibit:

$$p - u = \frac{q (p p + 1)}{1 + p q} \text{ et } 1 + p u = \frac{1 + p p}{1 + p q},$$

qua ergo ſubſtitutione denominator ille $(1 + p p)^2$ feliciter tolletur, erit enim

$$\frac{(p - u)(1 + p u)}{(1 + p p)^2} = \frac{q}{(1 + p q)^2}.$$

§. 38. Deinde vero differentiando reperiemus:

$$\partial u = \frac{\partial p (1 + q q)}{(1 + p q)^2} - \frac{\partial q (1 + p p)}{(1 + p q)^2},$$

quibus igitur valoribus aequatis, quia denominatores $(1 + p q)^2$ vtrinque ſe pulcherrime deſtruunt, aequatio reſultans erit:

$$\partial p (1 + q q) - \partial q (1 + p p) = - n q \partial p,$$

vnde erit $\frac{\partial p}{1 + p p} = \frac{\partial q}{1 + n q + q q}$. Ponamus iam

$$1 + n q + q q = (q + \alpha)(q + \beta),$$

vt ſit $\alpha + \beta = n$ et $\alpha \beta = 1$, ac ſi ſtatuatur

$$\frac{1}{1 + n q + q q} = \frac{A}{q + \alpha} + \frac{B}{q + \beta},$$

erit $A = \frac{-1}{\alpha - \beta}$ et $B = \frac{1}{\alpha - \beta}$, hincque integrando:

Al.

$$\text{Arc. tang. } p = \frac{1}{\alpha-\beta}\, l\, \frac{q+\beta}{q+\alpha} + C.$$

Iam notetur p esse Cotangentem anguli A Z X, qui metitur amplitudinem arcus A Z, quam supra posuimus $= \Phi$, ita vt sit $p = \cot. \Phi$, ideoque Arc. tang. $p = 90^\circ - \Phi$, sicque mutata constante erit

$$\Phi = l\, c + \frac{1}{\alpha-\beta}\, l\, \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde ad numeros progrediendo erit

$$C\, e^{(\alpha-\beta)\Phi} = \frac{q+\alpha}{q+\beta},$$

vnde colligimus:

$$q = \frac{\alpha - \beta\, C\, e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{C\, e^{(\alpha-\beta)\Phi} - 1},$$

hinc autem porro, ob $p = \cot. \Phi$, elicitur valor

$$u = \frac{p-q}{1+pq} = \frac{y}{x}.$$

In ipso igitur initio, seu puncto A, debet esse $\Phi = 0$, ideoque $p = \infty$, atque etiam $u = \infty$; vnde perspicuum est esse debere $q = 0$. In valore igitur pro q inuento faciamus $\Phi = 0$, et quia esse debet $q = 0$, pro constante definienda habebimus: $C = \frac{\alpha}{\beta}$, sicque nunc habemus determinate:

$$q = \frac{\alpha - \alpha\, e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{\frac{\alpha}{\beta}\, e^{(\alpha-\beta)\Phi} - 1} = \frac{1 - e^{(\alpha-\beta)\Phi}}{\alpha\, e^{(\alpha-\beta)\Phi} - \beta}, \text{ siue}$$

$$q = \frac{e^{\beta\Phi} - e^{\alpha\Phi}}{\alpha\, e^{\alpha\Phi} - \beta\, e^{\beta\Phi}},$$

ex quo intelligitur per angulum, quem supra posuimus θ, fore $q = -\text{tang. } \theta$.

§. 39. Quoniam igitur per p, siue per angulum Φ, non solum q, sed etiam u expressum inuenimus, postrema formula euoluta dabit:

 $u =$

$$u = \frac{e^{\alpha\Phi}(1 + \alpha \cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(1 + \beta \cot.\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha - \cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta - \cot.\Phi)} = \frac{y}{x}.$$

Tantum igitur fupereft, vt aequatio $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$ integretur. Vtamur autem potius pofteriore aequatione:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{n \partial p (1 + p u)}{(1 + p p)^2},$$

quae ob $1 + p u = \frac{1 + p p}{1 + p q}$ transmutatur in hanc:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{-n \partial \Phi}{(1 + p p)(1 + p q)},$$

quae porro, ob $p = \cot.\Phi$, tranfit in hanc: $\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi}{1 + q \cot.\Phi}$. Nunc igitur loco q fcribatur valor inuentus, ac reperietur:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha - \cot.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta - \cot.\Phi)}, \text{ fiue}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{n \partial \Phi (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi})}{e^{\alpha\Phi}(\alpha \sin.\Phi - \cos.\Phi)\, e^{\beta\Phi}(\beta \sin.\Phi - \cos.\Phi)}.$$

Haec autem formula nimis complicata videtur, quam vt eius integrationem exfpectare liceat; verum fi denominatorem differentiemus, deprehendemus fore:

$$e^{\alpha\Phi} \partial \Phi (\alpha \alpha + 1) \sin.\Phi - e^{\beta\Phi} \partial \Phi (\beta \beta + 1) \sin.\Phi.$$

Quia vero eft $\alpha \alpha + 1 = n \alpha$ et $\beta \beta + 1 = n \beta$, iftud differentiale erit:

$$n \alpha e^{\alpha\Phi} \partial \Phi \sin.\Phi - n \beta e^{\beta\Phi} \partial \Phi \sin.\Phi = n \partial \Phi \sin.\Phi (\alpha e^{\alpha\Phi} - \beta e^{\beta\Phi}),$$

cui ipfe numerator praecife eft aequalis, ex quo ftatim adipifcimur

$$l x = l [e^{\alpha\Phi}(\alpha \sin.\Phi - \cos.\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta \sin.\Phi - \cos.\Phi)] + l a,$$

vnde concludimus

$$x = a e^{\alpha\Phi}(\alpha \sin.\Phi - \cos.\Phi) - a e^{\beta\Phi}(\beta \sin.\Phi - \cos.\Phi).$$

Quodfi nunc fractionem pro $\frac{y}{x}$ inuentam fupra et infra in $\sin.\Phi$ ducamus, habebimus:

y

$$\frac{y}{x} = \frac{e^{\alpha\Phi}(\text{fin.}\,\Phi + \alpha\,\text{cof.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\text{fin.}\,\Phi + \beta\,\text{cof.}\,\Phi)}{e^{\alpha\Phi}(\alpha\,\text{fin.}\,\Phi - \text{cof.}\,\Phi) - e^{\beta\Phi}(\beta\,\text{fin.}\,\Phi - \text{cof.}\,\Phi)},$$

ita vt denominator praebeat valorem ipfius x, hincque adeo fponte fe offert y; erit enim:

$$y = a\,e^{\alpha\Phi}(\text{fin.}\,\Phi + \alpha\,\text{cof.}\,\Phi) - a\,e^{\beta\Phi}(\text{fin.}\,\Phi + \beta\,\text{cof.}\,\Phi).$$

§. 40. Ex his igitur manifeftum eft, etiam hanc poftremam folùtionem cum ea, quam primo inuenimus, ad amusfim conuenire, propterea quod §. 10. eaedem plane formulae pro coordinatis x et y funt exhibitae. Interim tamen haec tertia folutio multo difficiliores integrationes atque artificia multo magis abftrufa poftulauit, ob quam ipfam rationem ifta folutio imprimis notatu digna eft vifa.