1790

De singulari ratione differentiandi et intagrandi, quae in summis serierum occurrit

Leonhard Euler

DE
SINGVLARI RATIONE
DIFFERENTIANDI & INTEGRANDI
QVAE IN SVMMIS SERIERVM OCCVRRIT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 18 *Mart* 1776.

§. 1.

Si Σx^n denotet summam progressionis cuius terminus generalis est potestas x^n, ita vt sit

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots\ldots + x^n$$

passim expositum reperitur quomodo ex qualibet summa potestatum inferiorum summae superiorum formari queant, dum scilicet singuli termini formulae quae pro Σx^n fuerit inuenta, per certas fractiones multiplicantur, vt hoc modo summa sequentis potestatis Σx^{n+1} obtineatur. Quod quo clarius appareat a potestate infima x^0 continuo ad altiores ascendamus et singulis terminis cuiusque summae subscribamus multiplicatores quibus sequens summa producitur, hoc modo:

$$\Sigma x^0 = x$$
Mult. $\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{1}x$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$$
Mult. $\frac{2}{3}x,\quad \frac{2}{2}x,\quad \frac{2}{1}x$

$$\Sigma x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x$$

Mult. $\tfrac{3}{4}x,\ \tfrac{3}{3}x,\ \tfrac{3}{2}x,\ \tfrac{3}{1}x$

$$\Sigma x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx + *$$

Mult. $\tfrac{4}{5}x,\ \tfrac{4}{4}x,\ \tfrac{4}{3}x,\ \tfrac{4}{2}x,\ \tfrac{4}{1}x$

$$\Sigma x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + * - \tfrac{1}{30}x$$

Mult. $\tfrac{5}{6}x,\ \tfrac{5}{5}x,\ \tfrac{5}{4}x,\ \tfrac{5}{3}x,\ \tfrac{5}{2}x,\ \tfrac{5}{1}x$

$$\Sigma x^5 = \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 + * - \tfrac{1}{12}xx + *$$

Mult. $\tfrac{6}{7}x,\ \tfrac{6}{6}x,\ \tfrac{6}{5}x,\ \tfrac{6}{4}x,\ \tfrac{6}{3}x,\ \tfrac{6}{2}x\ \ \tfrac{6}{1}x$

$$\Sigma x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 + * - \tfrac{1}{6}x^3 + * + \tfrac{1}{42}x$$

Mult. $\tfrac{7}{8}x,\ \tfrac{7}{7}x,\ \tfrac{7}{6}x,\ \tfrac{7}{5}x,\ \tfrac{7}{4}x,\ \tfrac{7}{3}x,\ \tfrac{7}{2}x,\ \tfrac{7}{1}x$

$$\Sigma x^7 = \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{2}x^7 + \tfrac{7}{12}x^6 + * - \tfrac{7}{24}x^4 + * + \tfrac{1}{12}xx + *$$

Mult. $\tfrac{8}{9}x,\ \tfrac{8}{8}x,\ \tfrac{8}{7}x,\ \tfrac{8}{6}x,\ \tfrac{8}{5}x,\ \tfrac{8}{4}x,\ \tfrac{8}{3}x,\ \tfrac{8}{2}x,\ \tfrac{8}{1}x,$

$$\Sigma x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 + \tfrac{1}{2}x^8 + \tfrac{2}{3}x^7 + * - \tfrac{7}{15}x^5 + * - \tfrac{2}{9}x^3 + * - \tfrac{1}{30}x$$

etc.

§. 2. Ex his ſtatim perſpicitur, quomodo has operationes vlterius continuari oporteat; tantum notari debet in vltimis terminis cuiusque formulae exceptionem eſſe ſtatuendam, quippe qui vbique ita determinari debet, vt poſito $x = 1$ valor totius expreſſionis etiam vnitati prodeat aequalis. Quoniam enim omnes iſtae progreſſiones ab vnitate incipiunt, manifeſtum eſt poſito $x = 1$ ſummam ipſi termino primo aequalem fieri debere, atque ex hoc principio vbique vltimus terminus, qui ſemper ad poteſtatem primam x^1 refertur, erit definiendus. Ceterum perſpicuum eſt, hunc terminum vbique fore vltimum, quoniam poſito $x = 0$ ipſa ſumma neceſſario in nihilum abire debet. Praeterea notandum eſt loca vacua, vbi coëfficiens eſt $= 0$, aſteriſcis * eſſe completa. Ita in expreſſione vltima Σx^8 in fine acceſſit terminus $-\tfrac{1}{30}x$, quoniam praecedentes omnes iun-

iunctim sumti, posito $x = 1$, producunt

$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} * - \tfrac{7}{15} * + \tfrac{2}{9} * = \tfrac{31}{30},$$

vnde patet vltimum terminum esse debere $= -\frac{1}{30}x$, vt tota summa euadat $= 1$.

§. 3. Quod si iam istos multiplicatores attentius consideremus, facile perspicitur, ex quolibet termino, per suum multiplicatorem subscriptum multiplicato, idem resultare productum, ac si ipse ille terminus in ∂x ductus integraretur ac per numeratorem fractionis subscriptae multiplicaretur. Quia igitur pro qualibet forma numeratores fractionum subscriptarum sunt aequales, summa sequens prodibit, si praecedens in ∂x ducta integretur simulque per numeratorem respondentem multiplicetur. Ita erit

$$\begin{aligned}
\Sigma x^1 &= 1 \int \partial x \, \Sigma x^0, \\
\Sigma x^2 &= 2 \int \partial x \, \Sigma x^1, \\
\Sigma x^3 &= 3 \int \partial x \, \Sigma x^2, \\
\Sigma x^4 &= 4 \int \partial x \, \Sigma x^3, \\
\Sigma x^5 &= 5 \int \partial x \, \Sigma x^4, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

ideoque in genere $\Sigma x^{n+1} = (n+1) \int \partial x \, \Sigma x^n$, si modo quouis casu vltimus terminus rite adiiciatur, quippe quem integratio non exhibet, id quod in sequente Problemate ostendemus.

Problema.

§. 4. *Cognita summa seriei potestatum cuiusuis exponentis, scilicet*

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots\dots\dots + x^n,$$

inuenire summam potestatum vno gradu altiorum, scilicet

$$\Sigma x^{n+1} = 1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} + \dots\dots + x^{n+1}.$$

Solutio.

Quoniam ſumma cognita Σx^n eſt certa functio ipſius x, ea ducta in ∂x integretur, vt prodeat $\int \partial x \Sigma x^n$, quod integrale inſuper multiplicatum per $n + 1$ dabit ſummam quaeſitam $\int x^{n+1}$, ſi modo haec duplex rectificatio rite adhibeatur. Primo enim hoc integrale ita capi debet, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Deinde vero inſuper eiusmodi terminus formae αx addi debet, ita determinandus, vt poſito $x = 1$ ipſa quoque ſumma quaeſita fiat $\Sigma x^{n+1} = 1$. Ex quo patet iſtam rationem integrandi penitus ab integrationibus conſuetis abhorrere, propterea quod duplicem determinationem poſtulat, alteram ex caſu $x = 0$, alteram ex caſu $x = 1$ petendam.

§. 5. Vt igitur iſtam regulam clarius per exempla illuſtremus, a ſimpliciſſimis incipiamus, et cum eſſet $\Sigma x^0 = x$, erit $\int \partial x \Sigma x^0 = \frac{1}{2} x x$; vnde ſtatuatur $\Sigma x^1 = 1 . \frac{1}{2} x x + \alpha x$, et quia poſito $x = 1$ eſſe debet $\frac{1}{2} + \alpha = 1$, erit vtique $\alpha = \frac{1}{2}$. Deinde erit $\int \partial x \Sigma x = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x$, quam ob rem ſtatui debet $\Sigma x^2 = 2 (\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x x) + \alpha x$, poſitoque $x = 1$ fieri debet $2 (\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) + \alpha = 1$, vnde reperitur $\alpha = \frac{1}{6}$. Hinc igitur porro erit $\int \partial x \Sigma x^2 = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x x$, quod integrale per 3 multiplicatum cum adiecto termino vltimo αx dabit

$$\Sigma x^3 = 3 (\tfrac{1}{12} x^4 + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{12} x x) + \alpha x,$$

vnde facto $x = 1$ fieri debet $3 (\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}) + \alpha = 1$, vnde fit $\alpha = 0$.

Scholion.

§. 6. Ecce ergo ſpecimen prorſus ſingulare integrationis hic ſe nobis offert, quippe quod duplici determinatione indiget, dum ſolitae integrationes vnicam tantum poſtulant. Verum hinc etiam in differentiationem ſingulare Phaenomenon influit: ſi enim ex qualibet ſumma Σx^{n+1}, tanquam cognita ſpecta-

ſpectata, ſummam praecedentem Σx^n elicere velimus, id quidem viciſſim per differentiationem fieri poterit, cum fiat $\Sigma x^n = \frac{\partial . \Sigma x^{n+1}}{(n+1)\partial x}$. Verum hic praeter morem ſolitum adhuc vna rectificatione eſt opus, quam ita inſtitui oportet, vt valor hinc reſultans euaneſcat poſito $x = 0$, quam operationem in ſequente Problemate explicemus:

Problema.

§. 7. *Cognita ſumma ſeriei poteſtatum cuiusuis exponentis*

$$\Sigma x^n = 1^n + 2^n + 2^n + 4^n + \ldots \ldots x^n$$

inuenire ſummam poteſtatum vno gradu inferiorum

$$\Sigma x^{n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \ldots \ldots x^{n-1}.$$

Solutio.

Cum ex modo allatis pateat eſſe $\Sigma x^{n-1} = \frac{\partial . \Sigma x^n}{n \partial x}$, euidens eſt ex cognita ſumma Σx^n reperiri ſummam Σx^{n-1}, ſi illa differentietur eiusque differentiale per $n \partial x$ diuidatur. Verum hic quoque praeter morem ſolitum vna rectificatione eſt opus; quoniam enim omnes iſtae ſummae euaneſcere debent poſito $x = 0$, eiusmodi conſtantem hic adiici neceſſe eſt, vt formula inuenta euaneſcat poſito $x = 0$, id quod commodiſſime efficietur, ſi termini mere conſtantes, qui forte ex differentiatione prodeunt, ſtatim omittantur.

§. 8. Hanc operationem prorſus ſingularem quoque aliquot exemplis illuſtremus. Primo igitur cum ſit $\Sigma x^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x x + \frac{1}{6} x$, erit eius differentiale $x x \partial x + x \partial x + \frac{1}{6} \partial x$, quod ergo per $2 \partial x$ diuiſum, omiſſo termino vltimo vtpote conſtante, praebet $\Sigma x' = \frac{1}{2} x x + \frac{1}{2} x$. Deinde cum ſit Σx^3

═

$= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x x$, eius differentiale erit $x^3 \partial x + \frac{3}{2} x x \partial x + \frac{1}{2} x \partial x$, quod per $3 \partial x$ diuisum, quoniam nullus terminus constans adest, sine vlla correctione praebebit $\Sigma x^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x x + \frac{1}{6} x$.

Scholion.

§. 9. En igitur aliud simile specimen differentiationis hic occurrit, quod a more solito in hoc recedit, vt etiam differentiale correctione indigeat, dum integratio ante proposita duplicem requirebat, ob quam circumstantiam ambae istae operationes prorsus singulares omni attentione dignae videntur, idque eo magis, quod hactenus ex solis obseruationibus per inductionem sunt deriuatae; quamobrem maxime necessarium videtur, has operationes solida demonstratione corroborare.

Demonstratio operationum supra expositarum.

§. 10. Ex iis quae olim de summatione omnium progressionum, atque imprimis potestatum tradidi, valor formulae Σx^n in genere sequenti modo expressus deducitur:

$$x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2} x^n + \frac{n}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6} x^{n-3}$$
$$+ \frac{n \ldots (n-4)}{2 \ldots 6} \cdot \frac{1}{6} x^{n-5} - \frac{n \ldots (n-6)}{2 \ldots 9} \cdot \frac{3}{10} x^{n-7} + \text{etc.}$$

Quod si ergo hanc formam per $(n+1) \partial x$ multiplicemus & integremus, obtinebitur sequens expressio:

$$\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{2} x^{n+1} + \frac{(n+1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} x^n - \frac{(n+1) n (n-1)}{2 \ldots 5} \frac{1}{6} x^{n-2}$$
$$+ \frac{(n+1) n (n-1) \ldots (n-3)}{2 \ldots 7} \cdot \frac{1}{6} x^{n-4} - \frac{(n+1) n (n-1) \ldots (n-5)}{2 \ldots 9} \cdot \frac{3}{10} x^{n-6}$$
$$+ \frac{(n+1) n (n-1) \ldots (n-7)}{2 \ldots 11} \cdot \frac{5}{6} \cdot x^{n-8} + \text{etc.}$$

quae

quae a praecedente aliter non discrepat, nisi quod numerus n vnitate sit auctus, ea igitur verum valorem summae Σx^{n+1} exprimit.

§. 11. Quod autem nunc ad duplicem correctionem supra memoratam attinet, primo quidem patet in ipsa expressione Σx^n perpetuo terminum constantem, qui ibi ingrederetur, penitus esse omittendum, id quod semper vsu venit, quoties n est numerus impar, propterea quod per ipsam rei naturam summa semper euanescere debet posito $x = 0$. Ita si esset $n = 3$, omitti debet terminus $-\frac{3.2.1}{2.3.4.5.}.\frac{1}{6}.x^0$. Quando autem sumimus integrale, huius termini ratio vtique erit habenda, quoniam inde oritur $-\frac{3.2.1.}{2.....5}.\frac{1}{6}.4x = -\frac{1}{30}x$, quem ergo terminum in summa sequente Σx^{n-1}, vtique addi oportet, etiamsi non per integrationem sit erutus. Cum autem constet posito $x = 1$ summam semper primo termino, qui est 1, aequari debere, ex hac conditione iste terminus ∂x tutissime definietur, sine subsidio formae generalis.

§. 12. Hinc igitur ratio est manifesta, cur huiusmodi integrationes duplicem rectificationem postulent, quarum scilicet altera efficiendum est vt summa inuenta euanescat casu $x = 0$; tum vero etiam vt casu $x = 1$ ipsa vnitati aequalis prodeat. Atque hinc simul intelligitur ratio, cur in differentiatione, quoties ad terminos constantes peruenitur, eos praetermitti oporteat. Ceterum tales operationes per differentiationem et integrationem procedentes non solum in seriebus potestatum locum habent, sed etiam ad omnis generis progressiones extendi possunt, quemadmodum in sequenti Problemate ostendetur.

Problema.

§. 13. *Si fuerit X functio quaecunque ipsius x atque seriei, cuius terminus generalis $= X$, existente x indice termini vltimi, cognita fuerit summa $= \Sigma X$, inuenire summam seriei cuius terminus generalis $= \frac{\partial X}{\partial x}$.*

Solutio.

Ex cognito termino generali X olim ostendi terminum summatorium ita exprimi, vt sit

$$\Sigma X = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \frac{A}{1.2.3} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{B}{1 \ldots 5} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{C}{1 \ldots 7} \cdot \frac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D, etc. denotant numeros vulgo Bernoullianos dictos:

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6};\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{5}{6},\ \tfrac{69}{210},\ \tfrac{35}{2},\ \text{etc.}$$

Quod si iam pro altera serie, cuius terminus generalis proponitur $\frac{\partial X}{\partial x}$, loco X scribamus $\frac{\partial X}{\partial x}$, quia tum $\int X \partial x$ abit in X et singula differentialia ipsius X vno gradu euehuntur, prodibit istius seriei summa:

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = X + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{A}{1.2.3} \frac{\partial \partial X}{\partial x^2} - \frac{B}{1 \ldots 5} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + \frac{C}{1 \ldots 7} \cdot \frac{\partial^6 X}{\partial x^6} - \text{etc.}$$

quae manifesto ex forma praecedente oritur, si illa differentietur ac per ∂x diuidatur, ita vt sit $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma X}{\partial x}$. Verum cum natura omnium summationum postulet, vt euanescente terminorum numero x, etiam ipsae fiant nihilo aequales, istam aequationem ita referri conueniet: $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma X}{\partial x} + C$, quam scilicet constantem C ita accipi oportet, vt summa quaesita $\Sigma \frac{\partial X}{\partial x}$ euanescat posito $x = 0$, quod plerumque commodissime fiet, si, quando differentiatio formulae ΣX terminos constantes praebet, ii omittantur.

Corollarium.

§. 14. Hinc igitur patet signum summationis Σ simili modo ad signum differentiationis ∂ referri posse, quo signum

gnum integrationis $\int$. Quemadmodum enim est $\int \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial . \int x \partial x}{\partial x}$, ita videmus etiam esse $\Sigma \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial . \Sigma x}{\partial x}$. Hic autem conditionem memoratam, adiectione constantis C contentam, neutiquam obliuisci oportet, quippe qua ingens discrimen inter huiusmodi relationes constituitur.

Exemplum 1.

§. 15. Ponamus terminum generalem seriei propositae esse $\frac{1}{x(x+1)}$, ita vt series proposita sit

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{20} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{xx+x},$$

cuius terminus summatorius est $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, ita vt sit $\Sigma \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x+1}$. Nunc autem erit $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{(1+2x)}{(xx+x)^2}$, vnde nascitur ista series:

$$-\tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{36} - \tfrac{7}{144} - \tfrac{9}{400} \ldots\ldots\ldots - \frac{(2x+1)}{(xx+x)^2}.$$

Huius igitur seriei terminus summatorius erit

$$\frac{1}{\partial x} \partial . \frac{x}{1+x} + C = \frac{1}{(1+x)^2} + C,$$

quae formula cum euanescere debeat posito $x = 0$, sumi debet $C = -1$, ita vt summa desiderata iam sit $-\frac{(2x+xx)}{(1+x)^2}$. Patet autem hinc sumto $x = 1$ fore summam $= -\frac{3}{4}$, hoc est ipsi primo termino aequalem; sumto autem $x = 2$ fore summam $= -\frac{8}{9}$, quae est aggregatum termini primi et secundi. At sumto $x = 3$ fit summa $= -\frac{15}{16}$; aggregatum vero trium priorum terminorum est $-\frac{8}{9} - \frac{7}{144} = -\frac{135}{144} = -\frac{15}{16}$.

Exemplum 2.

§. 16. Sit proposita ipsa series ad quam in praecedente exemplo peruenimus:

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{36} + \tfrac{7}{144} + \tfrac{9}{400} \ldots\ldots + \frac{2x+1}{(xx+x)^2},$$

 vbi

vbi ergo eſt $X = \frac{2x+1}{(xx+x)^2}$, eius vero ſummam vidimus eſſe $\frac{2x+xx}{(x+1)^2}$. Hinc igitur erit $\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{2-6x-6xx}{(xx+x)^3}$, vnde naſcitur haec ſeries: $-\frac{14}{8} - \frac{38}{216} - \frac{74}{1728} -$ etc. cuius ergo ſumma erit

$$\frac{1}{\partial x}\partial . \Sigma X = \frac{1}{\partial x}\partial . \frac{xx+2x}{(x+1)^2} + C = \frac{2}{(x+1)^3} + C,$$

vbi igitur ſumi debet $C = -2$, ita vt ſumma deſiderata ſit

$$= \frac{-6x-6xx-2x^3}{(1+x)^3} = \Sigma \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Sumamus igitur $x = 1$ ac prodibit primus terminus $= -\frac{14}{8}$. Sin autem capiatur $x = 2$, erit aggregatum primi et ſecundi termini $-\frac{52}{27}$. At ſumto $x = 3$ prodit $-\frac{126}{64} = -\frac{63}{32}$; ſumma autem trium primorum erit $-\frac{52}{27} - \frac{74}{1728} = -\frac{63}{32}$.

Scholion.

§. 17. Haec exempla ita ſunt aſſumta, vt ex termino generali ſumma per formam ſupra exhibitam non aliter niſi per ſeriem infinitam elici potuiſſet. Si enim poneremus $X = \frac{1}{xx+x}$, hinc primo deduceremus $\int X \partial x = l\frac{x}{1+x}$, differentialia vero nunquam euaneſcerent, ita vt inde vera ſumma, quae aliunde conſtat, deduci non poſſet. Huiusmodi autem exempla innumerabilia facillime formari poſſunt, dum ipſe terminus ſummatorius pro lubitu aſſumitur. Si enim in genere terminus ſummatorius ſtatuatur $= S$, functio quaecunque ipſius indicis x, tum ſi in eo loco x ſcribatur $x - 1$, ſumma illa prodire debet vltimo termino minuta, vnde vltimus, hoc eſt terminus generalis ſeriei obtinebitur, ſi a ſumma S ſubtrahatur eius valor qui prodit ſi loco x ſcribatur $x - 1$. Ita in primo exemplo erat $S = \frac{x}{1+x}$, quae expreſſio, loco x ſcribendo $x-1$, abit in $\frac{x-1}{x}$, quae fractio a priore ablata relinquit $\frac{1}{x(x+1)}$; qui eſt terminus generalis noſtrae ſeriei. Hinc igitur perſpicitur veritatem ſolutionis noſtri problematis neutiquam pendere

a

a forma, qua fummam expreffimus, fed potius in ipfa natura fummationis effe fundatam, id quod etiam de fequente Problemate valebit.

Problema.

§. 18. *Si cognita fuerit fumma feriei, cuius terminus generalis $= X$, functio quaecunque indicis x, inuenire fummam feriei cuius terminus generalis $= \int X \partial x$.*

Solutio.

Cum igitur terminus generalis feriei propofitae fit $= X$, eius fumma fupra cognita habetur, eritque vt ante

$$\Sigma X = \int X \partial x + \tfrac{1}{2} X + \tfrac{A}{1.2.3} \cdot \tfrac{\partial X}{\partial x} - \tfrac{B}{1 \ldots 5} \cdot \tfrac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \tfrac{C}{1 \ldots 7} \cdot \tfrac{\partial^5 X}{\partial x^5} - \text{etc.}$$

Hinc igitur deducimus fummam quaefitam $\Sigma \int X \partial x$, fi in illa expreffione loco X vbique fcribamus $\int X \partial x$, quo facto reperiemus:

$$\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \int X \partial x + \tfrac{1}{2} \int X \partial x + \tfrac{A}{1.2.3} \cdot X - \tfrac{B}{1 \ldots 5} \cdot \tfrac{\partial \partial X}{\partial x^2} + \tfrac{C}{1 \ldots 7} \cdot \tfrac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

quae feries manifefto ex illa formatur, fi ea ducta in ∂x integretur, ita vt fit $\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \Sigma X$. Verum hic duplex rectificatio accedere debet, altera vt fumma quaefita euanefcat pofito $x = 0$, altera vero vt pofito $x = 1$ fumma exhibeat ipfum terminum primum feriei, qui erit valor formulae $\int X \partial x$, fumto $x = 1$, quamobrem vera expreffio pro fumma quaefita erit

$$\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \Sigma X + C + D x,$$

vbi ambas conftantes C et D per memoratas conditiones definire oportet.

Corollarium.

§. 19. Hinc igitur patet fignum fummationis Σ fimili indole gaudere, qua fignum integrationis, atque adeo haec figna

 inter

inter ſe permutari poſſe, cum ſit $\Sigma \int$ aequivalens $\int \Sigma$. Hic autem probe meminiſſe oportet, duplicem rectificationem inſuper eſſe adiungendam.

Exemplum.

§. 20. Sit propoſita progreſſio numerorum pentagonalium 1, 5, 12, 22, ... $\frac{3xx-x}{2}$, ita vt ſit $X = \frac{3xx-x}{2}$. Hinc cum ſit $\int X \partial x = \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{4} x x$, tum vero $\frac{\partial X}{\partial x} = 3x - \frac{1}{2}$ et $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2} = 3$, ſequentia vero differentialia $= 0$, hinc obtinetur

$$\Sigma X = \tfrac{1}{2} x^3 - \tfrac{1}{4} x x, + \tfrac{3}{4} x x - \tfrac{1}{4} x, + \tfrac{1}{12}(3x - \tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{1}{2} x^3 + \tfrac{1}{2} x x.$$

Hinc iam formetur noua ſeries, cuius terminus generalis

$$= \int X \partial x = \tfrac{1}{2} x^3 - \tfrac{1}{4} x x + \tfrac{1}{2},$$

vnde naſcitur haec ſeries:

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{2} + \tfrac{47}{4} \text{ etc. } \ldots\ldots\ \tfrac{1}{2} x^3 - \tfrac{1}{4} x x + \tfrac{1}{2}.$$

Eius igitur ſumma erit

$$\Sigma \int X \partial x = \int \partial x \Sigma X + C + D x.$$

Iam vero ob $\Sigma X = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x x$, erit $\int \partial x \Sigma X = \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{6} x^3$, ideoque ſumma quaeſita $= \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{6} x^3 + C + D x$, quae vt euaneſcat ſumto $x = 0$, fieri debet $C = 0$; at vt poſito $x = 1$ prodeat primus terminus $\frac{3}{4}$, ſumi debet $D = \frac{11}{24}$, ita vt vera ſumma ſit $\frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{11}{24} x$. Ita ſi ſumamus $x = 2$, prodit $\frac{17}{4}$, quae eſt ſumma termini primi et ſecundi.

Scholion.

§. 21. Ex his facile intelligitur, tam differentiationem quam integrationem pro lubitu vlterius continuari poſſe, id quod breuiter ſequentibus duobus Theorematibus ſum complexurus.

Theo-

Theorema I.

§. 22. Si termino generali X, qui ſcilicet indici x conueniat, reſpondeat terminus ſummatorius S; tum ſequentes ſummationes inde deriuantur:

I. Termino generali $\frac{\partial X}{\partial x}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial S}{\partial x} + A$;

II. Termino generali $\frac{\partial \partial X}{\partial x^2}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial \partial S}{\partial x^2} + A$;

III. Termino generali $\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}$ conueniet ſummatorius $= \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + A$.

etc.

vbi littera A deſignat quantitatem conſtantem inde definiendam, vt hae ſummae euaneſcant poſito $x = 0$.

Theorema II.

§. 23. Si termino generali X conueniat terminus ſummatorius S, ſequentes ſummationes quoque locum habebunt:

I. Termino generali $\int X \partial x$ reſpondebit ſummatorius
$\int S \partial x + A + B x$;

II. Termino generali $\int \partial x \int X \partial x$ reſpondebit ſummatorius
$\int \partial x \int S \partial x + A + B x + C x^2$;

III. Termino generali $\int \partial x \int \partial x \int X \partial x$ reſpondebit ſummator.
$\int \partial x \int \partial x \int S \partial x + A + B x + C x^2 + D x^3$;

etc.

vbi litteras conſtantes A, B, C, D, etc. ita definiri oportet, vt caſibus $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. ſatisfiat, ſcilicet, vt poſito $x = 0$ ipſa ſumma euaneſcat; poſito vero $x = 1$ vt prodeat terminus primus; tum vt poſito $x = 2$ prodeat ſumma primi et ſecundi; et vt poſito $x = 3$ prodeat ſumma primi ſecundi et tertii, et ita porro. Semper autem praeſtabit quamlibet ſummam ex immediate praecedente definire, quoniam tum tantum duae conſtantes A et B prodeunt, quas facillime ex caſibus $x = 0$ et $x = 1$ definire licet.

ME-