1790

Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem

Leonhard Euler

METHODVS GENERALIS
INVESTIGANDI RADICES OMNIVM AEQVATIONVM PER APPROXIMATIONEM.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 25 *April.* 1776.

§. 1.

Sit Z quantitas incognita, cuius valor eruendus sit ex aequatione quacunque, quam semper sub forma $Z = 0$ exhibere licet, ita vt Z sit certa quaedam functio ipsius z. Quaeritur igitur eiusmodi valor determinatus, qui si loco z scribatur, tum ista functio Z reuera in nihilum sit abitura. Veluti si proposita fuerit haec aequatio: $z^3 = 3z + 2$, omnibus terminis ad eandem partem dispositis erit $z^3 - 3z - 2 = 0$, ideoque functio proposita $Z = z^3 - 3z - 2$. Quaeritur igitur eiusmodi valor, qui pro z substitutus istam functionem Z reuera nihilo aequalem reddat, id quod hoc casu fieri manifestum est, si sumatur $z = 2$.

§. 2. Sin autem proposita tali aequatione $Z = 0$ loco z alius quiuis valor, puta v scribatur, ex quo functio Z valorem accipiat $= V$, tum vtique non erit $V = 0$: si enim prodiret $V = 0$, hoc signum foret valorem v veram esse radicem z. Ita in exemplo allato $Z = z^3 - 3z - 2$, si loco z scribamus 3, vt sit $v = 3$, fiet $V = 16$, ideoque neutiquam $= 0$.

§. 3. Cum igitur, proposita aequatione $Z = 0$, si loco z scribatur valor quicunque v, vnde fiat $Z = V$, non sit $V = 0$, po-

ponamus esse $V = y$, eritque y functio quaedam cognita ipsius v, quae in nihilum esset abitura, si pro v verus valor radicis z acciperetur.

§. 4. Cum igitur $y = V$ sit functio quaedam ipsius v, certa curua concipi potest, cuius abscissae $= v$ respondeat applicata $= y$. Permutatis igitur coordinatis, vt iam y exhibeat abscissam et v applicatam, ista applicata v vicissim spectari poterit tanquam certa functio ipsius y, quae ergo ita erit comparata, vt si capiatur $y = 0$, tum ista applicata v ipsi radici quaesitae z euadat aequalis, sicque tota quaestio huc redit: quemnam valorem ista ipsius y functio, scilicet v, sit acceptura, si loco y scribatur o? tum enim iste valor ipsius v veram praebebit radicem z.

§. 5. Quoniam igitur v spectamus vt functionem ipsius y, ponamus more iam generaliter recepto $v = \Gamma : y$, atque ex natura differentialium notum est fore

$$\Gamma : (y + a) = \Gamma : y + \frac{a \partial . \Gamma : y}{\partial y} + \frac{a a \partial^2 . \Gamma : y}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 . \Gamma : y}{1.2.3. \partial y^3} + \text{etc.}$$

ideoque loco $\Gamma : y$ scribendo v habebimus

$$\Gamma : (y + a) = v + \frac{a \partial v}{\partial y} + \frac{a a \partial \partial v}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 v}{1.2.3. \partial y^3} + \frac{a^4 \partial^4 v}{1.2.3.4. \partial y^4} + \text{etc.}$$

in qua expressione elementum ∂y pro constanti accipitur. Siue cum v sit functio ipsius y, si statuamus $\frac{\partial v}{\partial y} = p$; $\frac{\partial p}{\partial y} = q$; $\frac{\partial q}{\partial y} = r$; $\frac{\partial r}{\partial y} = s$; sicque vlterius in infinitum, adipiscemur per quantitates finitas

$$\Gamma : (y + a) = v + a p + \tfrac{1}{2} a a q + \tfrac{1}{6} a^3 r + \tfrac{1}{24} a^4 s + \tfrac{1}{120} a^5 t + \text{etc.}$$

§. 6. Quia hic loco a quantitates quascunque assumere licet, sumamus $a = -y$, atque $\Gamma : (y + a)$ eam functionem nobis exhibebit, quae ex forma $\Gamma : y$ resultabit, si loco y scribatur $y + a$, hoc est $y - y = 0$. Vidimus autem tum v in ip-

 sam

sam radicem quaesitam z abire, ita vt sit $z = \Gamma : (y - y)$; quocirca, si in serie inuenta loco a scribamus $-y$, reperiemus

$$z = v - py + \tfrac{1}{2}qyy - \tfrac{1}{6}ry^3 + \tfrac{1}{24}sy^4 - \tfrac{1}{120}ty^5 + \text{etc.}$$

§. 7. Quo hanc seriem ad vsum magis accommodatam reddamus, quantitatem y inde penitus excludamus. Cum enim sit $y = V$ et V functio cognita ipsius v, ex eius indole habemus statim $p = \frac{\partial v}{\partial V}$, quo valore inuento erit porro $q = \frac{\partial p}{\partial V}$, hincque vlterius $r = \frac{\partial q}{\partial V}$; $s = \frac{\partial r}{\partial V}$, et ita porro in infinitum. Quibus obseruatis pro radice quaesita sequentem impetrabimus seriem infinitam:

$$z = v - pV + \tfrac{1}{2}qV^2 - \tfrac{1}{6}rV^3 + \tfrac{1}{24}sV^4 - \tfrac{1}{120}tV^5 + \text{etc.}$$

Huius autem seriei vsum aliquot exemplis illustrare operae erit pretium.

Exemplum I.

§. 8. Proposita sit haec aequatio quadratica: $zz = a$, ita vt series quaeratur, quae aequalis sit ipsi $z = \sqrt{a}$. Hic igitur erit $Z = zz - a$, hincque loco z scribendo v erit $V = vv - a$, ideoque $\partial V = 2v\,\partial v$. Hinc igitur sequentes definiantur valores:

$$p = \frac{1}{2v};\quad q = -\frac{1}{4v^3};\quad r = \frac{3}{8v^5};\quad s = -\frac{3.5}{16v^7};\quad t = \frac{3.5.7}{32v^9};\ \text{etc.}$$

quibus inuentis pro radice quaesita habebimus

$$\sqrt{a} = v - \frac{(vv-a)}{2v} - \frac{(vv-a)^2}{2.4.v^3} - \frac{3(vv-a)^3}{6.8.v^5} - \frac{3.5.(vv-a)^4}{24.16.v^7} - \frac{3.5.7.(vv-a)^5}{120.32.v^9} - \text{etc.}$$

Quodsi ergo aequationi propositae hanc tribuamus formam: $zz = bb + c$, ita vt sit $z = \sqrt{(bb+c)}$, loco a vbique scribi debebit $bb + c$. Tum vero quia quantitas v ab arbitrio nostro pendet, sumamus $v = b$, vnde fiet $vv - a = -c$, quo

quo facto radix quaesita erit

$$\sqrt{(b\,b+c)} = b + \frac{c}{2\,b} - \frac{c\,c}{2.4.b^5} + \frac{3\,c^3}{6.\,8.\,b^5} - \frac{3.5\,c^4}{24.\,16.\,b^7} + \frac{3.5.7\,c^5}{120.\,32\,b^9} - \text{etc.}$$

eadem series, quae per extractionem radicis, ex euolutione binomii, obtinetur. Quodsi igitur quaeratur $\sqrt{10}$, sumatur $b=3$ & $c=1$, vnde colligitur

$$\sqrt{10} = 3 + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{226} + \tfrac{1}{3888} - \text{etc.}$$

Cum igitur propemodum sit $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6}$, series multo magis conuergens eruetur, ponendo $b = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$; tum autem erit $c = -\frac{1}{36}$, vnde per solos duos priores terminos reperietur

$$\sqrt{10} = 3\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{12.19} = 3 \cdot \tfrac{37}{228},$$

cuius quadratum tam prope ad 10 accedit, vt error tantum sit $\frac{1}{51984}$.

Exemplum II.

§. 9. Proposita sit haec aequatio: $z^n = a$, ita vt quaeratur $z = \sqrt[n]{a}$. Erit ergo $Z = z^n - a$, ideoque $V = v^n - a$ et $\partial V = n\,v^{n-1}\,\partial v$; quare litterae illae p, q, r, s, etc. sequenti modo determinabuntur:

$$p = \frac{1}{n\,v^{n-1}};\quad q = -\frac{(n-1)}{n\,n\,v^{2n-1}};\quad r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3\,v^{3n-1}};$$

$$s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4\,v^{4n-1}};\ \text{etc.}$$

quibus valoribus substitutis radix quaesita erit

$$z = \sqrt[n]{a} = v - \frac{(v^n - a)}{n\,v^{n-1}} - \frac{(n-1)(v^n-a)^2}{2\,n\,n\,v^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(v^n-a)^3}{6\,n^3\,v^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(v^n-a)^4}{24\,n^4\,v^{4n-1}} - \text{etc.}$$

Haec

Haec ſcilicet ſeries ſemper eundem valorem exprimet, quicunque numerus loco v accipiatur, quippe qui penitus arbitrio noſtro relinquitur. Eo promptius autem iſta ſeries ad veritatem appropinquabit, quo minus poteſtas v^n a numero a diſcrepat.

Quodſi ergo fuerit $a = b^n + c$, conueniet ſumi $v = b$, tum enim erit $v^n - a = -c$ et ſeries radicem quaeſitam exprimens erit

$$\sqrt[n]{(b^n + c)} = b + \frac{c}{n b^{n-1}} - \frac{(n-1) c c}{2 n n b^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1) c^3}{6 n^3 b^{3n-1}}$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1) c^4}{24 n^4 b^{4n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1) c^5}{120 n^5 b^{5n-1}} \text{ etc.}$$

quae ſeries etiam reperitur ex euolutione huius binomii $(b^n + c)^{\frac{1}{n}}$.

Exemplum III.

§. 10. Propoſita hac aequatione: $z^3 = z - 1$, inuenire ſeriem, quae valorem radicis z exhibeat? Hic ergo erit $Z = z^3 - z + 1$, ideoque $V = v^3 - v + 1$, vnde fit $\partial V = \partial v (3 v v - 1)$; quamobrem habebimus,

$$p = \frac{1}{3 v v - 1};$$
$$q = - \frac{6 v}{(3 v v - 1)^3};$$
$$r = \frac{6 (15 v v + 1)}{(3 v v - 1)^5};$$
$$s = - \frac{36 v (6 v v + 1)}{(3 v v - 1)^7};$$
etc.

His igitur valoribus ſubſtitutis colligetur:

$$z = \sqrt[3]{(z - 1)} = v - \frac{(v^3 - v + 1)}{3 v v - 1} - \frac{3 v (v^3 - v + 1)^2}{(3 v v - 1)^3}$$
$$- \frac{(15 v v + 1)(v^3 - v + 1)^3}{(3 v v - 1)^5} - \frac{15 v (6 v v + 1)(v^3 - v + 1)^4}{(3 v v - 1)^7} - \text{etc.}$$

vbi

vbi iterum quantitas v pro lubitu assumi potest; conueniet autem eam ita accipi, vt parum a valore radicis z discrepet. Ita si sumamus $v = 1$, prodit $v^3 - v + 1 = 1$ et $3vv - 1 = 2$, vnde fit $z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$, qui autem valor ad veritatem parum accedit.

§. 11. Ex hoc autem exemplo patet, approximationem vix succedere, nisi valor radici z proximus accipiatur, tum autem methodus vulgaris negotium multo commodius conficit. Interim tamen series hac methodo inuentae maxime sunt memorabiles, quoniam in infinitum continuatae semper eundem valorem pro z exhibent, quicunque numerus pro v fuerit assumtus. Imprimis autem haec methodus omnem attentionem meretur, quod non solum series exhibeat pro ipsa radice, sed etiam pro quibusuis eius potestatibus, id quod sequenti problemate ostendetur.

Problema.

Proposita aequatione quacunque, quae sit $Z = 0$, vbi Z sit functio quaecunque ipsius z, inuenire seriem infinitam, quae non solum ipsam radicem z, sed etiam eius potestatem quamcunque z^n exprimat.

Solutio.

§. 12. Ratiocinium instituatur vt ante, scilicet loco z scribatur quantitas quaecunque v, vnde Z abeat in V; et quatenus v non est radix aequationis propositae, eatenus V non in nihilum abibit. Ponamus igitur, vt supra, $V = y$, & etiam v spectari poterit vt functio ipsius y, quae ergo ita erit comparata, vt casu, quo ponitur $y = 0$, fiat $v = z$, quandoquidem hoc casu erit v vera aequationis radix.

§. 13. Simili vero modo etiam poteſtas v^n ſpectari poterit tanquam functio ipſius y, quae ergo, quando fit $y=o$, ſiue quando loco y ſcribitur $y-y$, nobis largietur valorem poteſtatis quaeſitae z^n, quocirca, vt ſupra oſtendimus, erit

$$z^n = v^n - \frac{y\,\partial\,.\,v^n}{\partial y} + \frac{y.y\,\partial^2\,.\,v^n}{2\,\partial y^2} - \frac{y^3\,\partial^3\,.\,v^n}{2.3.\partial y^3} + \frac{y^4\,\partial^4\,.\,v^n}{2.3.4.\partial y^4} - \text{etc.}$$

Hinc quia $y=V$, erit

$$z^n = v^n - \frac{V\,\partial\,.\,v^n}{\partial V} + \frac{V^2\,\partial^2\,.\,v^n}{2\,\partial V^2} - \frac{V^3\,\partial^3\,.\,v^n}{2.3.\partial V^3} + \frac{V^4\,\partial^4\,.\,v^n}{2.3.4.\partial V^4} - \text{etc.}$$

§. 14. Vt iam hanc ſeriem a differentialibus liberemus, ſtatuamus $P = \frac{\partial\,.\,v^n}{\partial V} = \frac{n\,v^{n-1}\,\partial v}{\partial V}$; hincque porro formentur ſequentes valores;

$$Q = \tfrac{\partial P}{\partial V};\ R = \tfrac{\partial Q}{\partial V};\ S = \tfrac{\partial R}{\partial V};\ T = \tfrac{\partial S}{\partial V};\ \text{etc.}$$

quibus valoribus inuentis ſeries quaeſita poteſtatem z^n exprimens erit

$$z^n = v^n - VP + \tfrac{1}{2}V^2 Q - \tfrac{1}{6}V^3 R + \tfrac{1}{24}V^4 S - \tfrac{1}{120}V^5 T + \text{etc.}$$

vbi notandum eſt, poſtquam omnes iſti termini per v fuerint euoluti, tum loco v omnes plane quantitates aſſumi poſſe, ita vt nihilominus ſemper idem valor poteſtatis z^n inde reſultet.

§. 15. Cum iſta ſeries exprimat valorem ipſius z^n, poſito $n=o$ ſeries noſtra praebere debet vnitatem, id quod de primo termino v^o per ſe eſt perſpicuum; deinde quia littera P factorem habet n, etiam omnes ſequentes litterae per eundem exponentem n erunt multiplicatae, ſicque poſito $n=o$ omnes ſeriei huius termini ſequentes ſponte euaneſcent.

§. 18.

§. 16. Hoc obseruato praeter omnes potestates ipsius z etiam eius logarithmum hyperbolicum, scilicet lz, per huiusmodi seriem infinitam exhibere poterimus. Cum enim seriei inuentae omnes termini, post primum, factorem habeant n, eorum loco scribamus $n\,\Omega$, vt fit $z^n = v^n + n\,\Omega$, hincque porro $\Omega = \frac{z^n - v^n}{n}$, cuius aequationis differentiale erit

$$\partial\,\Omega = z^{n-1}\,\partial z - v^{n-1}\,\partial v,$$

sicque casu $n = 0$ erit $\partial\,\Omega = \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial v}{v}$, quae aequatio integrata praebet $\Omega = l\frac{z}{v}$, vnde colligimus $l\,z = l\,v + \Omega$, postquam scilicet in omnibus terminis, quibus Ω componitur, positum fuerit $n = 0$.

§. 17. Quodsi ergo Ω summam omnium terminorum casu $n = 0$ denotet, vti assumsimus, ad numeros regrediendo, si e denotet eum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $z = v\,e^{\Omega}$, ergo $z = v^n\,e^{n\,\Omega}$. Hinc autem, si formula exponentialis $e^{n\,\Omega}$ more solito in seriem infinitam conuertatur, orietur

$$z^n = v^n\,(1 + n\,\Omega + \tfrac{1}{2}\,n\,n\,\Omega^2 + \tfrac{1}{5}\,n^3\,\Omega^3 + \tfrac{1}{24}\,n^4\,\Omega^4 + \text{etc.})$$

Quae ergo series illi, quae ante est inuenta, aequalis esse debet. Quin adeo necesse est, vt facta euolutione litterae Ω ipsa series ante inuenta prodeat, id quod exemplo declarasse iuuabit.

Exemplum.

§. 18. Proposita aequatione $z^\lambda = a$, inuenire seriem tam pro alia quauis potestate z^n quam pro eius logarithmo hyperbolico? Hic ergo habebimus $Z = z^\lambda - a$, ideoque $V = v^\lambda - a$, ex quo fit $\partial\,V = \lambda\,v^{\lambda-1}\,\partial v$. Hinc iam litterae ante introductae P, Q, R, etc. sequenti modo determinabuntur:

P =

$$P = \frac{n}{\lambda} v^{n-\lambda};$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-2\lambda};$$

$$R = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-3\lambda};$$

$$S = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-4\lambda}; \text{ etc.}$$

quibus valoribus fubftitutis feries defiderata erit

$$z^n = v^n - \frac{n}{\lambda} \cdot v^{n-\lambda} (v^\lambda - a) + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot v^{n-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot \frac{(n-2\lambda)}{3\lambda} v^{n-3\lambda} (v^\lambda - a)^3$$
$$+ \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{3\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{4\lambda} \cdot v^{n-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{ etc.}$$

Pofito hic $n = 0$ erit

$$l z = l v - \frac{1}{\lambda} v^{-\lambda} (v^\lambda - a) - \frac{1}{2\lambda} v^{-2\lambda} (v^\lambda - a)^2$$
$$- \frac{1}{3\lambda} v^{-3\lambda} (v^\lambda - a)^3 - \frac{1}{4\lambda} v^{-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.}$$