



1790

## Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem" (1790). *Euler Archive - All Works*. 643.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/643>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

METHODVS GENERALIS  
INVESTIGANDI RADICES OMNIVM AEQVATIONVM  
PER APPROXIMATIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

---

Conuent. exhib. die 25 April. 1776.

---

§. 1.

Sit  $Z$  quantitas incognita, cuius valor eruendus fit ex aequatione quacunque, quam semper sub forma  $Z = 0$  exhibere licet, ita vt  $Z$  fit certa quaedam functio ipsius  $z$ . Quaeritur igitur eiusmodi valor determinatus, qui si loco  $z$  scribatur, tum ista functio  $Z$  reuera in nihilum fit abiitura. Veluti si proposita fuerit haec aequatio:  $z^3 = 3z + 2$ , omnibus terminis ad eandem partem dispositis erit  $z^3 - 3z - 2 = 0$ , ideoque functio proposita  $Z = z^3 - 3z - 2$ . Quaeritur igitur eiusmodi valor, qui pro  $z$  substitutus istam functionem  $Z$  reuera nihilo aequalem reddat, id quod hoc casu fieri manifestum est, si sumatur  $z = 2$ .

§. 2. Sin autem proposita tali aequatione  $Z = 0$  loco  $z$  alius quivis valor, puta  $v$  scribatur, ex quo functio  $Z$  valorem accipiat  $= V$ , tum utique non erit  $V = 0$ : si enim prodiret  $V = 0$ , hoc signum foret valorem  $v$  veram esse radicem  $z$ . Ita in exemplo allato  $Z = z^3 - 3z - 2$ , si loco  $z$  scribamus  $3$ , vt fit  $v = 3$ , fiet  $V = 16$ , ideoque neutiquam  $= 0$ .

§. 3. Cum igitur, proposita aequatione  $Z = 0$ , si loco  $z$  scribatur valor quicunque  $v$ , vnde fiat  $Z = V$ , non fit  $V = 0$ ,  
po-

ponamus esse  $V = y$ , eritque  $y$  functio quaedam cognita ipsius  $v$ , quae in nihilum esset abitura, si pro  $v$  verus valor radicitis  $z$  acciperetur.

§. 4. Cum igitur  $y = V$  fit functio quaedam ipsius  $v$ , certa curua concipi potest, cuius abscissae  $= v$  respondeat applicata  $= y$ . Permutatis igitur coordinatis, ut iam  $y$  exhibeat abscissam et  $v$  applicatam, ista applicata  $v$  vicissim spectari poterit tanquam certa functio ipsius  $y$ , quae ergo ita erit comparata, ut si capiatur  $y = 0$ , tum ista applicata  $v$  ipsi radici quaesitae  $z$  euadat aequalis, sicque tota quaestio huc redit: quemnam valorem ista ipsius  $y$  functio, scilicet  $v$ , sit acceptura, si loco  $y$  scribatur  $0$ ? tum enim iste valor ipsius  $v$  veram praebit radicem  $z$ .

§. 5. Quoniam igitur  $v$  spectamus ut functionem ipsius  $y$ , ponamus more iam generaliter recepto  $v = \Gamma : y$ , atque ex natura differentialium notum est fore

$$\Gamma : (y + a) = \Gamma : y + \frac{a \partial \Gamma : y}{\partial y} + \frac{a a \partial^2 \Gamma : y}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 \Gamma : y}{1.2.3. \partial y^3} + \text{etc.}$$

ideoque loco  $\Gamma : y$  scribendo  $v$  habebimus

$$\Gamma : (y + a) = v + \frac{a \partial v}{\partial y} + \frac{a a \partial \partial v}{1.2. \partial y^2} + \frac{a^3 \partial^3 v}{1.2.3. \partial y^3} + \frac{a^4 \partial^4 v}{1.2.3.4. \partial y^4} + \text{etc.}$$

in qua expressione elementum  $\partial y$  pro constanti accipitur. Siue cum  $v$  sit functio ipsius  $y$ , si statuamus  $\frac{\partial v}{\partial y} = p$ ;  $\frac{\partial p}{\partial y} = q$ ;  $\frac{\partial q}{\partial y} = r$ ;  $\frac{\partial r}{\partial y} = s$ ; sicque ulterius in infinitum, adipiscemur per quantitates finitas

$$\Gamma : (y + a) = v + a p + \frac{1}{2} a a q + \frac{1}{6} a^3 r + \frac{1}{24} a^4 s + \frac{1}{120} a^5 t + \text{etc.}$$

§. 6. Quia hic loco  $a$  quantitates quascunque assumere licet, sumamus  $a = -y$ , atque  $\Gamma : (y + a)$  eam functionem nobis exhibebit, quae ex forma  $\Gamma : y$  resultabit, si loco  $y$  scribatur  $y + a$ , hoc est  $y - y = 0$ . Vidimus autem tum  $v$  in ip-

fam radicem quaesitam  $z$  abire, ita vt fit  $z = \Gamma : (y - y)$ ; quocirca, si in serie inuenta loco  $a$  scribamus  $-y$ , reperiemus

$$z = v - py + \frac{1}{2}qyy - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{etc.}$$

§. 7. Quo hanc seriem ad vsum magis accommodatam reddamus, quantitatem  $y$  inde penitus excludamus. Cum enim fit  $y = V$  et  $V$  functio cognita ipsius  $v$ , ex eius indole habemus statim  $p = \frac{\partial v}{\partial V}$ , quo valore inuento erit porro  $q = \frac{\partial p}{\partial V}$ , hincque vltcrius  $r = \frac{\partial q}{\partial V}$ ;  $s = \frac{\partial r}{\partial V}$ , et ita porro in infinitum. Quibus obseruatis pro radice quaesita sequentem impetrabimus seriem infinitam:

$$z = v - pV + \frac{1}{2}qV^2 - \frac{1}{6}rV^3 + \frac{1}{24}sV^4 - \frac{1}{120}tV^5 + \text{etc.}$$

Huius autem seriei vsum aliquot exemplis illustrare operae erit pretium.

### Exemplum I.

§. 8. Proposita fit haec aequatio quadratica:  $zz = a$ , ita vt series quaeratur, quae aequalis fit ipsi  $z = \sqrt{a}$ . Hic igitur erit  $Z = zz - a$ , hincque loco  $z$  scribendo  $v$  erit  $V = vv - a$ , ideoque  $\partial V = 2v \partial v$ . Hinc igitur sequentes definiantur valores:

$$p = \frac{1}{2v}; \quad q = -\frac{1}{4v^3}; \quad r = \frac{3}{8v^5}; \quad s = -\frac{3 \cdot 5}{16v^7}; \quad t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{32v^9}; \quad \text{etc.}$$

quibus inuentis pro radice quaesita habebimus

$$\sqrt{a} = v - \frac{(vv - a)}{2v} + \frac{(vv - a)^2}{2 \cdot 4 \cdot v^3} - \frac{3(vv - a)^3}{6 \cdot 8 \cdot v^5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot (vv - a)^4}{24 \cdot 16 \cdot v^7} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (vv - a)^5}{120 \cdot 32 \cdot v^9} + \text{etc.}$$

Quodsi ergo aequationi propositae hanc tribuamus formam:  $zz = bb + c$ , ita vt fit  $z = \sqrt{bb + c}$ , loco  $a$  vbique scribi debet  $bb + c$ . Tum vero quia quantitas  $v$  ab arbitrio nostro pendet, sumamus  $v = b$ , vnde fiet  $vv - a = -c$ , quo

quo facto radix quaesita erit

$$\sqrt{bb+c} = b + \frac{c}{2b} - \frac{cc}{2 \cdot 4 \cdot b^3} + \frac{3c^3}{6 \cdot 8 \cdot b^5} - \frac{3 \cdot 3 \cdot c^4}{24 \cdot 16 \cdot b^7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot c^5}{120 \cdot 32 \cdot b^9} - \text{etc.}$$

eadem series, quae per extractionem radice, ex evolutione binomii, obtinetur. Quodsi igitur quaeratur  $\sqrt{10}$ , sumatur  $b=3$  &  $c=1$ , vnde colligitur

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{225} + \frac{1}{3888} - \text{etc.}$$

Cum igitur propemodum fit  $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6}$ , series multo magis conuergens eruetur, ponendo  $b=3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$ ; tum autem erit  $c = -\frac{1}{36}$ , vnde per solos duos priores terminos reperietur

$$\sqrt{10} = 3\frac{1}{6} - \frac{1}{12 \cdot 19} = 3 \cdot \frac{37}{228},$$

cuius quadratum tam prope ad 10 accedit, vt error tantum fit  $\frac{1}{31984}$ .

### Exemplum II.

§. 9. Proposita sit haec aequatio:  $z^n = a$ , ita vt quaeratur  $z = \sqrt[n]{a}$ . Erit ergo  $Z = z^n - a$ , ideoque  $V = v^n - a$  et  $\partial V = n v^{n-1} \partial v$ ; quare litterae illae  $p, q, r, s$ , etc. sequenti modo determinabuntur:

$$p = \frac{1}{n v^{n-1}}; \quad q = -\frac{(n-1)}{n n v^{2n-1}}; \quad r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 v^{3n-1}};$$

$$s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 v^{4n-1}}; \quad \text{etc.}$$

quibus valoribus substitutis radix quaesita erit

$$z = \sqrt[n]{a} = v - \frac{(v^n - a)}{n v^{n-1}} - \frac{(n-1)(v^n - a)^2}{2 n n v^{2n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(v^n - a)^3}{6 n^3 v^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(v^n - a)^4}{24 n^4 v^{4n-1}} - \text{etc.}$$

Haec scilicet series semper eundem valorem exprimet, quicumque numerus loco  $v$  accipiatur, quippe qui penitus arbitrio nostro relinquitur. Eo promptius autem ista series ad veritatem appropinquabit, quo minus potestas  $v^n$  a numero  $a$  discrepat.

Quodsi ergo fuerit  $a = b^n + c$ , conueniet sumi  $v = b$ , tum enim erit  $v^n - a = -c$  et series radicem quaesitam exprimens erit

$$\sqrt[n]{(b^n + c)} = b + \frac{c}{nb^{n-1}} - \frac{(n-1)cc}{2nnb^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)c^2}{6n^3b^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)c^3}{24n^4b^{4n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)c^4}{120n^5b^{5n-1}} \text{ etc.}$$

quae series etiam reperitur ex evolutione huius binomii  $(b^n + c)^{\frac{1}{n}}$ .

### Exemplum III.

§. 10. Proposita hac aequatione:  $z^3 = z - 1$ , inuenire seriem, quae valorem radicis  $z$  exhibeat? Hic ergo erit  $Z = z^3 - z + 1$ , ideoque  $V = v^3 - v + 1$ , vnde fit  $\partial V = \partial v(3vv - 1)$ ; quamobrem habebimus,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3vv-1}; \\ q &= -\frac{6v}{(3vv-1)^2}; \\ r &= \frac{6(15vv+1)}{(3vv-1)^3}; \\ s &= -\frac{36v(6vv+1)}{(3vv-1)^4}; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

His igitur valoribus substitutis colligetur:

$$z = \sqrt[3]{(z-1)} = v - \frac{(v^3-v+1)}{3vv-1} - \frac{3v(v^3-v+1)^2}{(3vv-1)^2} - \frac{15vv(1)(v^3-v+1)^3}{(3vv-1)^3} - \frac{15v(6vv+1)(v^3-v+1)^4}{(3vv-1)^4} \text{ etc.}$$

vbi

vbi iterum quantitas  $v$  pro lubitu assumi potest; conueniet autem eam ita accipi, vt parum a valore radice  $z$  discrepet. Ita si sumamus  $v = 1$ , prodit  $v^3 - v + 1 = 1$  et  $3vv - 1 = 2$ , vnde fit  $z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$ , qui autem valor ad veritatem parum accedit.

§. 11. Ex hoc autem exemplo patet, approximationem vix succedere, nisi valor radice  $z$  proximus accipiatur, tum autem methodus vulgaris negotium multo commodius conficit. Interim tamen series hac methodo inuentae maxime sunt memorabiles, quoniam in infinitum continuatae semper eundem valorem pro  $z$  exhibent, quicumque numerus pro  $v$  fuerit assumtus. Imprimis autem haec methodus omnem attentionem meretur, quod non solum series exhibeat pro ipsa radice, sed etiam pro quibusuis eius potestatibus, id quod sequenti problemate ostendetur.

### Problema.

*Proposita aequatione quacunque, quae sit  $Z = 0$ , vbi  $Z$  sit functio quaecunque ipsius  $z$ , inuenire seriem infinitam, quae non solum ipsam radicem  $z$ , sed etiam eius potestatem quamcunque  $z^n$  exprimat.*

### Solutio.

§. 12. Ratiocinium instituatut vt ante, scilicet loco  $z$  scribatur quantitas quaecunque  $v$ , vnde  $Z$  abeat in  $V$ ; et quatenus  $v$  non est radix aequationis propositae, eatenus  $V$  non in nihilum abibit. Ponamus igitur, vt supra,  $V = y$ , & etiam  $v$  spectari poterit vt functio ipsius  $y$ , quae ergo ita erit comparata, vt casu, quo ponitur  $y = 0$ , fiat  $v = z$ , quandoquidem hoc casu erit  $v$  vera aequationis radix.

§. 13. Simili vero modo etiam potestas  $v^n$  spectari poterit tanquam functio ipsius  $y$ , quae ergo, quando fit  $y = 0$ , siue quando loco  $y$  scribitur  $y - y$ , nobis largietur valorem potestatis quaesitae  $z^n$ , quocirca, ut supra ostendimus, erit

$$z^n = v^n - \frac{y \partial \cdot v^n}{\partial y} + \frac{y \cdot y \partial^2 \cdot v^n}{2 \partial y^2} - \frac{y^3 \partial^3 \cdot v^n}{2 \cdot 3 \cdot \partial y^3} + \frac{y^4 \partial^4 \cdot v^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \partial y^4} - \text{etc.}$$

Hinc quia  $y = V$ , erit

$$z^n = v^n - \frac{V \partial \cdot v^n}{\partial V} + \frac{V^2 \partial^2 \cdot v^n}{2 \partial V^2} - \frac{V^3 \partial^3 \cdot v^n}{2 \cdot 3 \cdot \partial V^3} + \frac{V^4 \partial^4 \cdot v^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \partial V^4} - \text{etc.}$$

§. 14. Ut iam hanc seriem a differentialibus liberemus, statuamus  $P = \frac{\partial \cdot v^n}{\partial V} = \frac{n v^{n-1} \partial v}{\partial V}$ ; hincque porro formantur sequentes valores;

$$Q = \frac{\partial P}{\partial V}; R = \frac{\partial Q}{\partial V}; S = \frac{\partial R}{\partial V}; T = \frac{\partial S}{\partial V}; \text{etc.}$$

quibus valoribus inuentis series quaesita potestatem  $z^n$  exprimens erit

$$z^n = v^n - V P + \frac{1}{2} V^2 Q - \frac{1}{6} V^3 R + \frac{1}{24} V^4 S - \frac{1}{120} V^5 T + \text{etc.}$$

vbi notandum est, postquam omnes isti termini per  $v$  fuerint euoluti, tum loco  $v$  omnes plane quantitates assumi posse, ita ut nihilominus semper idem valor potestatis  $z^n$  inde resultet.

§. 15. Cum ista series exprimat valorem ipsius  $z^n$ , posito  $n = 0$  series nostra praebere debet unitatem, id quod de primo termino  $v^0$  per se est perspicuum; deinde quia littera  $P$  factorem habet  $n$ , etiam omnes sequentes litterae per eundem exponentem  $n$  erunt multiplicatae, sicque posito  $n = 0$  omnes seriei huius termini sequentes sponte euanescunt.



§. 16. Hoc obseruato praeter omnes potestates ipsius  $z$  etiam eius logarithmum hyperbolicum, scilicet  $lz$ , per huiusmodi seriem infinitam exhibere poterimus. Cum enim seriei inuentae omnes termini, post primum, factorem habeant  $n$ , eorum loco scribamus  $n\Omega$ , vt fit  $z^n = v^n + n\Omega$ , hincque porro  $\Omega = \frac{z^n - v^n}{n}$ , cuius aequationis differentiale erit

$$\partial \Omega = z^{n-1} \partial z - v^{n-1} \partial v,$$

ficque casu  $n = 0$  erit  $\partial \Omega = \frac{\partial z}{z} - \frac{\partial v}{v}$ , quae aequatio integrata praebet  $\Omega = l\frac{z}{v}$ , vnde colligimus  $lz = lv + \Omega$ , postquam scilicet in omnibus terminis, quibus  $\Omega$  componitur, positum fuerit  $n = 0$ .

§. 17. Quodsi ergo  $\Omega$  summam omnium terminorum casu  $n = 0$  denotet, vti assumimus, ad numeros regrediendo, si  $e$  denotet eum numerum, cuius logarithmus hyperbolicus  $= 1$ , erit  $z = v e^\Omega$ , ergo  $z = v^n e^{n\Omega}$ . Hinc autem, si formula exponentialis  $e^{n\Omega}$  more solito in seriem infinitam conuertatur, orietur

$$z^n = v^n \left( 1 + n\Omega + \frac{1}{2} n n \Omega^2 + \frac{1}{6} n^3 \Omega^3 + \frac{1}{24} n^4 \Omega^4 + \text{etc.} \right)$$

Quae ergo series illi, quae ante est inuenta, aequalis esse debet. Quin adeo necesse est, vt facta euolutione litterae  $\Omega$  ipsa series ante inuenta prodeat, id quod exemplo declarasse iuuabit.

### Exemplum.

§. 18. Proposita aequatione  $z^\lambda = a$ , inuenire seriem tam pro alia quavis potestate  $z^n$  quam pro eius logarithmo hyperbolico? Hic ergo habebimus  $Z = z^\lambda - a$ , ideoque  $V = v^\lambda - a$ , ex quo fit  $\partial V = \lambda v^{\lambda-1} \partial v$ . Hinc iam litterae ante introductae P, Q, R, etc. sequenti modo determinabuntur:

$$P =$$

$$P = \frac{n}{\lambda} v^{n-\lambda};$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-2\lambda};$$

$$R = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-3\lambda};$$

$$S = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{\lambda} \cdot v^{n-4\lambda}; \text{ etc.}$$

quibus valoribus substitutis series desiderata erit

$$\begin{aligned} z^n = & v^n - \frac{n}{\lambda} \cdot v^{n-\lambda} (v^\lambda - a) + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot v^{n-2\lambda} (v^\lambda - a)^2 \\ & - \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{(n-\lambda)}{2\lambda} \cdot \frac{(n-2\lambda)}{3\lambda} \cdot v^{n-3\lambda} (v^\lambda - a)^3 \\ & + \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-\lambda}{2\lambda} \cdot \frac{n-2\lambda}{3\lambda} \cdot \frac{n-3\lambda}{4\lambda} \cdot v^{n-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.} \end{aligned}$$

Posito hic  $n = 0$  erit

$$\begin{aligned} lz = & l v - \frac{1}{\lambda} v^{-\lambda} (v^\lambda - a) - \frac{1}{2\lambda} v^{-2\lambda} (v^\lambda - a)^2 \\ & - \frac{1}{3\lambda} v^{-3\lambda} (v^\lambda - a)^3 - \frac{1}{4\lambda} v^{-4\lambda} (v^\lambda - a)^4 - \text{etc.} \end{aligned}$$