1790

De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata

Leonhard Euler

DE METHODO TANGENTIVM INVERSA AD THEORIAM SOLIDORVM TRANSLATA.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 2 *Sept.* 1776.

§. 1.

Quemadmodum methodus tangentium inuersa versatur in inuestigatione eiusmodi linearum curuarum, quae certis proprietatibus, ratione tangentium, siue normalium, siue aliarum linearum, per rationem differentialium determinatarum, sint praeditae: ita hoc loco similem methodum ad theoriam solidorum sum accommodaturus, ita vt eiusmodi superficies inuestigari debeant, quibus certae ac praescriptae proprietates, ratione tangentium, vel normalium aliarumque quantitatum, per differentialium rationem definitarum, conueniant.

§. 2. Quemadmodum porro methodus tangentium inuersa communis ita ad Analysin puram reuocari potest, vt relatio inter binas quantitates variabiles x et y inuestigetur, ex data quacunque relatione inter earum differentialia, siue primi, siue altioris cuiuspiam ordinis; vel etiam quaeratur, qualis functio

ctio ipsius x esse debeat quantitas y, vt certa quaedam relatio inter differentialia praescripta locum sit habitura: ita simili modo eiusmodi quaestiones proponi possunt, in quibus quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et y esse debeat quantitas z, vt certa quaedam proprietas proposita, per differentialia expressa, obtineatur.

§. 3. Cum igitur huiusmodi quaestiones circa functiones duarum variabilium versentur, totum hoc argumentum ad eam Analyseos partem est referendum, in qua functiones duarum pluriumue variabilium tractari solent, cuius ratio, quemadmodum iam saepius obseruaui, toto coelo est diuersa ab Analysi communi, in qua tantum functiones vnius variabilis tractantur, atque adeo prorsus peculiare calculi genus postulat, cuius etiamnunc prima principia vix a Geometris sunt explorata; vnde plurimum ad incrementum scientiae Analyticae conferet eiusmodi quaestiones euoluere, quarum solutio istam novam Analyseos partem requirat. Hunc igitur in finem sequentem quaestionem accuratius pertractare constitui.

Problema.

Super dato plano eiusmodi solidum exstruere, ad cuius superficiem si in singulis punctis normales ducantur, eae omnes inter se futurae sint aequales.

Tab. II. Fig. 1. §. 4. Perspicuum est hanc quaestionem analogam esse illi, qua in plano super axe dato eiusmodi curua requiritur, cuius omnes normales inter se sint aequales, siue vt posita abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, normalis YN, quae est $\frac{y\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial x}$, habeat quantitatem constantem $= a$. Hinc ergo, posito $\partial y = p\,\partial x$, requiritur vt sit $y\sqrt{(1 + pp)} = a$, vnde sequitur fore $p = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$, vnde porro habebitur

tur $\partial x = \frac{y \partial y}{\sqrt{(aa - yy)}}$, cuius integrale praebet $x = C - \sqrt{(aa - yy)}$, quae eſt aequatio ad circulum, cuius radius $= a$, ita vt omnes normales in idem punctum N, quod eſt centrum, conuergere debeant; quae ſolutio, quamquam per integrationem eſt inuenta, tamen non omnino eſt generalis, quandoquidem ipſi aequationi differentiali $\partial x \sqrt{(aa - yy)} = y \partial y$, etiam ſatisfacit valor $y = a$, quae aequatio eſt ad lineam rectam axi ad diſtantiam $= a$ parallelam.

§. 5. Quodſi iam ſimili modo ſuper dato plano omnia ſolida exſtruenda quaeri debeant, in quibus omnes rectae a plano ad ſuperficiem normaliter ductae inter ſe ſint aequales; primo quidem patet huic quaeſtioni ſatisfacere ſuperficiem planam dato plano parallelam. Deinde etiam manifeſto ſatisfacit hemiſphaerium ſuper plano exſtructum, quippe cuius omnes radii ad ſuperficiem ſunt normales. Tertio vero etiam euidens eſt ſatisfacere cylindrum, cuius axis in ipſum planum incidat; ex quo facile intelligere licet, praeterea quoque infinita alia corporum genera huic quaeſtioni eſſe ſatisfactura, quae omnia ergo ſolutio, ſiquidem fuerit generalis, indicare debet.

§. 6. Quaeſtio igitur haec manifeſto in nouum illud Analyſeos genus incurrit, quod in euoluendis functionibus duarum variabilium verſatur, ideoque vires Analyſeos communis ſuperare eſt cenſenda; verum tamen haec eadem quaeſtio ideo potiſſimum maximam attentionem meretur, quod adeo per prima Geometriae elementa reſolui poteſt, vnde ſolutio Analytica, quae ob nouitatem pluribus Geometris adhuc ſuſpecta videri poſſet, maximum firmamentum adipiſcetur. Vtramque igitur ſolutionem ſeorſim omni ſtudio expediamus.

Solu-

Solutio Analytica problematis propositi.

§. 7. Cum igitur haec quaestio circa superficiem super dato plano exstruendam versetur, referat tabula hoc ipsum planum, in quo pro lubitu statuantur bini axes fixi O A et
Tab. II. Fig. 2. O B inter se normales, secundum quos in ipso plano constituantur binae coordinatae $OX = x$ $OY = y$, tertia autem, ex puncto Y ad ipsam superficiem perpendiculariter erecta, vocetur $YZ = z$, quibus positis eiusmodi aequatio inter has ternas coordinatas x, y et z indagari debet, vt omnes rectae Z N, quae ad superficiem normaliter in singulis punctis Z sunt ductae, fiant inter se aequales, hoc est, quaeritur, qualis functio quantitas z binarum variabilium x et y esse debeat, vt ista conditio adimpleatur.

§. 8. Quoniam igitur coordinatam z tanquam functionem duarum reliquarum x et y spectamus, si eam differentiemus, sumendo tam x quam y variabilem, huiusmodi formula exorietur: $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, et nunc ratio binarum quantitatum p et q inuestigari debet, vt conditioni praescriptae satisfiat. In genere quidem constat, has duas quantitates p et q tales functiones ipsarum x et y esse debere, vt formula differentialis $p\,\partial x + q\,\partial y$ integrationem admittat, id quod eueniet, si fuerit $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$, vbi formula $(\frac{\partial p}{\partial y})$ nascitur ex differentiatione ipsius p, si sola y pro variabili accipiatur; similique modo altera formula $(\frac{\partial q}{\partial x})$ nascitur ex differentiatione ipsius q, si sola x variabilis statuatur.

§. 9. Sit nunc N punctum in nostro plano, in quod recta Z N, quae ad superficiem in puncto Z est normalis, incidit, ita vt per conditionem praescriptam esse oporteat

Z N

$ZN = a$. Ex elementis autem Solidorum passim traditis notum est, quantitatem huius rectae ZN ita exprimi, vt sit $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, ita vt tota solutio ex hac aequatione: $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$ peti debeat. Quanquam autem istam formulam $z\sqrt{(1 + pp + qq)}$ tuto ex elementis depromere liceret; tamen hic facilem viam indicabo, hanc ipsam formulam, sine vllis ambagibus, ex sola notione qua recta ZN ad superficiem normalis statuitur, inueniendi, quae in hoc consistit, vt, etiamsi punctum Z parumper in superficie mutetur, longitudo rectae ZN inde nullam mutationem patiatur.

§. 10. Hoc principio constituto ducatur ex puncto quaesito N ad axem OA normalis NM, ac vocetur $OM = m$ et $MN = n$, ductaque recta YI axi OA parallela, erit interuallum $XM = YI = m - x$ et interuallum $IN = n - y$, vnde fit $YN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2$. Iam quia recta YZ toti plano, ideoque rectae YN, normaliter insistit, ob $YZ = z$, erit

$$ZN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2 + zz,$$

quae quantitas quia inuariata manere debet, etiamsi punctum z infinite parum mutetur, differentiale ipsius formulae, sumendo x, y et z variabilibus, nihilo aequari debet. Sumatur igitur primo sola x variabilis, manente y constante, et quia tum est $\partial z = p\,\partial x$, erit differentiale

$$-2\,\partial x\,(m - x) + 2\,zp\,\partial x = 0,$$

siue $-m + x + pz = 0$. Simili modo si sola y pro variabili sumatur, quia tum est $\partial z = q\,\partial y$, differentiatio dat

$$-2\,\partial y\,(n - y) + 2\,zq\,\partial y = 0,$$

siue $-n + y + qz = 0$.

§. 11. Consideratio igitur, quod recta NZ ad ipsam superficiem est normalis, nobis has duas conditiones suppeditat: 1°. $m = x + pz$ et 2°. $n = y + pz$, sicque erunt interualla $YI = pz$ et $IN = qz$, quibus valoribus locus puncti N definitur, in quod normalis ZN ad Z ducta incidit. Hinc igitur cum sit $YN = z\sqrt{(pp + qq)}$, erit ipsa normalis ZN $= z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, quae est eadem formula, quae vulgo per longas ambages erui solet.

§. 12. Cum igitur resolutio nostri problematis perducta sit ad hanc aequationem: $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$; ex qua primo ratio functionum p et q, hinc vero porro ipsa aequatio inter ternas coordinatas x, y et z erui debet, sumtis quadratis habebimus $pp + qq = \frac{aa - zz}{zz}$, cui aequationi vt satisfiat, statuamus

$$p = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \operatorname{cos}. \Phi \text{ et } q = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \operatorname{sin}. \Phi,$$

quare cum conditio principalis postulet vt sit $\partial z = p\partial x + q\partial y$, erit

$$\partial z = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z}(\partial x \operatorname{cos}. \Phi + \partial y \operatorname{sin}. \Phi), \text{ siue}$$

$$\frac{z\partial z}{\sqrt{(aa - zz)}} = \partial x \operatorname{cos}. \Phi + \partial y \operatorname{sin}. \Phi,$$

cuius aequationis prius membrum cum per se sit integrabile, etiam alterum integrabile sit necesse est. Cum igitur per notam reductionem sit

$$\int \partial x \operatorname{cos}. \Phi = x \operatorname{cos}. \Phi + \int x \partial \Phi \operatorname{sin}. \Phi \text{ et}$$

$$\int \partial y \operatorname{sin}. \Phi = y \operatorname{sin}. \Phi - \int y \partial \Phi \operatorname{cos}. \Phi,$$

integratione, quatenus fieri potest, instituta obtinebimus

$$C - \sqrt{(aa - zz)} = x \operatorname{cos}. \Phi + y \operatorname{sin}. \Phi + \int \partial \Phi (x \operatorname{sin}. \Phi - y \operatorname{cos}. \Phi).$$

Totum igitur negotium huc redit, vt formula differentialis $\partial \Phi (x \operatorname{sin}. \Phi - y \operatorname{cos}. \Phi)$ reddatur integrabilis, quae cum vnicum

cum differentiale $\partial \phi$ contineat, necesse est vt factor x sin. ϕ $- y$ cos. ϕ, sit functio solius quantitatis ϕ.

§. 13. Denotet igitur ϕ functionem quamcunque ipsius ϕ, ac statuatur: x sin. $\phi + y$ cos. $\phi = \Phi$, eritque

$$\int \partial \phi (x \text{ sin. } \phi + y \text{ cos. } \phi) = \int \Phi \partial \phi,$$

quae expressio semper vt data considerari potest, cuiuscunque naturae assumta fuerit functio Φ: semper enim per quadraturam facile assignari potest. Nam si pro lubitu curua quaecunque $o q$ describatur, cuius abscissa $o p$ designetur per ϕ, applicata vero $p q$ per Φ, area huius curuae $o p q$ dabit valorem formulae nostrae integralis $\int \Phi \partial \phi$; hac ergo introducta aequatio nostra erit Tab. II. Fig. 3.

$$C - \sqrt{(a a - z z)} = x \text{ cos. } \phi + y \text{ sin. } \phi + \int \Phi \partial \phi.$$

§. 14. Introducta igitur in calculum noua variabili ϕ, loco Φ functionem quamcunque ipsius anguli ϕ accipere licet, quo facto ad duas deducti sumus aequationes

$$1^\circ.\ x \text{ sin. } \phi - x \text{ cos. } \phi = \Phi \text{ et}$$

$$2^\circ.\ x \text{ cos. } \phi + y \text{ sin. } \phi = - \sqrt{(a a - z z)} - \int \Phi \partial \phi,$$

vbi in secunda constantem C omisimus, quandoquidem in formula $\int \Phi \partial \phi$ inuoluitur. Ne autem valoribus negatiuis impediamur, loco Φ scribamus $-\Phi$, vt habeamus istas duas aequationes:

$$\text{I. } y \text{ cos. } \phi - y \text{ sin. } \phi = \Phi \text{ et}$$

$$\text{II. } x \text{ cos. } \phi + y \text{ sin. } \phi = \int \Phi \partial \phi - \sqrt{(a a - z z)},$$

ex quibus definire poterimus ambas coordinatas x et y, quae ita exprimentur:

$$x = \text{cos.} \phi \int \Phi \partial \phi - \Phi \text{ sin. } \phi - \text{cos.} \phi \sqrt{(a a - z z)} \text{ et}$$

$$y = \text{sin.} \phi \int \Phi \partial \phi + \Phi \text{ cos.} \phi - \text{sin.} \phi \sqrt{(a a - z z)}.$$

L 2 Hoc

Hoc igitur modo per duas variabiles ϕ et z ambas coordinatas x et y ita determinauimus, vt vtraque ſit certa functio binarum variabilium z et ϕ. Sumtis enim pro lubitu tam ϕ quam z, inde valores ipſarum x et y aſſignari poterunt, quibus inuentis omnia ſuperficiei puncta erunt determinata.

§. 15. Solutio autem haec multo latius patet quam vulgo videri queat, propterea quod loco Φ non ſolum omnes functiones ipſius ϕ, tam algebraicae quam tranſcendentes, aſſumi poſſunt, ſed etiam adeo functiones diſcontinuae, quas per nullas formulas analyticas exprimere licet, non excluduntur. Scilicet loco curuae illius $o\,q$ lineam quamcunque, libero manus ductu deſcriptam, aſſumere licet, etiamſi ſub nulla aequatione analytica comprehendi queat; tum enim poſita abſciſſa $o\,p = \phi$, applicata reſpondens $p\,q$ dabit functionem Φ et ipſa area $o\,p\,q$ ſuppeditat formulam $\int \Phi\,\partial\phi$, ex quibus deinceps ipſa ſuperficies problemati ſatisfaciens conſtrui poterit, id quod ergo infinities infinitis modis praeſtari poſſe manifeſtum eſt.

§. 16. Quo autem haec ad praxin propius accommodentur, loco anguli ϕ eiusque functionis Φ, duas alias variabiles t et u, quarum altera alterius quoque ſit functio quaecunque, in calculum introduci poterunt. Hunc in finem ſtatuamus:

$$\text{coſ.}\,\phi \int \Phi\,\partial\phi - \Phi\,\text{ſin.}\,\phi = t \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\,\phi \int \Phi\,\partial\phi + \Phi\,\text{coſ.}\,\phi = u,$$

vt expreſſiones inuerſae euadant:

$$x = t - \text{coſ.}\,\phi\,\sqrt{(a\,a - z\,z)} \text{ et}$$

$$y = u - \text{ſin.}\,\phi\,\sqrt{(a\,a - z\,z)},$$

vbi autem neceſſe eſt vt tam ſin. ϕ quam coſ. ϕ per nouas litteras t et u exprimantur, ſiquidem quantitas ϕ penitus ex calculo extrudi debet; quod quidem moleſtiſſimum calculum requi-

requirere videatur; verum ſequenti modo negotium facillime, quaſi praeter omnem expectationem, abſolui poterit.

§. 17. Formulas ſcilicet, quarum loco litteras t et u introduximus, differentiemus, ac reperiemus:

$$\partial t = -\partial\phi \,\text{ſin.}\,\phi \int \Phi\,\partial\phi + \Phi\,\partial\phi \,\text{coſ.}\,\phi$$
$$- \partial\Phi \,\text{ſin.}\,\phi - \Phi\,\partial\phi \,\text{coſ.}\,\phi, \text{ ſiue}$$
$$\partial t = -\text{ſin.}\,\phi\,(\partial\Phi + \partial\phi \int \Phi\,\partial\phi),$$

ſimilique modo reperitur:

$$\partial u = \partial\phi \,\text{coſ.}\,\phi \int \Phi\,\partial\phi + \Phi\,\partial\phi \,\text{ſin.}\,\phi$$
$$+ \partial\Phi \,\text{coſ.}\,\phi - \Phi\,\partial\phi \,\text{ſin.}\,\phi, \text{ ſiue}$$
$$\partial u = \text{coſ.}\,\phi\,(\partial\Phi + \partial\phi \int \Phi\,\partial\phi).$$

Vnde patet fore $\frac{\partial t}{\partial u} = -\,\text{tang.}\,\phi$, ſicque tam ſin. ϕ quam coſ. ϕ ex binis quantitatibus t et u definiuntur; erit ſcilicet:

$$\text{ſin.}\,\phi = -\frac{\partial t}{\sqrt{(\partial t^2 + \partial u^2)}} \text{ et coſ.}\,\phi = \frac{\partial u}{\sqrt{(\partial t^2 + \partial u^2)}}.$$

Quare ſi ponamus $\partial u = s\,\partial t$, erit ſin. $\phi = -\frac{1}{\sqrt{(1+ss)}}$ et coſ. $\phi = \frac{s}{\sqrt{(1+ss)}}$, quamobrem per has nouas quantitates t et u noſtrae coordinatae x et y ita determinabuntur:

$$x = t - \frac{s\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1+ss)}} \text{ et } y = u + \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{\sqrt{(1+ss)}},$$

ex quibus ergo ſuperficies quaeſita pariter conſtrui poterit.

§. 18. Cum igitur, conſtituta relatione quacunque inter binas quantitates t et u, ex earum ratione differentialium angulus ϕ ita determinetur, vt ſit tang. $\phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, hunc angulum potius in calculo retineamus; deinde, vt noſtrae formulae concinniores euadant, ſtatuamus $\sqrt{(aa - zz)} = v$, vt ſit $z = \sqrt{(aa - vv)}$, quibus poſitis ambae coordinatae x et y, in plano tabulae accipiendae, hoc modo exprimentur: $x = t - v\,\text{coſ.}\,\phi$ et $y = u - v\,\text{ſin.}\,\phi$; quae ergo denuo binas variabiles a ſe inuicem independentes inuoluunt, ſcilicet t et v, ſi

qui-

quidem u ſpectatur vt functio ipſius t; altera vero v vtcunque variari poteſt, dum t et u eosdem valores retinent; tertia vero coordinata, ad planum tabulae perpendicularis, per ſolam v definitur, cum ſit $z = \sqrt{(a a - v v)}$.

§. 19. Cum igitur relatio inter t et u penitus arbitrio noſtro relinquatur, eas tanquam coordinatas curuae cuiuscunque in plano tabulae deſcribendae ſpectare licebit, quae ita a lubitu noſtro pendet, vt etiam lineae quaecunque libero manus tractu ducendae admitti queant, ita vt non opus ſit certam relationem analyticam inter t et u exhibere. Deſcripta igitur in plano tabulae pro lubitu curua quacunque E U F, pro eius puncto quocunque U vocetur abſciſſa, in axe C A aſſumta, $OT = t$ et applicata $TU = u$, ita vt haec curua pro qualibet abſciſſa $OT = t$ reſpondentem applicatam $TU = u$ oſtendat. Nunc igitur conſtat anguli E U T tangentem eſſe $= \frac{\partial t}{\partial u}$, ita vt anguli deinceps poſiti T U F tangens ſit $= -\frac{\partial t}{\partial u}$, vnde patet hunc angulum T U F praebere ipſum angulum Φ, quo in noſtris formulis indigemus.

Tab. II. Fig. 4.

§. 20. Ducatur nunc ad hanc curuam normalis U S, eritque angulus $TUS = \Phi - 90°$; vnde ſi in hac normali U S reſcindatur interuallum $UV = v$, ducaturque axi parallela V R, erit

$$VR = v \text{ ſin. } (\Phi - 90) = - v \text{ coſ. } \Phi$$

et interuallum

$$UR = v \text{ coſ. } (\Phi - 90) = v \text{ ſin. } \Phi,$$

atque his lineis introductis habebimus $x = OT + RV$ et $y = TU - UR$. Quamobrem ſi ex V ad axem demittatur perpendiculum V X, cum ſit $OX = OT + RV$ et $VX = TU - UR$, habebimus $OX = x$ et $XV = y$, ſicque punctum V id ipſum erit, cui in prima figura adſcripta fuerat littera

littera Y. Quodsi iam ex puncto V erigatur ad planum perpendiculum $VZ = \sqrt{(aa - vv)}$, ob $z = \sqrt{(aa - vv)}$, erit punctum Z in ipsa superficie quam quaerimus; et cum sit interuallum $ZU = a$, quod exhibet ipsam normalem ad nostram superficiem, hinc patet omnes normales in ipsam curvam E U F incidere.

§. 21. Quodsi iam hanc superficiem inuentam secari concipiamus plano ad tabulam normali et per U S transeunte, in hac sectione reperietur punctum Z, vnde pro figura huius sectionis, si recta $UV = v$ sumatur pro abscissa et $VZ = z$ pro applicata, aequatio erit $z = \sqrt{(aa - vv)}$; vnde patet hanc sectionem esse circulum, centro U, radio $ZU = a$ descriptum. Cum igitur omnes sectiones ad planum tabulae perpendiculariter factae, simulque ad curuam EUF normales, sint circuli radio a descripti, quorum centra iugiter in curuam E U F incidant, tota superficies, quam quaerimus, erit cognita; simulque perspicitur, numerum omnium solutionum revera esse infinitum, propterea quod curua E U F prorsus pro arbitrio describi potest.

§. 22. In hac igitur solutione elucet character principalis, quo omnia problemata circa functiones duarum variabilium, quae integrationem requirunt, distinguuntur, et qui in hoc consistit, vt integratio non solum quantitatem constantem, veluti in integrationibus communibus vsu venit, sed eius loco functionem adeo arbitrariam in calculum introducat, quae in nostra solutione per curuam E U F, pro lubitu ducendam repraesentatur. Quare cum haec insignis proprietas nondum satis a Geometris sit perpensa, atque adeo a nonnullis in dubium vocetur, hoc problema maxime idoneum est visum ad grauissimam hanc veritatem extra omne dubium collocandam, propte-

propterea quod eadem ſolutio ex primis Geometriae elementis deduci potuiſſet.

Solutio ſynthetica
eiusdem problematis.

§. 23. Cum circulus centro C radio $CN = CM$
Tab. II. Fig. 5. deſcriptus hanc habeat proprietatem, vt omnes normales Z C ad centrum C tendant, ideoque inter ſe ſint aequales, manifeſtum eſt, ſi plures huiusmodi circuli ad planum tabulae perpendiculariter conſtituantur, in ſingulis omnes normales aequales fore. Tantum igitur ſupereſt, vt circuli illi continua ſerie ita diſponantur, vt normales illae C Z etiam ad circulos proxime contiguos normales ſint, id quod euenit, ſi centrum C in directione C c, ad diametrum M N normali, ſuper plano promoueatur.

§. 24. Huic autem conditioni manifeſto ſatisfiet, ſi ſemicirculus ille M Z N, ad planum tabulae perpendiculariter
Fig. 6. erectus, ita promoueatur, vt eius centrum ſuper curua quacunque E U F protrahatur, ita vt eius diameter M N ad illam curuam E U F perpetuo teneat ſitum normalem, ſiue vt recta M N vbique curuam in U ad angulos rectos ſecet. Hoc enim modo peripheria iſtius circuli talem ſuperficiem deſcribet, cuius omnes normales, quae perpetuo ad ipſam curuam E U F dirigentur, ſint inter ſe aequales. Euidens autem eſt hanc conſtructionem cum praecedente ſolutione analytica prorſus conuenire.

§. 25. Iam obſeruauimus curuam iſtam directricem E U F penitus ab arbitrio noſtro pendere, atque adeo ex pluribus partibus pro lubitu componi poſſe, quin etiam, vbicunque lubuerit, terminari poterit. Immo etia mloco huius curuae vnicum

cum punctum assumi potest, cui si centrum circuli insistat, et interea circulus motu angulari circumferatur, orietur hemisphaerium, cuius vtique omnes normales, vtpote radii sphaerae, inter se erunt aequales.

§. 27. Si linea illa directrix E U F fuerit recta, et super ea centrum circuli plano tabulae perpetuo normaliter insistentis ita promoueatur, vt diameter M N vbique rectam E F normaliter traiiciat, peripheria circuli describet superficiem cylindricam, quam problemati nostro satisfacere per se patet. At si recta M N in puncto F subito terminetur, postquam centrum circuli eo vsque peruenerit, ibi quiescet, circulus autem motu angulari circumducetur, quo pacto cylindrus ille hic definet in hemisphaerium semicirculo *m i n* insistens. Tab. II. Fig. 7.

§. 28. Quodsi linea directrix E F etiam fuerit circulus, radio maiore quam A descriptus, et centrum circuli minoris super eius peripheria ita circumferatur, vt diameter M N vbique directricem normaliter traiiciat, hoc modo generabitur corpus cylindrum quasi incuruatum referens, farciminis figuram mentientem, ac si termino cylindri incuruati vti velimus, affirmare licebit, omnia corpora problemati nostro satisfacientia ad genus cylindrorum incuruatorum referri posse. Fig. 8.

Problema generalius.

Super dato plano eiusmodi solidum exstruere, ad cuius superficiem si in singulis punctis normales ducantur, eae ad eleuationem super plano relationem teneant quamcunque datam.

Solutio.

§. 29. Manentibus omnibus denominationibus, quibus supra vsi sumus, ita vt posito $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, normalis ad superficiem sit $ZN = z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, haec normalis Fig. 2.

cum ante esse debuerat constans, nunc requiritur vt certae cuipiam functioni datae altitudinis $YZ = z$ aequetur, quae ergo functio si statuatur $= Z$, solutio problematis hac continebitur aequatione: $z\surd(1 + pp + qq) = Z$.

§. 30. Ex hac igitur aequatione statim deducimus $pp + qq = \frac{Z^2 - z^2}{zz}$; vnde si ponamus $p = \frac{cos. \Phi}{z}\surd(Z^2 - z^2)$, fiet $q = \frac{sin. \Phi}{z}\surd(Z^2 - z^2)$. Quare cum esse debeat $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, facta substitutione habebimus:

$$\partial z = \frac{\surd(Z^2 - z^2)}{z}(\partial x \operatorname{cos.}\Phi + \partial y \operatorname{sin.}\Phi),$$

vnde colligitur

$$\frac{z\,\partial z}{\surd(Z^2 - z^2)} = \partial x \operatorname{cos.}\Phi + \partial y \operatorname{sin.}\Phi,$$

vbi cum membrum sinistrum per se sit integrabile, quippe vnicam variabilem z inuoluens, etiam membrum dextrum per se integrabile reddendum est; vnde si differentialia ad elementum $\partial\Phi$ reducamus, nanciscemur, vt ante, hanc aequationem:

$$\int\frac{z\,\partial z}{\surd(Z^2 - z^2)} = x \operatorname{cos.}\Phi + y \operatorname{sin.}\Phi + \int\partial\Phi(x \operatorname{sin.}\Phi - y \operatorname{cos.}\Phi).$$

§. 31. Necesse igitur est, vt formula $x \operatorname{sin.}\Phi - y \operatorname{cos.}\Phi$ sit functio vnius variabilis Φ, quae ponatur $= -\varPhi$ vt sit $y \operatorname{cos.}\Phi - x \operatorname{sin.}\Phi = \varPhi$. Deinde quia integrale $\int\frac{z\,\partial z}{\surd(Z^2 - z^2)}$ vt cognitum spectare licet, eius loco scribamus litteram v, vt sit $v = \int\frac{z\,\partial z}{\surd(Z^2 - z^2)}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$v = x \operatorname{cos.}\Phi + y \operatorname{sin.}\Phi - \int\varPhi\,\partial\Phi, \text{ vnde fit}$$

$$x \operatorname{cos.}\Phi + y \operatorname{sin.}\Phi = v + \int\varPhi\,\partial\Phi,$$

ex qua aequatione, cum illa: $y \operatorname{cos.}\Phi - x \operatorname{sin.}\Phi = \varPhi$ combinata, deducuntur sequentes valores:

$$x = v \operatorname{cos.}\Phi + \operatorname{cos.}\Phi\int\varPhi\,\partial\Phi - \varPhi \operatorname{sin.}\Phi \text{ et}$$

$$y = v \operatorname{sin.}\Phi + \operatorname{sin.}\Phi\int\varPhi\,\partial\Phi + \varPhi \operatorname{cos.}\Phi,$$

ita

ita vt iam x et y per binas variabiles ϕ et v exprimantur, dum tertia coordinata z per folam v definitur.

§. 32. Iam pariter, vt ante fecimus, loco variabilis ϕ et quantitatum independentium Φ et $\int \Phi \partial \phi$ introducamus quantitates t et u, ponendo

$$t = \text{cof.}\, \phi \int \Phi \partial \phi - \Phi\, \text{fin.}\, \phi,$$

$$u = \text{fin.}\, \phi \int \Phi \partial \phi + \Phi\, \text{cof.}\, \phi,$$

vnde cum fequatur, vt fupra oftendimus, $\text{tang.}\, \phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, angulus ϕ iam per t et u dabitur; vnde nafcuntur hae formulae:

$$x = t + v\, \text{cof.}\, \phi \quad \text{et} \quad y = u + v\, \text{fin.}\, \phi.$$

§. 33. Ad has formulas conftruendas defcribatur, prorfus vt fupra, fuper axe O A, curua quaecunque pro lubitu E U F, fiue continua, fiue difcontinua, cuius coordinatae fint O T $= t$ et T U $= u$, atque angulus T U F aequalis erit angulo noftro ϕ, vnde fi ad hanc curuam producatur normalis S U, erit angulus T U S $= \phi - 90°$. Iam in normali S U producta capiatur interuallum U V $= v$, et demiffo ex V ad axem O A perpendiculo V R X, adque normali U R, quia angulus U V X $= \phi - 90°$, in triangulo V U R habebimus: Tab. II. Fig. 9.

$$\text{U R} = v\, \text{fin.}\, (\phi - 90°) = - v\, \text{cof.}\, \phi,$$

$$\text{V R} = v\, \text{cof.}\, (\phi - 90°) = \quad v\, \text{fin.}\, \phi,$$

ex quibus colligitur $x =$ O T $-$ U R et $y =$ U T $+$ V R, ficque patet fore $x =$ O X et $y =$ X V; vnde fingula puncta rectae U V praebent binas coordinatas in plano tabulae fumtas x et y.

§. 34. Quodfi ergo ex puncto V ad planum tabulae normaliter erigatur recta V Z $= z$, ita a v pendens, vt fit

$v = \int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, erit punctum Z in ipſa ſuperficie quam quaerimus, cuius ſectio verticalis, ſecundum directionem UV facta, talem habebit figuram, vti aequatio $v = \int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$ indicat, ſi quidem recta $UV = v$ eius abſciſſam, recta vero $VZ = z$ eius applicatam repraeſentat, hincque figura ſemel deſcripta in ſitu perpendiculari ſecundum directricem EUF ita promota, vt eius axis UV perpetuo ad directricem maneat normalis, deſcribet ſuperficiem ſolidi problemati noſtro ſatisfacientis.

Tab. II. Fig. 10.

§. 35. Nihil aliud igitur ſupereſt, niſi vt figura curvae illius mobilis UZ, cuius abſciſſa $UV = v$ et applicata $VZ = z$, indagetur. Cum igitur ſit $\partial v = \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, ſi ad hanc curvam ducatur normalis ZN, erit ſubnormalis

$$VN = \frac{z \partial z}{\partial v} = \sqrt{(Z^2 - z^2)},$$

ideoque ipſa normalis $NZ = Z$; vnde patet iſtam curuam eam ipſam eſſe in plano deſcriptam, cuius normalis ZN propoſitae functioni Z ſit aequalis. Hac igitur curua deſcripta, eius promotio ſecundum directricem quamcunque ipſam ſuperficiem, quam quaerimus, deſcribet, ſi modo in hoc motu praecepta ante tradita obſeruentur, atque axis initium U perpetuo iuxta directricem promoueatur. Caeterum omnia hic manifeſto ſe perinde habent, vti in problemate priore ſunt expoſita, ita vt etiam hoc problema ex primis elementis Geometriae reſolui potuiſſet, poſtquam ſcilicet deſcripta fuerit curva UZ; quia deinceps per totam ſuperficiem eaedem habentur normales $NZ = Z$.

Additamentum.

§. 35. Quo clarius perſpiciatur, quomodo curua *illa* perpetuo in ſitu verticali detinenda ſuper plano horizontali promoueri debeat, contemplemur hic tantum eius Baſin inſtar

virgae

virgae rectae M N, plano horizontali incumbentis, quae ita promoueatur, vt pro eius singulis punctis directio motus O o ad ipsam virgam M N vbique sit normalis. Tali igitur motu, si celeritates in singulis punctis virgae fuerint inter se aequales, virga motu sibi parallelo proferetur; sin autem celeritas in termino M maior fuerit quam in altero termino N, vt post tempusculum infinite paruum perueniat in situm $m\,o\,n$, eius motus erit angularis, factus circa punctum quodpiam fixum V, in ipsa recta M N producta situm, quod punctum quouis momento variari potest, dummodo perpetuo cum ipsa virga in directum iaceat. Tab. II. Fig. 11.

§. 37. Huiusmodi igitur motu singula virgae puncta O certas curuas describent, quae inter se erunt parallelae, seu communi euoluta praeditae. Ita si communis euoluta fuerit curua A V B, circa quam filum, cum virga M N in directum annexum, sit circumuolutum et more solito euoluatur, hocque motu virga ex situ M N in situm $m\,n$ perueniat: iste virgae motus vtique ita erit comparatus, vt singula eius puncta quouis momento secundum directiones ad situm virgae normales promoueantur. Ex quo vicissim euidens est, virgae punctum quoduis O per datam curuam O o promoueri posse, dummodo perpetuo ipsa virga $m\,n$ situm teneat ad hanc curuam normalem; atque adeo hanc curuam O o prorsus pro lubitu assumere licet, ita vt libero manus tractu quomodocunque describi queat; in quo ipso consistit vera indoles omnium huiusmodi problematum, quorum solutio integrationem functionum duarum variabilium inuoluit. Fig. 12.

§. 38. Descripto igitur hoc motu, quo virgam super plano horizontali promoueri assumimus, si virga M N fuerit basis curuae cuiuscuque M U N, ad cuius punctum quoduis U ducta sit normalis U S, haecque figura perpetuo in situ Fig. 13.

 verti-

verticali teneatur, dum eius bafis M N, fuper plano horizontali tali mota, qualem defcripfimus, vtcunque proferatur, hacque ratione fuperficies continua defcribi concipiatur: euidens eft normalem U S etiam ad ipfam fuperficiem in puncto U fore normalem, propterea quod motus puncti U fit iuxta directionem ad bafin M N, ideoque etiam ad planum figurae normalem. Hinc igitur patet, quamcunque relationem normalis U S ad applicatam U T tenuerit, eandem quoque proprietatem in totam fuperficiem hoc modo defcriptam competere debere, atque in hoc confiftit folutio fupra data problematis generalis poft §. 28. propofiti.

SOLV-

Fig. 1.

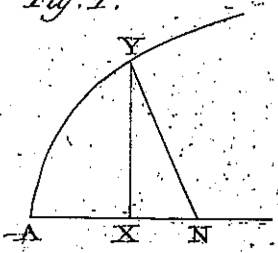

Fig. 2.

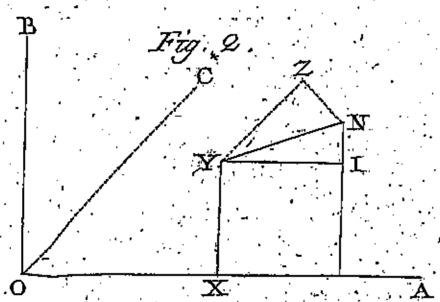

Fig. 3.

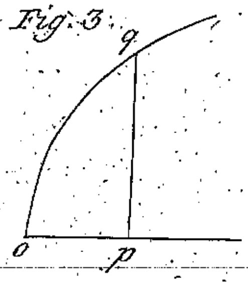

Fig. 4.

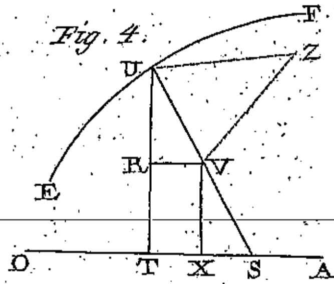

Fig. 5.

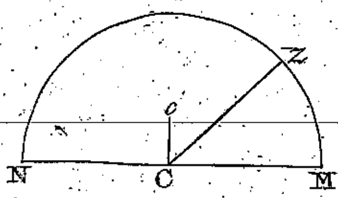

Fig. 6.

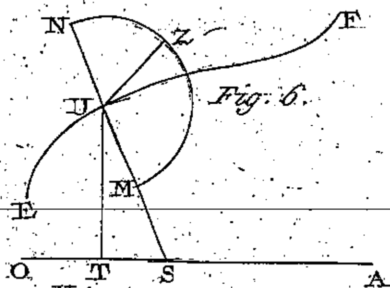

Fig. 7.

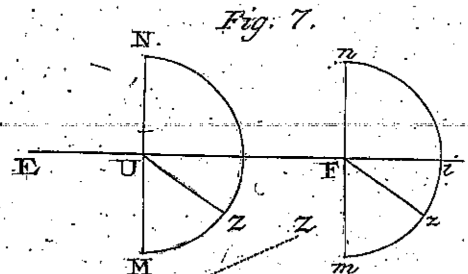

Fig. 8.

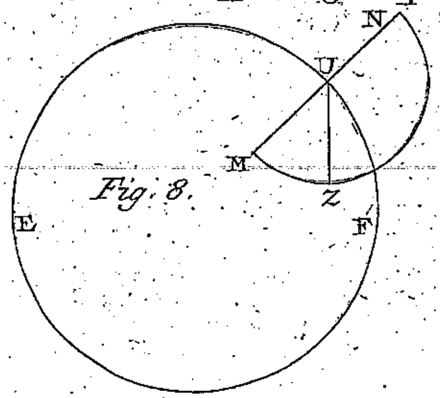

Fig. 10.

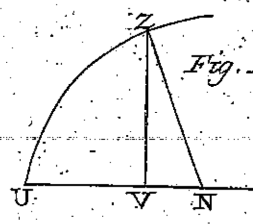

Fig. 9.

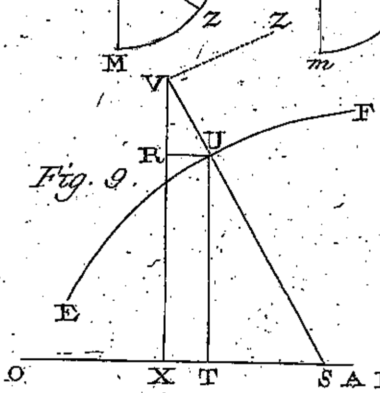

Fig. 11.

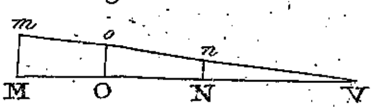

Fig. 12.

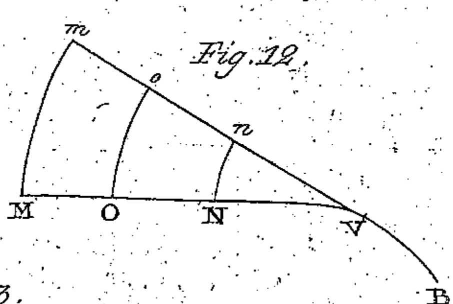

Fig. 13.