1789

Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat

Leonhard Euler

NOVA DEMONSTRATIO QVOD EVOLVTIO POTESTATVM BINOMII NEWTONIANA ETIAM PRO EXPONENTIBVS FRACTIS VALEAT.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 20 *Maii.* 1776.

§. 1.

Quando in elementis Analyseos potestates Binomii euoluuntur, id per actualem multiplicationem fieri solet, dum Binomium aliquoties in se ipsum multiplicatur, toties scilicet, quot exponens continet vnitates, atque hinc Newtonus pro potestate indefinita $(1 + x)^n$ deduxit istam terminorum progressionem:

$$1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1. \; 2} x x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1. \; 2. \; 3} x^3 + \text{etc.}$$

Cuius ergo veritas tantum pro casibus, quibus exponens n est numerus integer positiuus, pro demonstrata est habenda. Quod autem eadem expressio veritati sit consentanea, quando exponens n est vel numerus fractus, vel negatiuus, vel adeo transcendens, plures Geometrae ostendere sunt conati, quorum demonstrationes autem vel nimis sunt abstrusae, vel etiam nimis longe

longe petitae, quam vt in limine Analyſeos locum inuenire queant. Dedi equidem etiam ante complures annos talem demonſtrationem, quae prima elementa vix ſuperare videatur: nuper autem adhuc in aliam incidi, quae mihi quidem videtur negotium penitus conficere, quam igitur hic expoſuiſſe Geometris haud ingratum fore confido.

§. 2. Cuiuscunque autem indolis fuerit exponens n, tuto aſſumere licet, ipſam poteſtatem ſemper in huiusmodi formam euolui poſſe, vt ſit

$$(1 + x)^n = 1 + A\,x + B\,x\,x + C\,x^3 + D\,x^4 + \text{etc.}$$

Hic ſcilicet litterae maiusculae A, B, C, D etc. certos numeros denotant, per exponentem n determinandos, vbi quidem iam nouimus, quoties n fuerit numerus integer poſitiuus, fore

$$A = \tfrac{n}{1};\ B = \tfrac{n-1}{2}\,.\,A;\ C = \tfrac{n-2}{3}\,.\,B;\ D = \tfrac{n-3}{4}\,.\,C \text{ etc.}$$

interim tamen etiam hos valores per methodum quam hic ſum expoſiturus, deduci conueniet, vnde ſimul patebit eosdem etiam ſemper locum habere, quamuis exponens n non fuerit integer poſitiuus.

§. 3. Statim autem hic obſeruaſſe iuuabit, primum ſeriei aſſumtae terminum rite vnitati aequalem ſtatui, quandoquidem nouimus, ſi fuerit $x = 0$, quo caſu omnes termini primum ſequentes euaneſcunt, valorem poteſtatis 1^n ſemper certe eſſe $= 1$, quicunque etiam numerus pro n accipiatur. Deinde etiam manifeſtum eſt, caſu quo $n = 0$ valorem poteſtatis $(1 + x)^0$ ſemper ipſi vnitati aequari; cum adeo in principiis Analyſeos ſatis ſuperque euictum ſit, ſemper eſſe $z^0 = 1$. Hinc igitur ſequitur hoc caſu, quo $n = 0$, etiam valores omnium litterarum A, B, C, D etc. euaneſcere debere, vt ſcilicet totius expreſſionis valor prodeat $= 1$. Quamobrem neceſſe

 eſt,

eſt, vt ſingulae harum litterarum factorem inuoluant n, quemadmodum id euenit in valoribus a Newtono conſtitutis.

§. 4. Augeamus nunc vnitate exponentem noſtrae poteſtatis n, ac ſtatuamus ſimili modo

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'xx + C'x^3 + D'x^4 + \text{etc.}$$

vbi euidens eſt, has litteras apice ſignatas A', B', C' etc. ex praecedentibus oriri debere, ſi in his vbique loco n ſcribatur $n+1$. Cum autem ſit $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$: manifeſtum eſt hanc nouam ſeriem ex priori oriri debere, ſi iſta per $1+x$ multiplicetur, tum autem productum ſecundum poteſtates ipſius x diſpoſitum ita ſe habebit:

$$\begin{array}{l} 1 + Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.} \\ \quad + x + Axx + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + \text{etc.} \end{array}$$

quae ergo binae ſeries iunctim ſumtae nouae noſtrae ſeriei aequales eſſe debebunt.

§. 5. Hinc autem ſingulis terminis inter ſe comparandis ſequentes obtinebuntur aequalitates:

1°. $A' = A + 1$, ſiue $A' - A = 1$.
2°. $B' = B + A$, ſiue $B' - B = A$.
3°. $C' = C + B$, ſiue $C' - C = B$.
4°. $D' = D + C$, ſiue $D' - D = C$.
5°. $E' = E + D$, ſiue $E' - E = D$.
etc. etc.

vnde intelligitur quomodo binae quaeque litterae ſequentes ad antecedentes referantur. Veluti ſi in genere littera M aequetur litterae N, eſſe oportebit $N' - N = M$; vnde totum negotium huc redit, quomodo, ſi valor litterae M fuerit inuentus, inueſtigari debeat ſequens littera N, ita vt, ſi in ea loco n ſcribatur

batur $n+1$, valorque hinc refultans indicetur per N′, futurum fit $N' - N = M$.

§. 6. Iftam igitur inueftigationem fequenti modo fufcipiamus, a cafibus fimpliciffimis inchoantes, quem in finem fequentia Lemmata praemittamus.

Lemma I.

§. 7. Si fuerit $N = \alpha n$, erit $N' = \alpha(n+1)$, ideoque $N' - N = \alpha$; vnde viciffim perfpicuum eft, fi fuerit $M = \alpha$, tum fore $N = \alpha n$. Hic quidem obiici poffet, hanc conclufionem inuerfam non fatis effe certam. Si enim ftatuiffemus $N = \alpha n + \beta$, prodiiffet $N' = \alpha(n+1) + \beta$, ideoque $N' - N = \alpha$; vnde ergo concludendum videtur, fi fuerit $M = \alpha$, generaliori modo ftatui debere $N = \alpha n + \beta$. Verum initio iam annotauimus omnes noftros coëfficientes A, B, C, D etc. ita comparatos effe debere, vt euanefcant pofito $n = 0$; quare cum N vnamquamque harum litterarum fignificet, euidens eft neceffario fumi debere $\beta = 0$, ficque penitus euictum eft, quoties fuerit $M = \alpha$, ftatui oportere $N = \alpha n$.

Lemma II.

§. 8. Si fuerit $N = \alpha n(n-1)$, erit $N' = \alpha(n+1)n$, vnde conficitur $N' - N = 2\alpha n$, ita vt hoc cafu fit $M = 2\alpha n$. Loco 2α igitur fcribentes α, concludimus, quoties fuerit $M = \alpha n$, tum certo fore $N = \frac{1}{2}\alpha n(n-1)$, qui valor cum iam euanefcat pofito $n = 0$, additamentum conftans recipere nequit; vti modo ante oftendimus, id quod etiam in fequentibus eft tenendum.

Lem-

Lemma III.

§. 9. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)$, erit
$N' = \alpha(n+1)n(n-1)$, ideoque
$N' - N = 3\alpha n(n-1)$
ita vt hoc casu sit $M = 3\alpha n(n-1)$. Hinc igitur viciſſim concludimus, quoties fuerit $M = a n (n-1)$, certe fore
$N = \frac{1}{3} a n (n-1)(n-2)$.

Lemma IV.

§. 10. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)(n-3)$, erit $N' = \alpha(n+1)n(n-1)(n-2)$, quarum ambarum formularum factor communis eſt $\alpha n(n-1)(n-2)$, ex quo erit $N' - N = \alpha n (n-1)(n-2)[(n-1)-(n-3)]$ ideoque $N' - N = 4\alpha n(n-1)(n-2) = M$; atque hinc viciſſim concludimus, quoties fuerit $M = a n (n-1)(n-2)$, tum certe fore $N = \frac{1}{4} a n (n-1)(n-2)(n-3)$.

Lemma V.

§. 11. Si fuerit $N = \alpha n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, erit $N' = \alpha(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$ hincque colligitur fore $N' - N = M = 5\alpha n(n-1)(n-2)(n-3)$, ex quo viciſſim concludimus, quoties fuerit
$M = a n (n-1)(n-2)(n-3)$
tum ſemper fore
$N = \frac{1}{5} a n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

§. 12. Hinc iam ſatis luculenter perſpicitur, ſi fuerit
$M = a n (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$,

tum

tum certe fore

$$N = \tfrac{1}{6}\, a\, n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),$$

atque adeo generaliter, quoties fuerit

$$M = a\, n\,(n-1)(n-2)(n-3) \quad . \quad . \quad . \quad (n-\lambda)$$

tum certe fore

$$N = \tfrac{1}{\lambda+2}\, a\, n\,(n-1)(n-2) \quad . \quad . \quad . \quad (n-\lambda-1)$$

quae forma generalis omnia lemmata praecedentia simul in se complectitur.

§. 13. Cum nunc litterae N et M in genere binos terminos se insequentes in serie litterarum A, B, C, D etc. designent, aequationem hic in genere euolutam $N' - N = M$ ad singulas aequalitates supra §. 5. inuentas accommodemus, quarum prima cum sit $A' - A = 1$, hic erit $M = 1$, hincque ex lemmate I. colligimus fore N, siue $A = n$, qui ergo valor certe erit verus, quicunque numerus pro exponente n accipiatur, quandoquidem superiora ratiocinia nusquam ad numeros integros fuerunt restricta.

§. 14. Progrediamur igitur ad aequalitatem secundam $B' - B = A$, vbi cum modo inuenerimus esse $A = n$, pro lemmate II. erit $M = A = n$, vnde valor ipsius N nobis hic praebebit $B = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$, siue $B = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2}$, prorsus vti euolutio Newtoniana dederat.

§. 15. Cum igitur porro tertia aequalitas esset $C' - C = B$, lemma III. in subsidium vocantes erit $M = \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$, ideoque $a = \tfrac{1}{2}$, vnde valor pro N ibi inuentus nobis hic dabit $C = \tfrac{1}{6}\, n\,(n-1)(n-2)$, siue $C = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3}$, pariter vti euolutio habet Newtoniana.

 §. 16.

§. 16. Quarta iam aequalitas noſtra erat $D' - D = C$, quae cum lemmate IV. comparata praebet

$$M = C = \tfrac{1}{6} n (n - 1)(n - 2),$$

ita vt hic ſit $a = \tfrac{1}{6}$, inde igitur littera N nobis ſuppeditabit

$$D = \tfrac{1}{24} n (n - 1)(n - 2)(n - 3), \text{ ſiue}$$

$$D = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4}.$$

§. 17. Hoc valore inuento pergamus ad aequalitatem quintam $E' - E = D$, quae nobis pro lemmate V. exhibet $M = D = \tfrac{1}{24} n (n - 1)(n - 2)(n - 3)$, ita vt hic ſit $a = \tfrac{1}{24}$, quare valor ibi pro N aſſignatus pro praeſenti caſu praebet

$$E = \tfrac{1}{120} n (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4),$$

ſiue more ſolito

$$E = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4} \cdot \tfrac{n-4}{5}.$$

§. 18. Prorſus ſuperfluum foret hos caſus vlterius proſequi, cum iam luce meridiana clarius appareat, pro ſingulis litteris ſequentibus eosdem plane valores neceſſario prodire debere, quos euolutio Newtoniana docuit; atque haec demonſtratio naturae rei tam apprime accommodata videtur, vt illi etiam in primis Analyſeos elementis locus denegari nequeat. Quin etiam vniuerſum ratiocinium, quo hic vſi ſumus, omnem vim retinet, etiamſi adeo exponens n vt imaginarius ſpectaretur.

DE