1794

Evolutio problematis cuius solutio analytica est difficillima dum synthetica per se est obvia

Leonhard Euler

EVOLVTIO PROBLEMATIS CVIVS SOLVTIO ANALYTICA EST DIFFICILLIMA, DVM SYNTHETICA PER SE EST OBVIA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 16 *Ian.* 1777.

1.

Problema, quod hic euoluendum ſuſcipimus, ita ſe habet: *Circa punctum fixum A deſcribere curuam C M, vt ductis ad ſingula puncta M radiis oſculi M R, diſtantia A R vbique ſit eiusdem magnitudinis.* Tab. I. Fig. 1. Hic primo ſtatim patet huic problemati ſatisfacere curuam ex euolutione circuli natam, cuius centrum ſit in puncto A, radius vero diſtantiae propoſitae AR aequalis. Deſcripto enim centro A radio A C circulo, ſi peripheriae Fig. 2. filum circumplicetur, quod ex C euolutum producat curuam C M, eius radius oſculi in M erit recta M R, circulum in R tangens, ita vt puncti R diſtantia a puncto A vbique ſit eadem.

§. 2. Praeterea vero etiam euidens eſt huic proble- Fig. 3. mati omnes ſatisfacere circulos, quocunque radio deſcriptos, quorum centra propoſitam teneant a puncto A diſtantiam. Si enim circa punctum R, cuius diſtantia ab A eſt data, radio quocunque R C describatur circulus C M, quia eius radius osculi in M est M R, distantia praescripta A R vtique pro omnibus punctis M est eadem. Sicque problema propositum duplicem admittit solutionem, quarum altera praebet curuas ex euolutione circuli, cuius radius A C datur, natas, altera vero complectitur infinities-infinitos circulos, quorum centra a puncto A datam teneant distantiam. Ex quo iam intelligimus, solutionem istius problematis analyticam ita comparatam esse debere, vt ambas solutiones memoratas in se complectatur.

§. 3. At vero solutio analytica haud parum debet esse ardua, propterea quod radius osculi, qui per differentialia secundi gradus determinatur, in computum ingreditur. Interim tamen haec solutio sequenti modo commodissime institui posse videtur. Posita distantia data $AR = a$, pro puncto curvae quocunque M vocetur distantia $AM = z$, ductaque ad M tangente M P, in eam ex A demittatur perpendiculum A P, quod vocemus $AP = p$, ac primo quidem quaeramus aequationem inter has binas variabiles $AM = z$ et $AP = p$, quandoquidem hinc deinceps haud difficulter aequatio inter coordinatas solitas deduci potest. Has autem binas variabiles ideo eligi conuenit, quod ex iis radius osculi M R simplicissime exprimi potest, siquidem habetur $MR = \frac{z \partial z}{\partial p}$, ita vt tantum differentialia primi gradus inuoluat.

Tab. I. Fig. 1.

§. 4. Quod si iam ex A ad radium osculi M R ducatur normalis A Q, quae tangenti M P erit parallela et aequalis, erit quoque $MQ = AP = p$, ideoque $QR = \frac{z \partial z}{\partial p} - p$. Quoniam igitur est $AQ = \surd(zz - pp)$, ob $AR = a$ habebitur ista aequatio pro curua quaesita:

$$aa = (zz - pp) + \left(\frac{z \partial z}{\partial p} - p\right)^2, \text{ siue}$$

$$aa = zz - pp + \frac{(z \partial z - p \partial p)^2}{\partial p^2}.$$

Quare

Quare si ponamus $zz - pp = tt$, ita vt sit

$$t = \sqrt{(zz - pp)} = MP = AQ,$$

statim habemus hanc aequationem maxime concinnam:

$$aa = tt + \frac{tt\partial t^2}{\partial p^2}, \text{ ideoque}$$

$$aa\partial p^2 = tt(\partial p^2 + \partial t^2),$$

quae duas tantum continet variabiles p et t, vnde elicitur

$$\partial p = \frac{t\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}.$$

§. 5. Quanquam iam integratio est facillima, antequam eius integrale consideremus, manifestum est huic aequationi differentiali satisfacere valorem $t = a$, quoniam hinc fractionis $\frac{t\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$ tam numerator quam denominator euanescunt. Hoc autem accuratius ita ostendi potest. Quoniam immediate deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\partial p\sqrt{(aa - tt)} - t\partial t = 0,$$

haec ad formam $M\partial V = 0$ reducta praebet

$$\sqrt{(aa - tt)}\left(\partial p - \frac{t\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}\right) = 0,$$

ita vt hic sit

$$M = \sqrt{(aa - tt)} \text{ et } \partial V = \partial p - \frac{t\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}},$$

Perspicuum autem est, quoties solutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem $M\partial V = 0$, eam complecti geminam solutionem, alteram $M = 0$, alteram vero $\partial V = 0$, ex qua posteriore demum integrando prodit $V = \text{Const.}$ Neque igitur mirandum est priorem solutionem $M = 0$ non in altera $V = C$ contineri, multoque minus paradoxon videri debet quod saepenumero aequationi differentiali eiusmodi valores satisfacere queant, qui in integrali completo non contineantur.

§. 6. Cum igitur noſtro caſu ſit $M = \sqrt{(aa - tt)}$ et $\partial V = \partial p - \frac{t \partial t}{\sqrt{(aa - tt)}}$, hinc aequatio inuenta duplicem manifeſto inuoluit ſolutionem; ac prior quidem ſtatim ſequitur ex valore $M = \sqrt{(aa - tt)} = 0$, qui dat $t = a$, vnde cum ſit $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $p = \sqrt{(zz - aa)}$; ex quo perſpicuum eſt in figura interuallum QR euaneſcere, et interuallum AQ eſſe conſtans, quae conditio ſatis clare curuam ex euolutione circuli, cuius radius $= AQ$, natam declarat, quod idem vero etiam analytice ex ipſa aequatione $p = \sqrt{(zz - aa)}$ oſtendi poteſt.

Tab. I. Fig. 4. §. 7. Hunc in finem accipiamus rectam quandam AC pro axe fixo, ac vocemus angulum $CAM = \Phi$, et pro puncto curuae proximo erit $Am = z + \partial z$ et angulus $MAm = \partial \Phi$, ſicque deſcripto centro A arculo Mp erit $mp = \partial z$ et $Mp = z \partial \Phi$, vnde elementum curuae naſcitur

$$Mm = \sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}.$$

Hinc iam ſimilitudo triangulorum mMp et mAP praebet:

$$Mm : Mp = mA : AP = MA : AP, \text{ ſiue}$$

$$\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)} : z \partial \Phi = z : p,$$

vnde fit $p = \frac{zz \partial \Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz \partial \Phi^2)}}$. Quoniam igitur inuenimus $p = \sqrt{(zz - aa)}$, ſumtis quadratis erit

$$zz - aa = \frac{z^4 \partial \Phi^2}{\partial z^2 + zz \partial \Phi^2},$$

vnde fit $\partial \Phi = \frac{\partial z \sqrt{(zz - aa)}}{az}$, quae formula, ponendo

$$\sqrt{(zz - aa)} = v,$$

ob $zz = aa + vv$, ideoque $\frac{\partial z}{z} = \frac{v \partial v}{aa + vv}$, ab irrationalitate liberata praebet $\partial \Phi = \frac{vv \partial v}{a(aa + vv)}$, ſiue $\partial \Phi = \frac{\partial v}{a} - \frac{a \partial v}{aa + vv}$, vnde integrando colligitur $\Phi = \frac{v}{a} - A \text{ tang. } \frac{v}{a}$.

§. 8. Denotet ω angulum cuius tangens eſt $\frac{v}{a}$, ita vt ſit $v = a \text{ tang. } \omega$, ideoque $z = \frac{a}{\text{coſ. } \omega}$, hincque porro angulus

lus $\Phi = \text{tang.}\,\omega - \omega$. Ad has formulas conſtruendas centro A, radio $AC = a$, deſcribamus circulum, in quo capiamus $CR = a\,\text{tang.}\,\omega$, cui aequalem ſumamus tangentem circuli RM, ita vt ſit $RM = a\,\text{tang.}\,\omega$, vnde ducta recta AM, ob $AR = a$ euidens eſt fore angulum $RAM = \omega$, hincque ipſam rectam $AM = \frac{a}{\cos\omega}$, ſicque haec recta AM aequatur noſtrae lineae z. Praeterea vero cum ſit angulus $CAR = \frac{CR}{CA} = \text{tang.}\,\omega$, ſi angulus $MAR = \omega$ ab eo ſubtrahatur, remanebit angulus $CAM = \text{tang.}\,\omega - \omega$, ideoque $CAM = \Phi$, ſicque punctum M revera erit in curua quaeſita, quam ergo ob $MR = CR$ patet generari ex euolutione arcus circuli CR, quae eſt prior ſolutio initio commemorata. Tab. I. Fig. 5.

§. 9. Altera vero ſolutio petenda eſt ex aequatione differentiali $\partial V = 0$, ſiue

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

cuius integrale dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$. Quia vero eſt $t = \sqrt{(zz - pp)}$, erit $\sqrt{(aa - tt)} = \sqrt{(aa - zz + pp)}$, ſicque aequatio noſtra erit: $\sqrt{(aa - zz + pp)} = c - p$; ſumtisque quadratis $aa - zz = cc - 2cp$, vnde deducimus

$$p = \frac{cc - aa + zz}{2c}.$$

Modo ante autem vidimus, poſito angulo $CAM = \Phi$, eſſe

$$p = \frac{zz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}};$$

quare ſi breuitatis gratia ponamus $cc - aa = bb$, erit

$$\frac{2czz\,\partial\Phi}{\sqrt{(\partial z^2 + zz\,\partial\Phi^2)}} = bb + zz,$$

ex qua aequatione elicitur:

$$\partial\Phi = \frac{(bb + zz)\,\partial z}{z\sqrt{[4cczz - (bb + zz)^2]}},$$

quae aequatio, quantumuis perplexa, tamen praeter circulos nullas

nullas alias curuas in se complectitur, quod quomodo eueniat nobis est ostendendum.

§. 10. Quo hanc formulam simpliciorem reddamus simulque litterarum numerum diminuamus, ponamus $zz = bbv$, vt sit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{2v}$, tum vero ponatur $4cc = (2n + 2)bb$, vbi meminisse oportet esse $bb = cc - aa$, quo facto nostra aequatio fiet

$$\partial \phi = \frac{(1 + v)\partial v}{2v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

quae aequatio commode in duas partes resoluitur hoc modo:

$$2\partial \phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} + \frac{\partial v}{v\sqrt{(2nv - vv - 1)}},$$

in qua posteriore parte si ponamus $v = \frac{1}{u}$, habebimus hanc aequationem integrandam:

$$2\partial \phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}} - \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu - uu - 1)}},$$

sicque sufficiet altervtram tantum partem integrasse.

§. 11. Pro priore parte introducamus quempiam angulum θ, ponendo $v = \alpha + \beta \operatorname{cos.} \theta$, et quantitas $2nv - vv - 1$ induet hanc formam:

$$\begin{aligned} &2n\alpha + 2n\beta \operatorname{cos.} \theta - \beta^2 \operatorname{cos.} \theta \\ &- \alpha\alpha - 2\alpha\beta \operatorname{cos.} \theta \\ &- 1 \end{aligned}$$

vbi primo termini $\operatorname{cos.} \theta$ inuoluentes tollantur, quod fit sumendo $\alpha = n$, tum vero statuatur $2\alpha n - \alpha\alpha - 1 = \beta\beta$, vt ista forma transeat in $\beta\beta \operatorname{sin.} \theta^2$. Quia vero est $\alpha = n$, altera littera β ex hac aequatione definietur:

$$2nn - nn - 1 = nn - 1 = \beta\beta,$$

ideoque est $\beta = \sqrt{(nn - 1)}$, atque hinc prior formula $\frac{\partial v}{\sqrt{(2nv - vv - 1)}}$ transmutatur in hanc: $-\partial \theta$, cuius ergo integrale est $-\theta$. Cum igitur posuerimus $v = n + \operatorname{cos.} \theta . \sqrt{(nn - 1)}$, erit $\operatorname{cos.} \theta = \frac{v - n}{\sqrt{(nn - 1)}}$,

ideo-

ideoque $\theta = \text{A cof.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}}$. Simili modo erit integrale posterioris partis

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{(2nu-uu-1)}} = -\text{A cof.} \frac{u-n}{\sqrt{(nn-1)}} = -\text{A cof.} \frac{1-nv}{\sqrt{(nn-1)}},$$

vnde conficitur integrale quaefitum:

$$2\Phi = -\text{A cof.} \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} + \text{A cof.} \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}} + \text{C}.$$

§. 12. Hinc igitur fi priorem arcum, vti fecimus, per θ defignemus, pofteriorem vero per η, ita vt fit $2\Phi = \eta - \theta$, quoniam habemus:

$$\text{cof.}\,\theta = \frac{v-n}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et cof.}\,\eta = \frac{1-nv}{v\sqrt{(nn-1)}}, \text{ erit}$$

$$\text{fin.}\,\theta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{\sqrt{(nn-1)}} \text{ et fin.}\,\eta = \frac{\sqrt{(2nv-vv-1)}}{v\sqrt{(nu-1)}}.$$

Hinc iam cum fit

$$\text{fin.}\,2\Phi = \text{fin.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta - \text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta \text{ et}$$

$$\text{cof.}\,2\Phi = \text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta + \text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta,$$

erit factis fubftitutionibus:

$$\text{fin.}\,2\Phi = \frac{(v-1)\sqrt{(2nv-vv-1)}}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$\text{cof.}\,2\Phi = \frac{(1+n)v-vv-1}{(n-1)v},$$

atque hinc porro habebimus:

$$1 + \text{cof.}\,2\Phi = 2\,\text{cof.}\,\Phi^2 = \frac{2nv-vv-1}{(n-1)v} \text{ et}$$

$$1 - \text{cof.}\,2\Phi = 2\,\text{fin.}\,\Phi^2 = \frac{(v-1)^2}{(n-1)v}.$$

§. 13. Cum nunc fit angulus $CAM = \Phi$ et $AM = z$, Tab. I.
ob $zz = bbv$, erit $v = \frac{zz}{bb}$; tum vero ducta applicata MX, Fig. 4.
fi vocentur coordinatae $AX = x$ et $XM = y$, erit primo $zz = xx + yy$, tum vero fin. $\Phi = \frac{y}{z}$; vnde fi ifti valores loco Φ et v fubftituantur, nancifcemur aequationem inter x et y pro curua quaefita: $\frac{2yy}{zz} = \frac{(zz-bb)^2}{bb(n-1)zz}$, fiue reductione facta

$$b y \sqrt{(2n-2)} = zz - bb = xx + yy - bb,$$

quae manifesto est pro circulo. Sumsimus autem

$$4cc = (2n+2)bb,$$

sicque erit $n = \frac{2cc-bb}{bb}$, ideoque $n - 1 = \frac{2(cc-bb)}{bb}$. Porro autem posueramus $cc - aa = bb$, ita vt sit $cc = aa + bb$ et $n - 1 = \frac{2aa}{bb}$, consequenter $\sqrt{2(n-1)} = \frac{2a}{b}$, vnde aequatio nostra finalis pro curua quaesita erit:

$$2ay = xx + yy - bb,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$xx + (y-a)^2 = bb + aa.$$

§. 14. Ad hanc aequationem construendam ex A ad axem CA erigatur perpendiculum $AI = a$, ductaque axi parallela IO erit $OM = y - a$ et $IO = x$, vnde ducta recta IM erit

Tab. I. Fig. 6.

$$IM^2 = xx + (y-a)^2 = aa + bb,$$

ideoque constans, et quidem pro lubitu accipienda, quia bb est constans arbitraria. Vnde patet, curuam quaesitam esse circulum, radio quocunque circa centrum I descriptum, existente interuallo $AI = a$, quae sola conditio hic est spectanda, vt sit $AI = a$, propterea quod positio axis AC arbitrio nostro relinquitur, id quod etiam calculus ostenderet, si in vltima aequatione integrali $2\Phi = \eta - \theta$ constantem adiecissemus, quippe qua ratione vbique angulus MAC quantitate data fuisset auctus vel minutus, atque hinc discimus, praeter binas solutiones, quas nobis synthesis exhibuit, nullas alias dari curuas quaesito satisfacientes.

Alia

Alia Solutio concinnior eiusdem problematis.

§. 15. Si quis immediate ex binis coordinatis x et y solutionem huius problematis tentare vellet, is in formulas prorsus inextricabiles incideret, in quibus non solum quadrata differentialium secundorum occurrerent, sed etiam haec differentialia cum ipsis coordinatis ac differentialibus primis ita forent permixta, vt nullo modo solutio sperari posset. Sequenti autem modo solutio multo elegantior quam praecedens obtineri poterit, si statim ab initio amplitudo curuae rite in computum ducatur.

§. 16. Ducto igitur, per datum punctum A, axe fixo AB, radium osculi MR secante in N; vocetur angulus $ANM = \Phi$, qui amplitudinem arcus AM metietur, siquidem axis AB ad curuam in A fuerit normalis, quae tamen conditio ad solutionem non est necessaria. Vocetur porro interuallum $AN = u$, ac demisso ex A in radium osculi MR perpendiculo AP, erit $AP = u \sin. \Phi$ et $NP = u \cos. \Phi$. Ponatur autem breuitatis gratia $AP = v = u \sin. \Phi$. Eaedem denominationes porro transferantur in radium osculi proximum mr; et quia angulus $Anm = \Phi + \partial \Phi$, erit angulus $MRm = \partial \Phi$, pariter ac angulus PAp; vnde si recta Ap secet radium osculi MR in q, ob $Ap = v + \partial v$, erit $pq = \partial v$ et $Pq = v \partial \Phi$. Hinc igitur primo erit $Rq = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = Rp$. Quodsi insuper vocetur $MP = p$, vt sit $mp = p + \partial p = Mq$, erit manifesto $\partial p = v \partial \Phi$, ideoque $p = \int v \partial \Phi = MP$. Tab. I. Fig. 7.

§. 17. Cum nunc nostrum problema postulet vt interuallum AR habeat magnitudinem constantem $= a$, triangulum rectangulum APR statim nobis dat hanc aequationem:

$$aa = vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2},$$

vnde colligimus istam:

$$\partial \Phi \sqrt{(a a - v v)} = \partial v,$$

quae cum forma generali $M \partial V = 0$ comparata dat

$$M = \sqrt{(a a - v v)} \text{ et } \partial V = \partial \Phi - \frac{\partial v}{\sqrt{(a a - v v)}},$$

vnde manifesto duplex solutio deducitur: Prior scilicet $M = 0$ dat $v = a$, posterior vero $V = C$ praebet $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$; neque iam difficile erit hinc ambas solutiones initio commemoratas deducere.

§. 18. Pro priore solutione, qua inuenimus $v = a$, erit interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = 0$, ita vt iam ipsa recta MP futura sit radius osculi, cuius ergo quantitas erit

$$MP = \int v \partial \Phi = a \Phi.$$

Vnde patet, quia punctum P perpetuo eandem distantiam a puncto A seruat, scilicet $AP = a$, euolutam curuae quaesitae esse circulum, centro A, radio $AP = a$ descriptum, atque ipsam rectam $MP = a \Phi$ aequari arcui huius circuli iam euoluto.

§. 19. Pro altera solutione, quae dedit $\Phi - A \sin. \frac{v}{a} = C$, erit $\frac{v}{a} = \sin. (\Phi - C)$; vbi euidens est constantem C tuto negligi posse, propterea quod positio axis assumti AB ab arbitrio nostro pendet, ita vt habeamus $v = a \sin. \Phi$; vnde colligitur primo interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \Phi} = a \cos. \Phi$, deinde interuallum $MP = - a \cos. \Phi + b$. Hinc ipse radius osculi concluditur $MR = b$, ideoque constans; vnde manifestum est curuam quaesitam hoc casu fore circulum, radio arbitrario $= b$ descriptum, pro cuius positione cum sit $AP = v = u \sin. \Phi = a \sin. \Phi$, hinc fit $u = AN = a$, ita vt punctum N sit fixum adeoque centrum circuli inuenti. Quia enim interuallum

lum $NP = a \cos.\phi$ et $MP = -a\cos.\phi + b$, erit ipsa recta $NM = b$, ideoque punctum R in N incidet.

§. 20. Sin autem constantem illam C praetermittere nolimus, ponamusque $C = \alpha$, habebimus $v = a\sin.(\phi - \alpha)$, hincque interuallum $PR = \frac{\partial v}{\partial \phi} = a\cos.(\phi - \alpha)$ et interuallum $MP = -a\cos.(\phi - \alpha) + b$, vnde ipse radius osculi prodit $MR = b$, vt ante. Quoniam porro erat $v = u\sin.\phi$, hinc colligitur $AN = u = \frac{a\sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}$, hincque porro

$$NP = u\cos.\phi = \frac{a\sin.(\phi - \alpha).\cos.\phi}{\sin.\phi},$$

cui si addatur $MP = -a\cos.(\phi - \alpha) + b$, erit interuallum

$$NM = -\frac{a\sin.\alpha}{\sin.\phi} + b.$$

Quoniam igitur inuenimus $MR = b$, erit $NR = \frac{a\sin.\alpha}{\sin.\phi}$.

§. 21. Quo haec clariora euadant, ex R in axem AB ducatur normalis RS, et ob angulum $RNS = \phi$, erit

$$RS = a\sin.\alpha \text{ et } NS = \frac{a\sin.\alpha\cos.\phi}{\sin.\phi};$$

ante vero inuenimus

$$AN = u = \frac{a\sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi},$$

quibus coniunctis prodit interuallum

$$AS = \frac{a\sin.\alpha\cos.\phi + a\sin.(\phi - \alpha)}{\sin.\phi}.$$

Quia vero

$$\sin.(\phi - \alpha) = \sin.\phi\cos.\alpha - \cos.\phi\sin.\alpha,$$

erit hoc interuallum $AS = a\cos.\alpha$; vnde patet punctum R esse fixum, eiusque distantiam $AR = a$, simulque angulum $SAR = \alpha$, quae solutio perfecte conuenit cum praecedente.

 Appli-

Applicatio principii
quo Illuſtris de la Grange geminas huiusmodi Problematum ſolutiones inter ſe conciliare eſt adortus.

§. 22. Quando ſolutio cuiuspiam problematis deducit ad huiusmodi aequationem differentialem: $M \partial V = o$, ita vt factor finitus M non pro lubitu, ſed ex ipſa indole problematis acceſſerit; tum manifeſtum eſt tale problema admittere duas ſolutiones, alteram aequatione finita $M = o$, alteram vero aequatione differentiali $\partial V = o$ contentam. His igitur caſibus nulla plane ratio adeſt, cur prior harum ſolutionum in poſteriore inuoluta eſſe debeat, aeque parum ac ſi problema algebraicum ad aequationem pluribus factoribus conſtantem perducit, vbi ſinguli factores ſeorſim ſolutiones praebere ſolent nullo modo a ſe inuicem dependentes. Neque ergo his caſibus principium Ill. de la Grange in vſum vocari poterit.

§. 23. Plerumque autem vſu venire ſolet, vt factor ille finitus M non aperte in aequationem finalem ingrediatur, ſed demum, dum aequatio integrabilis redditur, in ſubſidium vocari ſolet, quo caſu vtique iſte factor arcto vinculo cum ipſa aequatione differentiali cohaeret. Veluti ſi peruentum fuerit ad huiusmodi aequationem differentialem: $p \partial x + q \partial y = o$, quae ſponte integrationem non admmittat, ſed demum per formulam M diuiſa integrabilis euadat, tum iſtam aequationem hoc modo repraeſentari conueniet: $M . \frac{p \partial x + q \partial y}{M} = o$, ita vt hic ſit $\partial V = \frac{p \partial x + q \partial y}{M}$, tum vtique duae habebuntur ſolutiones: altera finita $M = o$, altera differentialis $\frac{p \partial x + q \partial y}{M} = o$, ex qua integrando elicitur: $\int \frac{p \partial x + q \partial y}{M} =$ Conſt. Hoc ergo caſu prior ille factor M ab indole functionum p et q pendet, atque principium memoratum eum in finem excogitatum videtur,

detur, quemadmodum ex aequatione integrali:

$$\int \frac{p\,\partial x + q\,\partial y}{M} = C,$$

altera ſolutio finita $M = 0$ elici queat.

§. 24. Ad hoc praeſtandum vir Ill. iubet aequationem integratam, poſtquam certo modo in ordinem fuerit redacta, denuo differentiare, ita vt etiam conſtans per integrationem ingreſſa tanquam variabilis tractetur, quo pacto ad talem aequationem $P\,\partial x + Q\,\partial y + Q\,\partial C = 0$, peruenietur; tum vero coëfficientem ipſius ∂C nihilo aequalem ſtatuit et ex aequatione $R = 0$ valorem ipſius conſtantis C per ambas variabiles x et y definit, atque affirmat, ſi iſte valor loco C in ipſa aequatione integrali ſubſtituatur, tum prodituram eſſe aequationem illam finitam $M = 0$, ſicque hanc aequationem finitam certo modo in aequatione integrali contineri eſſe cenſendam; quanquam equidem hanc concluſionem minus perſpicio, propterea quod ſi in aequatione integrata conſtans vt variabilis tractetur, haec aequatio non amplius pro integrali haberi poteſt.

§. 25. Applicemus autem hoc principium ad ſolutionem §. 5. inuentam: $\partial p \sqrt{(aa - tt)} - t\,\partial t = 0$, quae ad hanc formam:

$$\partial p - \frac{t\,\partial t}{\sqrt{(aa - tt)}} = 0,$$

reducta et integrata praebet $p + \sqrt{(aa - tt)} = c$, vnde irrationalitatem tollendo prodit: $aa - tt = cc - 2cp + pp$, quae differentiata, ſpectando etiam c vt variabile, praebet:

$$-2t\,\partial t = 2c\,\partial c - 2c\,\partial p - 2p\,\partial c + 2p\,\partial p,$$

vbi coëfficiens ipſius ∂c eſt $2(c - p)$, qui nihilo aequatus dat $c = p$. Hic iam valor in aequatione integrata loco c, ſubſtitutus dat $p + \sqrt{(aa - tt)} = p$, ſiue $\sqrt{(aa - tt)} = 0$, quae

 vtique

vtique eſt prior noſtra ſolutio ex factore finito concluſa, ſcilicet $t = a$. Quia autem naturae rei repugnat, conſtanti per integrationem ingreſſae c valorem variabilem p tribui, neutiquam video, quomodo dici queat, ſolutionem illam finitam $t = a$ in aequatione integrali contineri.

§. 26. Deinde etiam nullam rationem perſpicio, cur aequatio integralis, antequam conſtanti c variabilitas tribuitur, ab irrationalitate liberari debeat. Si enim hoc principium immediate applicare vellemus, ipſamque aequationem integralem primo inuentam differentiare, coëfficiens ipſius ∂c foret vnitas, vnde nihil plane ſequeretur. Praetermiſſa autem reductione ad rationalitatem hac ratione quicquid lubuerit concludi poſſet. Si enim aequatio integrata hac forma repraeſentetur:

$$p + q + \sqrt{(a a - t t)} = c + q,$$

ſumtisque vtrinque quadratis differentiatio inſtituatur, coëfficiens ipſius ∂c erit $2(c + q)$, vnde deducitur $c = -q$, qui valor in ipſa aequatione integrali ſubſtitutus daret

$$p + \sqrt{(a a - t t)} = -q,$$

vbi q denotare poſſet functionem quamcunque variabilium p et t. Nemini autem in mentem venire poterit talem ſolutionem problematis admittere.

§. 27. Nullum autem eſt dubium, quia vir Ill. mentem ſuam non ſatis clare expoſuerit, aut quasdam rationes ad intelligendum neceſſarias reticuerit, quas equidem ſupplere non valeo, vnde vberior explicatio ſuper hoc nouo principio, in quo Ill. Auctor adeo inſigne ſupplementum vniuerſi Calculi integralis conſtituit, maxime foret optanda.

PRO-