1793

Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi

Leonhard Euler

METHODVS FACILIS OMNIVM VIRIVM MOMENTA RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE DETERMINANDI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 14 *Aug.* 1780.

Solutio Problematis geometrici, quo inter binas rectas non in eodem plano sitas quaerebatur earum distantia minima, deduxit me, per calculos non parum abstrusos, ad insigne Theorema mechanicum, quod ita commodissime enunciari potest: *Propositis viribus quibuscunque, si inuenta fuerint earum momenta respectu trium axium* af, ag, ah, *inter se normalium, quae sint* $\mathfrak{P}$ *respectu axis* af, $\mathfrak{Q}$ *respectu axis* ag *et* $\mathfrak{R}$ *respectu axis* ah; *tum ab iisdem viribus, respectu axis cuiusuis obliqui* az, *per punctum* a *transeuntis, orietur momentum hoc:* Tab. III. Fig. 1.

$$\mathfrak{P} \operatorname{cos.} faz + \mathfrak{Q} \operatorname{cos.} gaz + \mathfrak{R} \operatorname{cos.} haz,$$

si quidem tria illa momenta, secundum eundem sensum agant, siue in sensum fgh *siue in contrarium* fhg. Quae egregia veritas cum ex consideratione geometrica per calculos satis prolixos deriuata sit, nullum est dubium, quin etiam via directa ex principiis staticis deduci queat. Postquam igitur hoc argumentum sol-

sollicite essem perscrutatus, incidi in viam satis planam, quae me ad hanc veritatem perduxit, et quae simul mihi facilem methodum aperuit omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi.

Theorema.

Tab. III. Fig. 2. §. 1. *Quaecunque vis fuerit proposita, ea semper in tres alias resolui potest, quarum directiones cadant in plana $f\,a\,g$, $g\,a\,h$, $h\,a\,f$, quae scilicet plana per ternos axes $a\,f$, $a\,g$, $a\,h$, inter se normales determinantur.*

Demonstratio.

§. 2. In quacunque directione vis proposita agat, ea producatur, donec planum $f\,a\,g$ alicubi in O traiiciat, in quo ergo puncto vis O Z applicata concipi potest. Haec igitur vis O Z resolui poterit in duas, quarum vna cadat in ipsum planum $f\,a\,g$, altera vero, quae sit O p, ad hoc planum sit perpendicularis. Hoc modo iam nacti sumus vnam vim, cuius directio in planum $f a g$ cadit; quare ostendendum est, quomodo altera vis O p, quae sit p, in duas nouas resolui possit, quarum directiones cadant in plana $f\,a\,h$ et $g\,a\,h$.

§. 3. Ad hoc praestandum concipiatur in ipso puncto a secundum directionem $a\,h$ applicata vis illi p aequalis et parallela, quae quia transit per ipsum punctum a nullum gignit momentum respectu vllius axis per punctum a ducti, ideoque in computo momentorum perinde est, siue haec noua vis adsit, siue absit. Concipiamus igitur hanc nouam vim adesse, et ducta recta O a, eaque bisecta in D, si in hoc puncto D vis ad planum B a C perpendicularis et aequalis $2\,p$ applicata intelligatur, ea aequiualebit viribus illis p, ideoque aequiualebit ipsi vi vi O $p = p$, quandoquidem iſta vis pro puncto a idem producit momentum quod ipſa vis O p.

§. 4. Nunc ex puncto O in axes af et ag ducantur perpendicula OB et OC, et ducta inſuper recta BC punctum D in eius medium cadet, vnde loco vis $2p$, puncto D applicatae, ſubſtitui poterunt vires C $q = p$ et B $r = p$, quarum directiones axi ab erunt parallelae, ſicque iſtae duae vires C q et B r ipſi vi O p aequiualentes ſunt cenſendae. Quoniam igitur vis illius C q directio cadit in planum gab, huius vero B r in planum fab, hoc modo vim propoſitam reſoluimus in tres alias, quarum directiones incidunt in plana fag, fab, gab, quae ergo vires eundem praeſtabunt effectum atque ipſa vis propoſita.

Corollarium.

§. 5. Harum virium prima, cuius directio in ipſum planum fag cadit, nullum momentum generat, tam pro axe af quam ag, ſed tota quaſi inſumitur in momento circa axem ab producendo. Simili modo ſecunda vis, cuius directio cadit in planum fab, neque pro axe af, neque pro axe ab nullum momentum generabit, ſed tota impendetur ad momentum circa axem ag producendum. Eodemque modo vis cuius directio in planum gab cadit, circa ſolum axem af momentum generabit.

Problema.

§. 6. *Si ſola adſit vis, cuius directio in planum fag cadet, eiusque momentum reſpectu axis ab fuerit cognitum $= \mathfrak{M}$, eiusdem vis momentum reſpectu axis cuiuscunque obliqui az, pariter per punctum a tranſeuntis, inueſtigare.*

Solu-

Solutio.

Tab. III. Fig. 3. §. 7. Pro situ huius axis az definiendo ponamus cos. $faz = f$, cos. $gaz = g$, cos. $haz = h$, atque euidens est fore $ff + gg + hh = 1$. Iam quaecunque sit vis proposita, cuius directio in planum fag incidit, eam semper resoluere licet in duas, quarum altera in ipsum axem af incidat, altera vero ad eum sit normalis, quarum illa in hoc negotio penitus negligi potest, hanc vero per rectam xy referre licet, quae si ponatur $= v$, eius momentum respectu axis ah erit $= vax$, quod cum detur $= \mathfrak{M}$, erit $v \cdot ax = \mathfrak{M}$; et quia hanc vim secundum directionem xy vrgere assumimus, momentum $\mathfrak{M}$ aget in sensum fg, siue, secundum ordinem litterarum, in sensum fgh.

§. 8. Iam vt in huius vis $xy = v$ momentum respectu axis az inquiramus, punctum y ibi sumatur, vbi perpendiculum yz ipsi directioni propositae az in z occurrat. Tum vero ducatur etiam recta ay, atque vis illa $xy = v$ resoluatur secundum directiones ya et yt ad eam normali, quarum illa per punctum a transiens nihil confert ad momentum quod quaerimus. Quod si ergo ponamus angulum $fay = \zeta$, erit vis in directione ty vrgens $= v$ cos. ζ, quae sola in axem az agere est concipienda. Vt iam huius vis momentum respectu axis az indagemus, ex y ad az normaliter ducamus rectam ys, cuius quantitatem definire debemus. Vbi notetur angulum yaz esse complementum anguli haz, cuius cosinum posuimus $= h$, sicque erit sin. $yaz = h$, ideoque perpendiculum $ys = ay \cdot h$. Quare cum sit $ay = \frac{ax}{cos. \zeta}$, erit $ys = \frac{ax \cdot h}{cos. \zeta}$.

§. 9. Quia igitur directio vis sollicitantis $ty = v$ cos. ζ normalis est ad planum yaz, in eoque recta ys normalis ad az, huius vis momentum respectu axis az erit $= v$ cos. $\zeta \cdot ys$

=

$= v . a . x . b$. Quare cum productum $v . a x$ aequetur momento proposito $\mathfrak{R}$, istud momentum respectu axis $a z$ erit $\mathfrak{R} b$, quod manifesto etiam in sensum $f g b$ vergit.

Corollarium.

§. 10. Simili modo cum par sit ratio virium quarum directiones cadunt in plana $f a b$ et $g a b$, non opus est totum ratiocinium, quo hic vsi sumus, ad eas applicare, sed per solam translationem, secundum ordinem litterarum f, g, b, procedentem, earum momenta respectu axis $a z$ expedite assignari poterunt.

Corollarium 2.

§. 11. Quoniam igitur hic a vi cuius directio in planum $f a g$ cadit incepimus, vno gradu progrediendo perueniemus ad planum $g a b$, et vis in hoc plano agens momentum generabit respectu axis $a f$, quod ergo si ponamus $= \mathfrak{P}$, ex eo resultabit pro axe $a z$ momentum $= \mathfrak{P} f$. Ac si porro vno gradu progrediamur, incidemus in planum $b a f$, et vis in hoc planum agens si respectu axis $a g$ producat momentum $= \mathfrak{Q}$, ex eo obtinebitur pro axe $a z$ momentum $\mathfrak{Q} g$, hincque iam sponte fluit demonstratio Theorematis supra initio memorati.

Theorema.

§. 12. *Propositis viribus quibuscunque, si inuenta fuerint earum momenta, respectu trium axium $a f$, $a g$, $a b$, inter se normalium, quae sint $\mathfrak{P}$ respectu axis $a f$, $\mathfrak{Q}$ respectu axis $a g$ et $\mathfrak{R}$ respectu axis $a b$; tum ab iisdem viribus respectu axis cuiusuis obliqui $a z$, per punctum a transeuntis, orietur momentum*

$$\mathfrak{P} \operatorname{cos.} f a z + \mathfrak{Q} \operatorname{cos.} g a z + \mathfrak{R} \operatorname{cos.} b a z,$$

siue etiam $\mathfrak{P} f + \mathfrak{Q} g + \mathfrak{R} b$.

Demonſtratio.

§. 13. Cum omnes vires in ternas alias reſoluere liceat, quarum directiones incidant in plana fag, gah, haf, ex earumque prima naſcatur momentum circa ſolum axem ah, quod ſit $= \mathfrak{R}$; ex ſecunda vero momentum circa ſolum axem af, quod ſit $\mathfrak{P}$; ex tertia vero circa ſolum axem ag, quod ſit $\mathfrak{Q}$; in his tribus momentis totus effectus virium ſollicitantium conſtare eſt cenſendus. Quod ſi iam pro axe propoſito az ſtatuamus

$$\text{coſ.}\, faz = f, \text{ coſ.}\, gaz = g, \text{ coſ.}\, haz = h;$$

modo vidimus ex momento $\mathfrak{R}$ oriri pro axe az momentum $\mathfrak{R}h$, tum vero ex momento $\mathfrak{P}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{P}f$ et ex momento $\mathfrak{Q}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{Q}g$. Ex omnibus ergo tribus momentis $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ iunctim ſumtis, hoc eſt ab actione tota virium ſollicitantium, orietur pro axe az hoc momentum: $\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$, prorſus vti per ſatis longas ambages ex Problemate geometrico eſt erutum.

Corollarium.

§. 14. Totum ergo negotium huc redit, vt virium, quibus corpus circa axem az mobile ſollicitatur, momenta reſpectu trium axium af, ag, ah, inueſtigentur, quae ſi fuerint $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, atque in eandem plagam, ſiue fgh, ſiue fhg vergant, his inuentis momentum reſpectu axis propoſiti az facillime per formulam inuentam definitur, quae operatio quemadmodum commodiſſime inſtitui queat in ſequente Problemate docebimus.

Prob-

Problema principale.

§. 15. *Si corpus circa axem $a z$ mobile a vi quacunque v, in directione $A Z$ agente, sollicitetur, eius momentum respectu axis $a z$ assignare.* Tab. III. Fig. 4.

Solutio.

§. 16. Ante omnia vtraque directio $a z$ et $A Z$ cum tribus directionibus fixis et inter se normalibus conferatur, quae pro axe proposito $a z$ sint $a f$, $a g$, $a h$, ad quas axis $a z$ ita inclinetur, vt sit

$$\text{cos. } f a z = f, \text{ cos. } g a z = g, \text{ cos. } h a z = h.$$

Simili modo directio A Z referatur ad ternas directiones fixas A F, A G, A H, quarum respectu directio ita determinetur, vt sit

$$\text{cos. } F A Z = F, \text{ cos. } G A Z = G, H A Z = H.$$

Tum vero pro situ puncti h respectu A ex puncto a in planum F A G demittatur perpendiculum a C, atque ex puncto C ad A F perpendiculum C B, vocenturque interualla A B $= a$, B C $= b$, C $a = c$, quae, vti in figura sunt repraesentata, in easdem plagas cum ternis directionibus fixis cadant, ita vt, si quodpiam in plagam contrariam vergat, id negatiue capi debeat.

§. 17. His praeparatis vis A Z $=$ V resoluatur in ternas vires secundum directiones fixas, vocenturque hae vires: secundum A F $=$ V F $=$ P; secundum A G $=$ V G $=$ Q; secundum A H $=$ V H $=$ R; et iam quaeramus harum singularum virium momenta respectu axium $a f$, $a g$, $a h$. Ac primo quidem vis P, in directione A F agens, quae ipsi $a f$ est parallela, eius respectu nullum momentum producit; at vero respectu axis $a h$, qui vsque ad C productus intelligatur, mo-

 men-

mentum producit $= P . b$, quod momentum manifesto in plagam F G siue $f g$ tendit, ideoque in sensum $f g h$.

§. 18. Vt autem pateat, in quemnam sensum momenta reliqua tendant, producantur directiones $f a$ et $g a$ in γ et β, vbi perpendiculis ex B et D erectis occurrant, ita vt sit $a D = b$ et $B \beta = D \gamma = c$. Et nunc clarum erit, vim P in directione B F agentem respectu axis $g a \beta$ momentum producere $= P . B \beta = P c$, atque in sensum F H siue $f h$ dirigi, quae directio cum sit contraria, eius momentum statui debet $= - P c$, ita vt vis ista P duo momenta producat, alterum pro axe $a h = P b$, alterum pro axe $a g = - P c$.

§. 19. Secunda vis Q in directione A G agens, quia axi $a g$ est parallela, eius respectu nullum momentum producet; at vero respectu axis $a h$ vel $C h$ momentum producet $Q a$, quod tendit in sensum G F vel $g f$, contrarium directioni F G H, ideoque statui debebit $= - Q a$. Tum vero eadem vis Q, respectu axis $f a$, siue $f \gamma$, momentum producet $Q c$, atque in ipsum sensum G H, ideoque statuendum $+ Q c$, sicque ex hac vi Q nascuntur duo momenta, alterum pro axe $a f = Q c$, alterum pro axe $a h = - Q a$.

§. 20. Denique vis R', in directione A H agens, respectu axis $a h$ nullum momentum producit; at vero respectu axis $f a$ seu $f \gamma$ producet momentum $R b$, et quidem in sensum contrarium, ideoque negatiue capiendum. At vero respectu axis $a g$, siue βg, momentum positiuum generatur $R a$.

§. 21. Quodsi iam momenta pro axibus $a f$, $a g$, $a h$, indicemus vt supra per litteras $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, si momenta inuenta colli-

colligamus, habebimus

$$\mathfrak{P} = Q\,c - R\,b;\ \mathfrak{Q} = R\,a - P\,c;\ \mathfrak{R} = P\,b - Q\,a.$$

Quare cum ſit $P = V\,F$, $Q = V\,G$, $R = V\,H$, haec momenta erunt

$$\mathfrak{P} = V\,(G\,c - H\,b);$$
$$\mathfrak{Q} = V\,(H\,a - F\,c);$$
$$\mathfrak{R} = V\,(F\,b - G\,a).$$

§. 22. Deſignemus nunc momentum quaeſitum pro axe propoſito $a\,z = \mathfrak{M}$, atque per Theorema ante demonſtratum patet fore

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\,f + \mathfrak{Q}\,g + \mathfrak{R}\,h.$$

Subſtitutis ergo valoribus modo inuentis erit momentum quaeſitum (partibus formulae ſecundum interualla a, b, c, diſpoſitis)

$$\mathfrak{M} = V\,a\,(H\,g - G\,h) + V\,b\,(F\,h - H\,f) + V\,c\,(G\,f - F\,g),$$

quod momentum in ſenſum F G H tendit. Haecque expreſſio egregie conuenit cum forma, quam in praecedente diſſertatione ex principiis geometricis deriuauimus.

Scholion.

§. 23. Demonſtratio primi Theorematis elegantius adornari poteſt, ita vt non opus ſit nouam vim extraneam, in ipſo puncto a applicandam, in ſubſidium vocare. Scilicet poſtquam directio vis ſollicitantis fuerit per planum $f\,a\,g$ continuata, quod in puncto o ſecet, vbi applicata intelligatur, atque in duas vires fuerit reſoluta, quarum altera in ipſum planum $f\,a\,g$ incidat, altera vero $o\,p$ ei ſit normalis; per punctum o pro lubitu agatur recta $m\,n$ axibus $a\,f$ et $a\,g$ occurrens in punctis Tab. III. Fig. 5.

m et n, vnde binas vires mq et nr, ipſi op parallelas conſtituere licet, quae ipſi aequiualeant, quod fit ſi iſtae vires ita capiantur:

$$mq = \frac{on.op}{mn} \text{ et } nr = \frac{om.op}{mn}.$$

Hoc enim modo harum virium ſumma erit $mq + nr = op$, earumque momenta reſpectu o inter ſe fient aequalia $= om.on.op$, vti natura rei poſtulat. Sicque loco vis op nunc nacti ſumus duas vires mq et nr, quarum illa ſita eſt in plano fah, haec vero in plano gah; vnde clarius patet, omnes vires ſemper reſolui poſſe in tres alias, quarum directiones in ipſa plana fag, gah, haf cadant.

ANALY-