



1790

De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata" (1790). *Euler Archive - All Works*. 647.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/647>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE METHODO
TANGENTIUM INVERSA
AD
THEORIAM SOLIDORVM
TRANSLATA.

Auctore
L. EYLERO.

Conuent. exhib. d. 2 Sept. 1776.

§. I.

Quemadmodum methodus tangentium inuerfa versatur in inuestigatione eiusmodi linearum curuarum, quae certis proprietatibus, ratione tangentium, siue normalium, siue aliarum linearum, per rationem differentialium determinatarum, sint praeditae: ita hoc loco similem methodum ad theoriam solidorum sum accommodaturus, ita vt eiusmodi superficies inuestigari debeant, quibus certae ac praescriptae proprietates, ratione tangentium, vel normalium aliarumque quantitatum, per differentialium rationem definitarum, conueniant.

§. 2. Quemadmodum porro methodus tangentium inuerfa communis ita ad Analyfin puram reuocari potest, vt relatio inter binas quantitates variables x et y inuestigetur, ex data quacunque relatione inter earum differentialia, siue primi, siue altioris cuiuspiam ordinis; vel etiam quaeratur, qualis fun-

ctio ipsius x esse debeat quantitas y , vt certa quaedam relatio inter differentialia praescripta locum sit habitura: ita simili modo eiusmodi quaestiones proponi possunt, in quibus quaeritur, qualis functio binarum variabilium x et y esse debeat quantitas z , vt certa quaedam proprietas proposita, per differentialia expressa, obtineatur.

§. 3. Cum igitur huiusmodi quaestiones circa functiones duarum variabilium versentur, totum hoc argumentum ad eam Analyseos partem est referendum, in qua functiones duarum pluriumue variabilium tractari solent, cuius ratio, quemadmodum iam saepius obseruavi, toto coelo est diuersa ab Analyfi communi, in qua tantum functiones vnus variabilis tractantur, atque adeo prorsus peculiare calculi genus postulat, cuius etiamnunc prima principia vix a Geometris sunt explorata; vnde plurimum ad incrementum scientiae Analyticae conferet eiusmodi quaestiones euoluere, quarum solutio istam novam Analyseos partem requirat. Hunc igitur in finem sequentem quaestionem accuratius pertractare constitui.

Problema.

Super dato plano eiusmodi solidum exstruere, ad cuius superficiem si in singulis punctis normales ducantur, eae omnes inter se futurae sint aequales.

Tab. II.
Fig. 1.

§. 4. Perspicuum est hanc quaestionem analogam esse illi, qua in plano super axe dato eiusmodi curua requiritur, cuius omnes normales inter se sint aequales, siue vt posita abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, normalis YN , quae est $\frac{y\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}{\partial x}$, habeat quantitatem constantem $= a$. Hinc ergo, posito $\partial y = p \partial x$, requiritur vt fit $y\sqrt{1 + p^2} = a$, vnde sequitur fore $p = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{\partial y}{\partial x}$, vnde porro habebitur

tur $\partial x = \frac{y \partial y}{\sqrt{(aa - yy)}}$, cuius integrale praebet $x = C - \sqrt{(aa - yy)}$, quae est aequatio ad circulum, cuius radius $= a$, ita ut omnes normales in idem punctum N, quod est centrum, conuergere debeant; quae solutio, quamquam per integrationem est inuenta, tamen non omnino est generalis, quandoquidem ipsi aequationi differentiali $\partial x \sqrt{(aa - yy)} = y \partial y$, etiam satisfacit valor $y = a$, quae aequatio est ad lineam rectam axi ad distantiam $= a$ parallelam.

§. 5. Quodsi iam simili modo super dato plano omnia solida extruenda quaeri debeant, in quibus omnes rectae a plano ad superficiem normaliter ductae inter se sint aequales; primo quidem patet huic quaestioni satisfacere superficiem planam dato plano parallelam. Deinde etiam manifesto satisfacit hemisphaerium super plano exstructum, quippe cuius omnes radii ad superficiem sunt normales. Tertio vero etiam euidentis est satisfacere cylindrum, cuius axis in ipsum planum incidat; ex quo facile intelligere licet, praeterea quoque infinita alia corporum genera huic quaestioni esse satisfactura, quae omnia ergo solutio, siquidem fuerit generalis, indicare debet.

§. 6. Quaestio igitur haec manifesto in nouum illud Analyseos genus incurrit, quod in euoluendis functionibus duarum variabilium versatur, ideoque vires Analyseos communis superare est censenda; verum tamen haec eadem quaestio ideo potissimum maximam attentionem meretur, quod adeo per prima Geometriae elementa resolui potest, vnde solutio Analytica, quae ob nouitatem pluribus Geometris adhuc suspecta videri posset, maximum firmamentum adipiscetur. Vtramque igitur solutionem seorsim omni studio expediamus.

Solu-

Solutio Analytica problematis propositi.

Tab. II. Fig. 2. §. 7. Cum igitur haec quaestio circa superficiem super dato plano extruendam versetur, referat tabula hoc ipsum planum, in quo pro lubitu statuatur bini axes fixi OA et OB inter se normales, secundum quos in ipso plano constituantur binae coordinatae $OX = x$ $OY = y$, tertia autem, ex puncto Y ad ipsam superficiem perpendiculariter erecta, vocetur $YZ = z$, quibus positis eiusmodi aequatio inter has ternas coordinatas x , y et z indagari debet, ut omnes rectae ZN , quae ad superficiem normaliter in singulis punctis Z sunt ductae, fiant inter se aequales, hoc est, quaeritur, qualis functio quantitas z binarum variabilium x et y esse debeat, ut ista conditio adimpleatur.

§. 8. Quoniam igitur coordinatam z tanquam functionem duarum reliquarum x et y spectamus, si eam differentiemus, sumendo tam x quam y variabilem, huiusmodi formula exorietur: $\partial z = p \partial x + q \partial y$, et nunc ratio binarum quantitatum p et q inuestigari debet, ut conditioni praescriptae satisfiat. In genere quidem constat, has duas quantitates p et q tales functiones ipsarum x et y esse debere, ut formula differentialis $p \partial x + q \partial y$ integrationem admittat, id quod eueniet, si fuerit $(\frac{\partial p}{\partial y}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$, ubi formula $(\frac{\partial p}{\partial y})$ nascitur ex differentiatione ipsius p , si sola y pro variabili accipiatur; similiq; modo altera formula $(\frac{\partial q}{\partial x})$ nascitur ex differentiatione ipsius q , si sola x variabilis statuatur.

§. 9. Sit nunc N punctum in nostro plano, in quod recta ZN , quae ad superficiem in puncto Z est normalis, incidit, ita ut per conditionem praescriptam esse oporteat
 ZN

$ZN = a$. Ex elementis autem Solidorum passim traditis notum est, quantitatem huius rectae ZN ita exprimi, vt fit $ZN = z \sqrt{(1 + pp + qq)}$, ita vt tota solutio ex hac aequatione: $z \sqrt{(1 + pp + qq)} = a$ peti debeat. Quanquam autem istam formulam $z \sqrt{(1 + pp + qq)}$ tuto ex elementis depromere liceret; tamen hic facilem viam indicabo, hanc ipsam formulam, sine vllis ambagibus, ex sola notione qua recta ZN ad superficiem normalis statuitur, inueniendi, quae in hoc consistit, vt, etiamsi punctum Z parumper in superficie mutetur, longitudo rectae ZN inde nullam mutationem patiatur.

§. 10. Hoc principio constituto ducatur ex puncto quaesito N ad axem OA normalis NM , ac vocetur $OM = m$ et $MN = n$, ductaque recta YI axi OA parallela, erit interuallum $XM = YI = m - x$ et interuallum $IN = n - y$, vnde fit $YN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2$. Iam quia recta YZ toti plano, ideoque rectae YN , normaliter infitit, ob $YZ = z$, erit

$$ZN^2 = (m - x)^2 + (n - y)^2 + z z,$$

quae quantitas quia inuariata manere debet, etiamsi punctum z infinite parum mutetur, differentiale ipsius formulae, sumendo x , y et z variabilibus, nihilo aequari debet. Sumatur igitur primo sola x variabilis, manente y constante, et quia tum est $\partial z = p \partial x$, erit differentiale

$$- 2 \partial x (m - x) + 2 z p \partial x = 0,$$

sive $-m + x + pz = 0$. Simili modo si sola y pro variabili sumatur, quia tum est $\partial z = q \partial y$, differentiatio dat

$$- 2 \partial y (n - y) + 2 z q \partial y = 0,$$

sive $-n + y + qz = 0$.

§. 11. Consideratio igitur, quod recta NZ ad ipsam superficiem est normalis, nobis has duas condiciones suppeditat: 1°. $m = x + pz$ et 2°. $n = y + pz$, sicque erunt intervalla $YI = pz$ et $IN = qz$, quibus valoribus locus puncti N definitur, in quod normalis ZN ad Z ducta incidit. Hinc igitur cum sit $YN = z\sqrt{pp + qq}$, erit ipsa normalis ZN $= z\sqrt{(1 + pp + qq)}$, quae est eadem formula, quae vulgo per longas ambages erui solet.

§. 12. Cum igitur resolutio nostri problematis perducta sit ad hanc aequationem: $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$; ex qua primo ratio functionum p et q , hinc vero porro ipsa aequatio inter ternas coordinatas x, y et z erui debet, sumtis quadratis habebimus $pp + qq = \frac{aa - zz}{zz}$, cui aequationi ut satisfiat, statuamus

$$p = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \cos. \Phi \text{ et } q = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} \sin. \Phi,$$

quare cum conditio principalis postulet ut sit $\partial z = p \partial x + q \partial y$, erit

$$\partial z = \frac{\sqrt{(aa - zz)}}{z} (\partial x \cos. \Phi + \partial y \sin. \Phi), \text{ siue}$$

$$\frac{z \partial z}{\sqrt{(aa - zz)}} = \partial x \cos. \Phi + \partial y \sin. \Phi,$$

cuius aequationis prius membrum cum per se sit integrabile, etiam alterum integrabile sit necesse est. Cum igitur per notam reductionem sit

$$f \partial x \cos. \Phi = x \cos. \Phi + f x \partial \Phi \sin. \Phi \text{ et}$$

$$f \partial y \sin. \Phi = y \sin. \Phi - f y \partial \Phi \cos. \Phi,$$

integratione, quatenus fieri potest, instituta obtinebimus

$$C - \sqrt{(aa - zz)} = x \cos. \Phi + y \sin. \Phi + f \partial \Phi (x \sin. \Phi - y \cos. \Phi).$$

Totum igitur negotium huc redit, ut formula differentialis $\partial \Phi (x \sin. \Phi - y \cos. \Phi)$ reddatur integrabilis, quae cum unicum

cum differentiale $\partial \Phi$ contineat, necesse est vt factor $x \sin. \Phi - y \cos. \Phi$, sit funcio solius quantitatis Φ .

§. 13. Denotet igitur Φ functionem quamcunque ipsius Φ , ac statuatur: $x \sin. \Phi + y \cos. \Phi = \Phi$, eritque

$$\int \partial \Phi (x \sin. \Phi + y \cos. \Phi) = \int \Phi \partial \Phi,$$

quae expressio semper vt data considerari potest, cuiuscunque naturae assumta fuerit funcio Φ : semper enim per quadraturam facile assignari potest. Nam si pro lubitu curua quaecunque oq describatur, cuius abscissa op designetur per Φ , applicata vero pq per Φ , area huius curuae opq dabit valorem formulae nostrae integralis $\int \Phi \partial \Phi$; hac ergo introducta aequatio nostra erit

$$C - \sqrt{(aa - zz)} = x \cos. \Phi + y \sin. \Phi + \int \Phi \partial \Phi.$$

§. 14. Introducta igitur in calculum noua variabili Φ , loco Φ functionem quamcunque ipsius anguli Φ accipere licet, quo facto ad duas deducti sumus aequationes

$$1^\circ. x \sin. \Phi - x \cos. \Phi = \Phi \text{ et}$$

$$2^\circ. x \cos. \Phi + y \sin. \Phi = -\sqrt{(aa - zz)} - \int \Phi \partial \Phi,$$

vbi in secunda constantem C omisimus, quandoquidem in formula $\int \Phi \partial \Phi$ inuoluitur. Ne autem valoribus negatiuis impediamur, loco Φ scribamus $-\Phi$, vt habeamus istas duas aequationes:

$$\text{I. } y \cos. \Phi - y \sin. \Phi = \Phi \text{ et}$$

$$\text{II. } x \cos. \Phi + y \sin. \Phi = \int \Phi \partial \Phi - \sqrt{(aa - zz)},$$

ex quibus definire poterimus ambas coordinatas x et y , quae ita exprimentur:

$$x = \cos. \Phi \int \Phi \partial \Phi - \Phi \sin. \Phi - \cos. \Phi \sqrt{(aa - zz)} \text{ et}$$

$$y = \sin. \Phi \int \Phi \partial \Phi + \Phi \cos. \Phi - \sin. \Phi \sqrt{(aa - zz)}.$$

Hoc igitur modo per duas variables Φ et z ambas coordinatas x et y ita determinauimus, vt vtraque sit certa functio binarum variabilium z et Φ . Sumtis enim pro lubitu tam Φ quam z , inde valores ipsarum x et y assignari poterunt, quibus inuentis omnia superficiei puncta erunt determinata.

§. 15. Solutio autem haec multo latius patet quam vulgo videri queat, propterea quod loco Φ non solum omnes functiones ipsius Φ , tam algebraicae quam transcendentes, assumi possunt, sed etiam adeo functiones discontinuae, quas per nullas formulas analyticas exprimere licet, non excluduntur, Scilicet loco curuae illius oq lineam quamcunque, libero manus ductu descriptam, assumere licet, etiamsi sub nulla aequatione analytica comprehendi queat; tum enim posita abscissa $op = \Phi$, applicata respondens pq dabit functionem Φ et ipsa area opq suppeditat formulam $\int \Phi \partial \Phi$, ex quibus deinceps ipsa superficies problemati satisfaciens construi poterit, id quod ergo infinitis infinitis modis praestari posse manifestum est.

§. 16. Quo autem haec ad praxin propius accommodentur, loco anguli Φ eiusque functionis Φ , duas alias variables t et u , quarum altera alterius quoque sit functio quaecunque, in calculum introduci poterunt. Hunc in finem statuamus:

$$\text{cof. } \Phi \int \Phi \partial \Phi - \Phi \text{ fin. } \Phi = t \text{ et}$$

$$\text{fin. } \Phi \int \Phi \partial \Phi + \Phi \text{ cof. } \Phi = u,$$

vt expressiones inuersae euadant:

$$x = t - \text{cof. } \Phi \sqrt{(aa - zz)} \text{ et}$$

$$y = u - \text{fin. } \Phi \sqrt{(aa - zz)},$$

vbi autem necesse est vt tam $\text{fin. } \Phi$ quam $\text{cof. } \Phi$ per nouas litteras t et u exprimantur, siquidem quantitas Φ penitus ex calculo extrudi debet; quod quidem molestissimum calculum requi-

requirere videatur; verum sequenti modo negotium facillime, quasi praeter omnem expectationem, absolui poterit.

§. 17. Formulas scilicet, quarum loco litteras t et u introduximus, differentiemus, ac reperiemus:

$$\begin{aligned} \partial t &= -\partial \Phi \sin. \Phi f \Phi \partial \Phi + \Phi \partial \Phi \cos. \Phi \\ &= -\partial \Phi \sin. \Phi - \Phi \partial \Phi \cos. \Phi, \text{ siue} \end{aligned}$$

$$\partial t = -\sin. \Phi (\partial \Phi + \partial \Phi f \Phi \partial \Phi),$$

similique modo reperitur:

$$\begin{aligned} \partial u &= \partial \Phi \cos. \Phi f \Phi \partial \Phi + \Phi \partial \Phi \sin. \Phi \\ &+ \partial \Phi \cos. \Phi - \Phi \partial \Phi \sin. \Phi, \text{ siue} \end{aligned}$$

$$\partial u = \cos. \Phi (\partial \Phi + \partial \Phi f \Phi \partial \Phi).$$

Vnde patet fore $\frac{\partial t}{\partial u} = -\text{tang. } \Phi$, sicque tam $\sin. \Phi$ quam $\cos. \Phi$ ex binis quantitibus t et u definiuntur; erit scilicet:

$$\sin. \Phi = -\frac{\partial t}{\sqrt{(\partial t)^2 + (\partial u)^2}} \text{ et } \cos. \Phi = \frac{\partial u}{\sqrt{(\partial t)^2 + (\partial u)^2}}.$$

Quare si ponamus $\partial u = s \partial t$, erit $\sin. \Phi = -\frac{1}{\sqrt{1+s s}}$ et $\cos. \Phi = \frac{s}{\sqrt{1+s s}}$, quamobrem per has novas quantitates t et u nostrae coordinatae x et y ita determinabuntur:

$$x = t - \frac{s \sqrt{a a - z z}}{\sqrt{1+s s}} \text{ et } y = u + \frac{\sqrt{a a - z z}}{\sqrt{1+s s}},$$

ex quibus ergo superficies quaesita pariter construi poterit.

§. 18. Cum igitur, constituta relatione quacunque inter binas quantitates t et u , ex earum ratione differentialium angulus Φ ita determinetur, vt sit $\text{tang. } \Phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, hunc angulum potius in calculo retineamus; deinde, vt nostrae formulae concinniores euadant, statuamus $\sqrt{a a - z z} = v$, vt sit $z = \sqrt{a a - v v}$, quibus positis ambae coordinatae x et y , in plano tabulae accipiendae, hoc modo exprimentur: $x = t - v \cos. \Phi$ et $y = u - v \sin. \Phi$; quae ergo denuo binas variables a se inuicem independentes inuoluunt, scilicet t et v , si

quidem u spectatur vt functio ipsius t ; altera vero v vtcunque variari potest, dum t et u eosdem valores retinent; tertia vero coordinata, ad planum tabulae perpendicularis, per solam v definitur, cum sit $z = \sqrt{(aa - vv)}$.

§. 19. Cum igitur relatio inter t et u penitus arbitrio nostro relinquatur, eas tanquam coordinatas curuae cuiuscunque in plano tabulae describendae spectare licebit, quae ita a lubitu nostro pendet, vt etiam lineae quaecunque libero manus tractu ducendae admitti queant, ita vt non opus sit certam relationem analyticam inter t et u exhibere. Descripta igitur in plano tabulae pro lubitu curua quacunque $EU F$, pro eius puncto quocunque U vocetur abscissa, in axe CA assumpta, $OT = t$ et applicata $TU = u$, ita vt haec curua pro qualibet abscissa $OT = t$ respondentem applicatam $TU = u$ ostendat. Nunc igitur constat anguli EUT tangentem esse $= \frac{\partial t}{\partial u}$, ita vt anguli deinceps positi TUF tangens sit $= -\frac{\partial t}{\partial u}$, vnde patet hunc angulum TUF praebere ipsum angulum Φ , quo in nostris formulis indigemus.

§. 20. Ducatur nunc ad hanc curuam normalis US , eritque angulus $TUS = \Phi - 90^\circ$; vnde si in hac normali US rescindatur interuallum $UV = v$, ducaturque axi parallela VR , erit

$$VR = v \sin. (\Phi - 90) = -v \cos. \Phi$$

et interuallum

$$UR = v \cos. (\Phi - 90) = v \sin. \Phi,$$

atque his lineis introductis habebimus $x = OT + RV$ et $y = TU - UR$. Quamobrem si ex V ad axem demittatur perpendicularum VX , cum sit $OX = OT + RV$ et $VX = TU - UR$, habebimus $OX = x$ et $XV = y$, sicque punctum V id ipsum erit, cui in prima figura adscripta fuerat littera

littera Y. Quodsi iam ex puncto V erigatur ad planum perpendiculum $VZ = \sqrt{aa - vv}$, ob $z = \sqrt{aa - vv}$, erit punctum Z in ipsa superficie quam quaerimus; et cum sit interuallum $ZU = a$, quod exhibet ipsam normalem ad normalem superficiem, hinc patet omnes normales in ipsam curuam E U F incidere.

§. 21. Quodsi iam hanc superficiem inuentam secari concipiamus plano ad tabulam normali et per U S transeunte, in hac sectione reperietur punctum Z, vnde pro figura huius sectionis, si recta $UV = v$ sumatur pro abscissa et $VZ = z$ pro applicata, aequatio erit $z = \sqrt{aa - vv}$; vnde patet hanc sectionem esse circulum, centro U, radio $ZU = a$ descriptum. Cum igitur omnes sectiones ad planum tabulae perpendiculariter factae, simulque ad curuam E U F normales, sint circuli radio a descripti, quorum centra iugiter in curuam E U F incidant, tota superficies, quam quaerimus, erit cognita; simulque perspicitur, numerum omnium solutionum reuera esse infinitum, propterea quod curua E U F prorsus pro arbitrio describi potest.

§. 22. In hac igitur solutione elucet character principalis, quo omnia problemata circa functiones duarum variabilium, quae integrationem requirunt, distinguuntur, et qui in hoc consistit, vt integratio non solum quantitatem constantem, veluti in integrationibus communibus vsu venit, sed eius loco functionem adeo arbitrariam in calculum introducat, quae in nostra solutione per curuam E U F, pro lubitu ducendam repraesentatur. Quare cum haec insignis proprietas nondum satis a Geometris sit perpenfa, atque adeo a nonnullis in dubium vocetur, hoc problema maxime idoneum est visum ad grauissimam hanc veritatem extra omne dubium collocandam, propte-

propterea quod eadem solutio ex primis Geometriae elementis deduci potuisset.

Solutio synthetica eiusdem problematis.

Tab. II. §. 23. Cum circulus centro C radio $CN = CM$
Fig. 5. descriptus hanc habeat proprietatem, ut omnes normales ZC ad centrum C tendant, ideoque inter se sint aequales, manifestum est, si plures huiusmodi circuli ad planum tabulae perpendiculariter constituentur, in singulis omnes normales aequales fore. Tantum igitur superest, ut circuli illi continua serie ita disponantur, ut normales illae CZ etiam ad circulos proxime contiguos normales sint, id quod evenit, si centrum C in directione Cc , ad diametrum MN normali, super plano promoueat.

Fig. 6. §. 24. Huic autem conditioni manifesto satisfiet, si semicirculus ille MZN , ad planum tabulae perpendiculariter erectus, ita promoueat, ut eius centrum super curua quacunque $EU F$ protrahatur, ita ut eius diameter MN ad illam curuam $EU F$ perpetuo teneat situm normalem, siue ut recta MN vbique curuam in U ad angulos rectos fecet. Hoc enim modo peripheria istius circuli talem superficiem describet, cuius omnes normales, quae perpetuo ad ipsam curuam $EU F$ dirigentur, sint inter se aequales. Euidens autem est hanc constructionem cum praecedente solutione analytica profus conuenire.

§. 25. Iam obseruauimus curuam istam directricem $EU F$ penitus ab arbitrio nostro pendere, atque adeo ex pluribus partibus pro lubitu componi posse, quin etiam, vbicunque lubuerit, terminari poterit. Immo etiam in loco huius curuae vnicum

cum punctum assumi potest, cui si centrum circuli insistat, et interea circulus motu angulari circumferatur, orietur hemisphaerium, cuius utique omnes normales, utpote radii sphaerae, inter se erunt aequales.

§. 27. Si linea illa directrix E U F fuerit recta, et super ea centrum circuli plano tabulae perpetuo normaliter insistentis ita promoueatur, ut diameter M N ubique rectam E F normaliter traiciat, peripheria circuli describet superficiem cylindricam, quam problemati nostro satisfacere per se patet. At si recta M N in puncto F subito terminetur, postquam centrum circuli eo usque peruenerit, ibi quiescet, circulus autem motu angulari circumducetur, quo pacto cylindrus ille hic desinet in hemisphaerium semicirculo *min* insistens. Tab. II.
Fig. 7.

§. 28. Quodsi linea directrix E F etiam fuerit circulus, radio maiore quam A descriptus, et centrum circuli minoris super eius peripheria ita circumferatur, ut diameter M N ubique directricem normaliter traiciat, hoc modo generabitur corpus cylindrum quasi incuruatum referens, faciminis figuram mentientem, ac si termino cylindri incuruati uti velimus, affirmare licebit, omnia corpora problemati nostro satisfaciencia ad genus cylindrorum incuruatorum referri posse. Fig. 8.

Problema generalius.

Super dato plano eiusmodi solidum exstruere, ad cuius superficiem si in singulis punctis normales ducantur, eae ad eleuationem super plano relationem teneant quamcunque datam.

Solutio.

§. 29. Manentibus omnibus denominationibus, quibus supra vsi sumus, ita ut posito $\partial z = p \partial x + q \partial y$, normalis ad superficiem sit $Z N = z \sqrt{(1 + p p + q q)}$, haec normalis Fig. 2.

cum ante esse debuerat constans, nunc requiritur vt certae cuiusdam functioni datae altitudinis $YZ = z$ aequetur, quae ergo functio si statuatur $= Z$, solutio problematis hac continebitur aequatione: $z \sqrt{(1 + p p + q q)} = Z$.

§. 30. Ex hac igitur aequatione statim deducimus $p p + q q = \frac{Z^2 - z^2}{z^2}$; vnde si ponamus $p = \frac{\text{cof. } \Phi}{z} \sqrt{(Z^2 - z^2)}$, fiet $q = \frac{\text{sin. } \Phi}{z} \sqrt{(Z^2 - z^2)}$. Quare cum esse debeat $\partial z = p \partial x + q \partial y$, facta substitutione habebimus:

$$\partial z = \frac{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}{z} (\partial x \text{ cof. } \Phi + \partial y \text{ sin. } \Phi),$$

vnde colligitur

$$\frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}} = \partial x \text{ cof. } \Phi + \partial y \text{ sin. } \Phi,$$

vbi cum membrum sinistrum per se sit integrabile, quippe vnicam variabilem z inuoluens, etiam membrum dextrum per se integrabile reddendum est; vnde si differentialia ad elementum $\partial \Phi$ reducamus, nanciscemur, vt ante, hanc aequationem:

$$\int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}} = x \text{ cof. } \Phi + y \text{ sin. } \Phi + \int \partial \Phi (x \text{ sin. } \Phi - y \text{ cof. } \Phi).$$

§. 31. Necessè igitur est, vt formula $x \text{ sin. } \Phi - y \text{ cof. } \Phi$ sit functio vnus variabilis Φ , quae ponatur $= -\Phi$ vt sit $y \text{ cof. } \Phi - x \text{ sin. } \Phi = \Phi$. Deinde quia integrale $\int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$ vt cognitum spectare licet, eius loco scribamus litteram v , vt sit $v = \int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, et aequatio nostra hanc induet formam:

$$v = x \text{ cof. } \Phi + y \text{ sin. } \Phi - \int \Phi \partial \Phi, \text{ vnde fit}$$

$$x \text{ cof. } \Phi + y \text{ sin. } \Phi = v + \int \Phi \partial \Phi,$$

ex qua aequatione, cum illa: $y \text{ cof. } \Phi - x \text{ sin. } \Phi = \Phi$ combinata, deducuntur sequentes valores:

$$x = v \text{ cof. } \Phi + \text{cof. } \Phi \int \Phi \partial \Phi - \Phi \text{ sin. } \Phi \text{ et}$$

$$y = v \text{ sin. } \Phi + \text{sin. } \Phi \int \Phi \partial \Phi + \Phi \text{ cof. } \Phi,$$

ita

ita vt iam x et y per binas variables Φ et v exprimantur, dum tertia coordinata z per solam v definitur.

§. 32. Iam pariter, vt ante fecimus, loco variabilis Φ et quantitatum independentium Φ et $\int \Phi \partial \Phi$ introducamus quantitates t et u , ponendo

$$t = \cos. \Phi \int \Phi \partial \Phi - \Phi \sin. \Phi,$$

$$u = \sin. \Phi \int \Phi \partial \Phi + \Phi \cos. \Phi,$$

vnde cum sequatur, vt supra ostendimus, $\text{tang. } \Phi = -\frac{\partial t}{\partial u}$, angulus Φ iam per t et u dabitur; vnde nascuntur hae formulae:

$$x = t + v \cos. \Phi \quad \text{et} \quad y = u + v \sin. \Phi.$$

§. 33. Ad has formulas construendas describatur, prout Tab. II. Fig. 9. sus vt supra, super axe OA , curua quaecunq; pro lubitu EUF , siue continua, siue discontinua, cuius coordinatae sint $OT = t$ et $TU = u$, atque angulus TUF aequalis erit angulo nostro Φ , vnde si ad hanc curuam producat normalis SU , erit angulus $TUS = \Phi - 90^\circ$. Iam in normali SU producta capiatur interuallum $UV = v$, et demisso ex V ad axem OA perpendiculo VRX , ad idque normali UR , quia angulus $UVX = \Phi - 90^\circ$, in triangulo VUR habebimur:

$$UR = v \sin. (\Phi - 90^\circ) = -v \cos. \Phi,$$

$$VR = v \cos. (\Phi - 90^\circ) = v \sin. \Phi,$$

ex quibus colligitur $x = OT - UR$ et $y = UT + VR$, ficque patet fore $x = OX$ et $y = XV$; vnde singula puncta rectae UV praebent binas coordinatas in plano tabulae sumtas x et y .

§. 34. Quodsi ergo ex puncto V ad planum tabulae normaliter erigatur recta $VZ = z$, ita a v pendens, vt fit

Tab. II.
Fig. 10.

$v = \int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, erit punctum Z in ipsa superficie quam quaerimus, cuius sectio verticalis, secundum directionem UV facta, talem habebit figuram, vti aequatio $v = \int \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$ indicat, si quidem recta $UV = v$ eius abscissam, recta vero $VZ = z$ eius applicatam repraesentat, hincque figura semel descripta in situ perpendiculari secundum directricem $EU F$ ita promoti, vt eius axis UV perpetuo ad directricem maneat normalis, describet superficiem solidi problemati nostro satisficientis.

§. 35. Nihil aliud igitur superest, nisi vt figura curvae illius mobilis UZ , cuius abscissa $UV = v$ et applicata $VZ = z$, indagetur. Cum igitur sit $\partial v = \frac{z \partial z}{\sqrt{(Z^2 - z^2)}}$, si ad hanc curvam ducatur normalis ZN , erit subnormalis.

$$VN = \frac{z \partial z}{\partial v} = \sqrt{(Z^2 - z^2)},$$

ideoque ipsa normalis $NZ = Z$; vnde patet istam curuam eam ipsam esse in plano descriptam, cuius normalis ZN propositae functioni Z sit aequalis. Hac igitur curua descripta, eius promotio secundum directricem quamcunque ipsam superficiem, quam quaerimus, describet, si modo in hoc motu praecpta ante tradita obseruentur, atque axis initium U perpetuo iuxta directricem promoueatur. Caeterum omnia hic manifesto se perinde habent, vti in problemate priore sunt exposita, ita vt etiam hoc problema ex primis elementis Geometriae resolui potuisset, postquam scilicet descripta fuerit curua UZ ; quia deinceps per totam superficiem eadem habentur normales $NZ = Z$.

Additamentum.

§. 35. Quo clarius perspiciatur, quomodo curua illa perpetuo in situ verticali detinenda super plano horizontali promoueri debeat, contemplemur hic tantum eius Basin instar virgae

virgae rectae MN , plano horizontali incumbentis, quae ita Tab. II.
 promoveatur, vt pro eius singulis punctis directio motus Oo Fig. 11.
 ad ipsam virgam MN vbique sit normalis. Tali igitur motu,
 si celeritates in singulis punctis virgae fuerint inter se aequa-
 les, virga motu sibi parallelo proferetur; sin autem celeritas
 in termino M maior fuerit quam in altero termino N , vt post
 tempusculum infinite paruum perueniat in situm mn , eius
 motus erit angularis, factus circa punctum quodpiam fixum V ,
 in ipsa recta MN producta situm, quod punctum quouis mo-
 mento variari potest, dummodo perpetuo cum ipsa virga in
 directum iaceat.

§. 37. Huiusmodi igitur motu singula virgae puncta
 O certas curuas describent, quae inter se erunt parallelae, seu Fig. 12.
 communi euoluta praeditae. Ita si communis euoluta fue-
 rit curua AVB , circa quam filum, cum virga MN in dire-
 ctum annexum, sit circumuolutum et more solito euoluatur,
 hocque motu virga ex situ MN in situm mn perueniat:
 iste virgae motus vtique ita erit comparatus, vt singula eius
 puncta quouis momento secundum directiones ad situm virgae
 normales promoveantur. Ex quo vicissim euidentis est, virgae
 punctum quoduis O per datam curuam Oo promoueri posse,
 dummodo perpetuo ipsa virga mn situm teneat ad hanc cur-
 uam normalem; atque adeo hanc curuam Oo prorsus pro lu-
 bitu assumere licet, ita vt libero manus tractu quomodocun-
 que describi queat; in quo ipso consistit vera indoles omni-
 um huiusmodi problematum, quorum solutio integrationem
 functionum duarum variabilium inuoluit.

§. 38. Descripto igitur hoc motu, quo virgam su-
 per plano horizontali promoueri assumimus, si virga MN su-
 erit basis curuae cuiuscuque MUN , ad cuius punctum quod-
 vis U ducta sit normalis US , haecque figura perpetuo in situ
 M 3 verti-

Fig. 13.

verticali teneatur, dum eius basis MN , super plano horizontali tali mota, qualem descripsimus, vtcunque proferatur, hacque ratione superficies continua describi concipiatur: evidens est normalem US etiam ad ipsam superficiem in puncto U fore normalem, propterea quod motus puncti U fit iuxta directionem ad basin MN , ideoque etiam ad planum figurae normalem. Hinc igitur patet, quamcunque relationem normalis US ad applicatam UT tenuerit, eandem quoque proprietatem in totam superficiem hoc modo descriptam competere debere, atque in hoc consistit solutio supra data problematis generalis post §. 28. propositi.

Fig. 1.

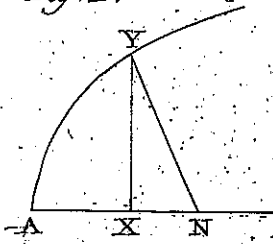


Fig. 2.

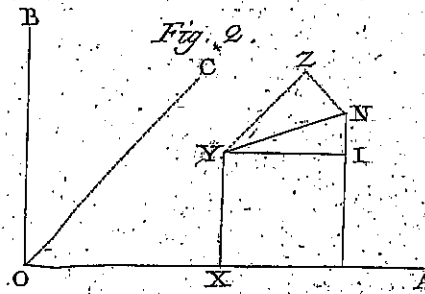


Fig. 3.

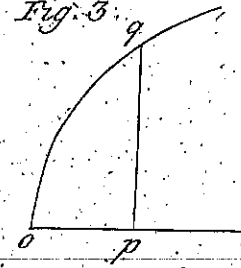


Fig. 4.

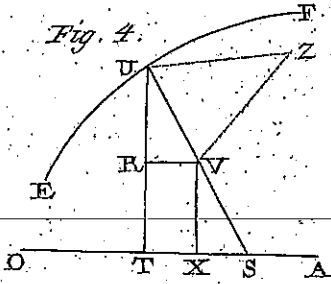


Fig. 5.

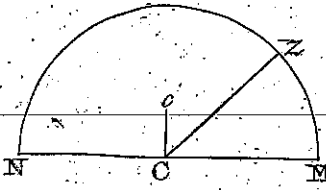


Fig. 6.

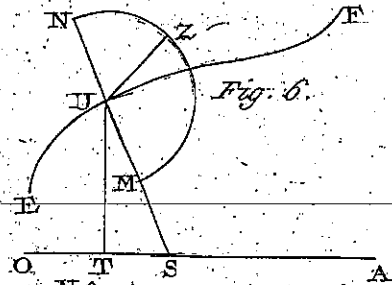


Fig. 7.

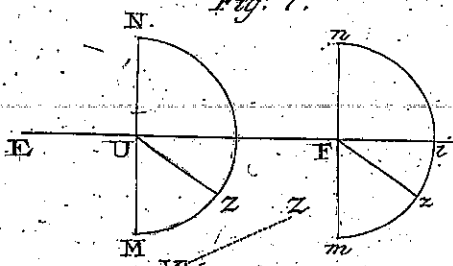


Fig. 8.

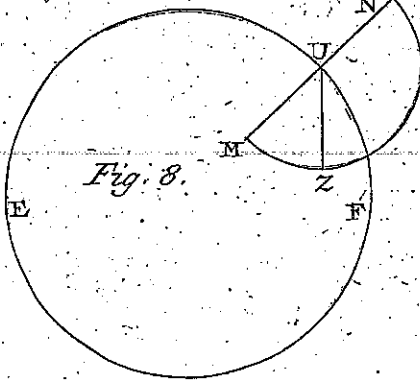


Fig. 10.

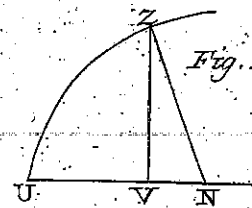


Fig. 9.

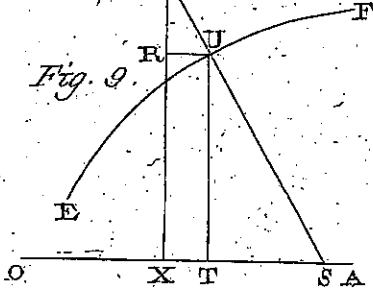


Fig. 11.

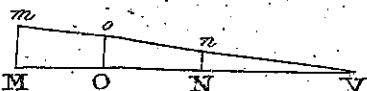


Fig. 12.

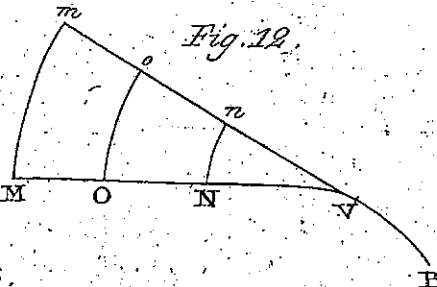


Fig. 13.

