1789

De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se sint aequales

Leonhard Euler

DE BINIS CVRVIS ALGEBRAICIS INVENIENDIS, QVARVM ARCVS INDEFINITE INTER SE SINT AEQVALES.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 *Iun.* 1776.

§. 1.

Tab. I. Fig. 2. et 3. Sint AY et ay huiusmodi binae curuae algebraicae, quarum arcus AY et ay inter se sint aequales; ac pro priore vocentur coordinatae orthogonales $AX = X$ et $XY = Y$; pro altera vero $ax = x$ et $xy = y$, tum igitur requiritur vt sit

$$\sqrt{(\partial X^2 + \partial Y^2)} = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Hunc in finem, introducta in calculum noua variabili z, quaestio huc redit: cuiusmodi quatuor functiones algebraicae istius quantitatis z pro quaternis illis coordinatis X, Y et x, y accipi debeant, vt vtrinque elementa curuae inter se euadant aequalia, siue vt fiat $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial x^2 + \partial y^2$? Talibus enim functionibus inuentis manifestum est, inde pro vtraque curua aequationes algebraicas inter binas coordinatas erui posse, ita vt ambae curuae prodituraе sint algebraicae.

§. 2.

§. 2. Quo nunc hanc conditionem facilius adimpleamus, quatuor illas coordinatas sequenti modo per partes exprimamus:

$$X = p + q;\ x = p - q;$$
$$Y = r - s;\ y = r + s;$$

sic enim pro priori curua reperietur

$$\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2 + 2\,\partial p\,\partial q - 2\,\partial r\,\partial s,$$

pro altera vero curua erit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial q^2 + \partial p^2 + \partial r^2 + \partial s^2 - 2\,\partial q\,\partial p + 2\,\partial r\,\partial s,$$

quae formulae cum inter se debeant esse aequales, satisfieri oportebit huic aequationi: $\partial p\,\partial q = \partial r\,\partial s$. Sicque tota quaestio perducta est ad quaternas functiones algebraicas ipsius z pro litteris p, q, r, s, inueniendas, vt fiat $\partial p\,\partial q = \partial r\,\partial s$, cui conditioni haud difficulter infinitis modis satisfieri posset, si in solutionibus particularibus acquiescere vellemus.

§. 3. Veluti si ponamus $p = A z^{\alpha}$, $q = B z^{\beta}$, $r = C z^{\gamma}$, $s = D z^{\delta}$, effici debet vt fiat

$$A B \alpha \beta z^{\alpha+\beta-2} \partial z^2 = C D \gamma \delta z^{\gamma+\delta-2} \partial z^2.$$

Hic igitur duabus conditionibus erit satisfaciendum: primo enim fieri debet $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, tum vero $A B \alpha \beta = C D \gamma \delta$. Vt nunc priori conditioni commodissime satisfaciamus, statuamus

$$\alpha = \lambda + \mu,\ \beta = \lambda - \mu,\ \gamma = \lambda + \nu,\ \delta = \lambda - \nu;$$

sic enim fiet $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 2\lambda$. His autem valoribus substitutis altera conditio postulat vt fiat

$$A B (\lambda^2 - \mu^2) = C D (\lambda^2 - \nu^2),$$

siue $\frac{AB}{CD} = \frac{\lambda^2 - \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2}$; cui conditioni nitidissime et generalissime satisfaciemus, ponendo:

 $A = f$

$$A = fg(\lambda + \nu), \quad C = fh(\lambda + \mu),$$
$$B = hk(\lambda - \nu); \quad D = gk(\lambda - \mu),$$

vbi tam tres numeros λ, μ et ν, quam quatuor quantitates f, g, h et k prorſus pro lubitu aſſumere licet; quamobrem hinc pro priore curua nanciſcemur coordinatas

$$X = fg(\lambda + \nu) z^{\lambda + \mu} + hk(\lambda - \nu) z^{\lambda - \mu},$$
$$Y = fh(\lambda + \mu) z^{\lambda + \nu} - gk(\lambda - \mu) z^{\lambda - \nu},$$

pro altera vero curua habebimus

$$x = fg(\lambda + \nu) z^{\lambda + \mu} - hk(\lambda - \nu) z^{\lambda - \mu},$$
$$y = fh(\lambda + \mu) z^{\lambda + \nu} + gk(\lambda + \mu) z^{\lambda - \nu}.$$

Pro vtraque autem curua erit elementum curuae

$$= \sqrt{\partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2}.$$

§. 4. Verum hic nobis imprimis eſt propoſitum in ſolutionem generalem inquirere, quae omnes plane ſpeciales in ſe complectatur, ideoque conditioni inuentae $\partial r \partial s = \partial p \partial q$ generaliſſime erit ſatisfaciendum. Cum igitur hinc ſit $\partial s = \frac{\partial p \partial q}{\partial r}$, eiusmodi functiones pro p, q, r, inueſtigari oportet, vt iſta formula differentialis $\frac{\partial p \partial q}{\partial r}$ integrationem admittat; vbi quidem, quoniam haec vnica conditio eſt adimplenda, facile intelligitur, ex ternis quantitatibus p, q et r binas arbitrio noſtro penitus relinqui. Quamobrem aſſumtis pro q et r functionibus quibuscunque algebraicis ipſius z, inde colligatur valor formulae $\frac{\partial q}{\partial r}$, qui ergo itidem erit functio algebraica ipſius z ſimulque cognita, quam indicemus littera u, ita vt ſit $\frac{\partial q}{\partial r} = u$, atque adeo $\partial s = u \partial p$, cui igitur conditioni ſatisfieri oportet.

§. 5. Cum igitur hic u tanquam functio cognita ipſius z ſpectetur, totum negotium redit ad functionem p inueſtiganſtigandam. Quare cum ſit $s = \int u \partial p$, per reductionem notiſſimam habebimus $s = p u - \int p \partial u$, ita vt formula differentialis $p \partial u$ integrabilis reddi debeat. Statuatur ergo $\int p \partial u = v$, exiſtente v functione pariter algebraica ipſius z, vnde ergo fiet $p = \frac{\partial v}{\partial u}$, hincque porro

$$s = p u - v = \frac{u \partial v}{\partial u} - v,$$

ſicque vniuerſi conditioni praeſcriptae erit ſatisfactum, atque adeo pro v functionem quamcunque algebraicam ipſius z pro arbitrio aſſumere licebit.

§. 6. Ecce ergo quaeſtionis noſtrae propoſitae ſolutio generaliſſima ſequenti modo adornari poterit: 1.) Pro litteris q et r ſumantur pro lubitu functiones quaecunque algebraicae ipſius z, ex quibus deducatur quantitas $u = \frac{\partial q}{\partial r}$. 2.) Accipiatur etiam pro v functio quaecunque algebraica ipſius z, ita vt adeo tres functiones ipſius z arbitrio noſtro penitus permittantur. 3.) His igitur conſtitutis binae reliquae litterae p et s ita accipiantur, vt ſit

$$p = \frac{\partial v}{\partial u} \text{ et } s = \frac{u \partial v}{\partial u} - v.$$

Quibus inuentis ambae curuae quaeſitae ita determinabuntur, vt earum coordinatae orthogonales futurae ſint

Pro curua AY:	*Pro curua* ay:
$X = \frac{\partial v}{\partial u} + q$	$x = \frac{\partial v}{\partial u} - q$,
$Y = r - \frac{u \partial v}{\partial u} + v$	$y = r + \frac{u \partial v}{\partial u} - v$,

haecque ergo ſolutio ita eſt generalis, vt omnes plane caſus poſſibiles in ſe complectatur.

§. 7. Cum igitur ſit vtriusque curuae elementi quadratum $= \partial p^2 + \partial q^2 + \partial r^2 + \partial s^2$, quoniam primo eſt $\partial q = u \partial r$, tum vero $s = pu - v$, ob $\partial v = p \partial u$ erit $\partial s = u \partial p$; vnde his valoribus ſubſtitutis obtinebitur elementum vtriusque curuae $= \sqrt{(1 + uu)(\partial p^2 + \partial r^2)}$.

§. 8. Cum igitur porro ſit $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, erit pro priore curua AY formula $\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{\partial p + u \partial r}{\partial r - u \partial p}$, quae, ducta in curua AY normali YN, exprimit tangentem anguli A N Y. Simili modo in altera ay, ſi pariter ducatur normalis yn, erit anguli any tangens $= \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial p - u \partial r}{\partial r + u \partial p}$. Quamobrem ſi introducamus binos angulos Φ et θ, ita vt ſit tang. $\Phi = \frac{\partial p}{\partial r}$ et tang. $\theta = u$, euadet

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{tang.\,\Phi + tang.\,\theta}{1 - tang.\,\Phi\, tang.\,\theta} = \text{tang.}\,(\Phi + \theta) \text{ et}$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{tang.\,\Phi - tang.\,\theta}{1 + tang.\,\Phi\, tang.\,\theta} = \text{tang.}\,(\Phi - \theta).$$

Vnde manifeſtum eſt, angulos A N Y et any, quibus vtriusque curuae amplitudo menſuratur, fore A N Y $= \Phi + \theta$ et $any = \Phi - \theta$.

§. 9. Hinc igitur intelligitur, ambas noſtras curuas communi amplitudine gaudere non poſſe, niſi fuerit angulus $\theta = 0$; tum autem foret $u = 0$, ideoque, ob $\partial q = u \partial r$ et $\partial s = u \partial p$, ambae quantitates q et s forent conſtantes, quae ergo ponantur $q = a$ et $s = b$, vnde propterea prodiret $X = p + a$ et $Y = r - b$, tum vero $x = p - a$ et $y = r + b$; ſicque foret $x = X - 2a$ et $y = Y + 2b$, vnde manifeſtum eſt, ambas curuas prorſus fore easdem, verum coordinatas tantum ad alios axes referri.

§. 10.

§. 10. Cum igitur hoc problema feliciſſimo cum ſucceſſu generaliter expediuerimus, ſi ternae functiones arbitrariae q, r et v ita definiri poſſent, vt altera curua oriatur data, veluti ſiue ellipſis ſiue hyperbola, tum ſimul inueniretur alia curva propoſitae aequalis. Verum talem methodum vix, ac ne vix quidem, ſperare licet, quandoquidem problema generale curvam quamcunque datam in alias diuerſas eiusdem longitudinis transformandi vires Analyſeos ſuperare videtur.

Alia Solutio quaeſtionis propoſitae.

§. 11. Cum tota ſolutio perducta ſit ad hanc aequationem: $\partial p \, \partial q = \partial r \, \partial s$, ſiue $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, ſtatuatur tam $\frac{\partial s}{\partial p} = z$ quam $\frac{\partial q}{\partial r} = z$, et quaecunque accipiatur aequatio algebraica inter p et s, qua littera s definiatur per certam functionem ipſius p, erit etiam $\frac{\partial s}{\partial p}$ certa functio ipſius p, qua ipſi z aequali poſita quantitas p, ideoque et altera s, per z determinabitur. Simili modo ſumta inter q et r aequatione algebraica quacunque, ex qua q definiatur per certam functionem ipſius r, fiet etiam $\frac{\partial q}{\partial r}$ certa functio ipſius r, quae poſita $= z$ dabit itidem tam r quam q per functiones ipſius z expreſſas. Inuentis autem his quatuor functionibus p, q, r, s, ambae curuae quaeſitae ita determinabuntur per ſuas vtraque coordinatas, vt ſit

$$X = p + q, \; Y = r - s;$$
$$x = p - q, \; y = r + s.$$

§. 12. Quoniam vero iſta ſolutio poſtulat reſolutionem aequationum omnis generis, ſiquidem generalis eſſe debeat, prior ſolutio huic ſine dubio longe eſt anteferenda. Interim tamen etiam haec ſolutio vſu non caret, dum nobis egregiam

 con-

constructionem geometricam binarum curuarum, quae quaeruntur, suppeditat, quae ita se habet.

CONSTRVCTIO GEOMETRICA
Curuarum quaesitarum.

Tab. I. Fig. 4. §. 13. Super communi axe describantur binae curuae algebraicae quaecunque bs et cq, in quibus perpetuo capiantur bina puncta s et q, vbi tangentes st et $q\theta$ inter se fiant parallelae; tum ductis applicatis sp et qr habebuntur quatuor nostrae quantitates, scilicet $bp = p$, $ps = s$ et $cr = r$, $rq = q$. Quia enim $\frac{\partial s}{\partial p}$ exprimit tangentem anguli ad t et $\frac{\partial q}{\partial r}$ tangentem anguli ad θ, cum hi anguli sint aequales, erit vtique $\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial r}$, ideoque $\partial p\, \partial q = \partial r\, \partial s$, vti requiritur. Quamobrem ex his duabus curuis pro arbitrio assumtis binae curuae quaesitae hoc modo construentur:

Pro curua A Y	Pro curua ay
$AX = bp + rq$	$ax = bp - rq$
$XY = cr - ps$	$xy = cr + ps$

Fig. 2 et 3.

quae constructio ob elegantiam vtique notatu maxime est digna.

§. 14. Pro curua bs sumamus parabolam hac aequatione contentam: $ss = 2ap$; pro altera autem cq circulum aequatione $qq = 2ar - rr$ expressum; tum igitur erit

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{a}{\sqrt{2ap}} \text{ et } \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{a - r}{\sqrt{2ar - rr}};$$

quae duae quantitates inter se aequales esse debent: perinde enim est siue sibi immediate aequales statuantur, siue vtraque ipsi z aequalis statuatur. Hoc modo omnia ad solam quantitatem r reuocare licebit; quandoquidem habebimus:

$$p = \frac{a(2ar - rr)}{2(a - r)^2},\ q = \sqrt{(2ar - rr)} \text{ et } s = \frac{a\sqrt{(2ar - rr)}}{a - r}.$$

Vnde

Vnde pro binis curuis has nancifcimur coordinatas:

Pro curua A Y	Pro curua ay
$X = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2} + \sqrt{(2ar-rr)}$	$x = \frac{a(2ar-rr)}{2(a-r)^2} - \sqrt{(2ar-rr)}$
$Y = r - \frac{a\sqrt{(2ar-rr)}}{a-r}$	$y = r + \frac{a\sqrt{(2ar-rr)}}{a-r}$

Vbi quantitatem r tantum vsque ad $r = a$ augere licet, quia tum ambae curuae in infinitum excurrent.

SOLV-

Fig. 1.

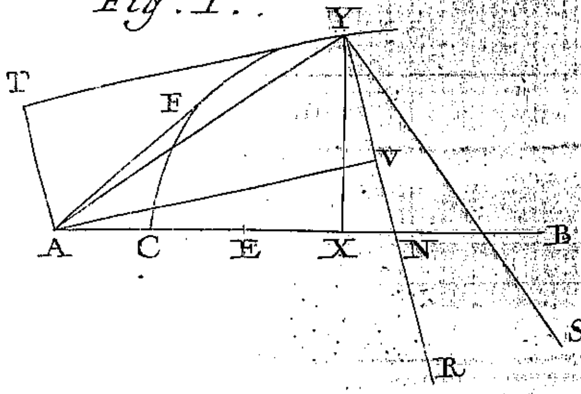

Fig. 2.

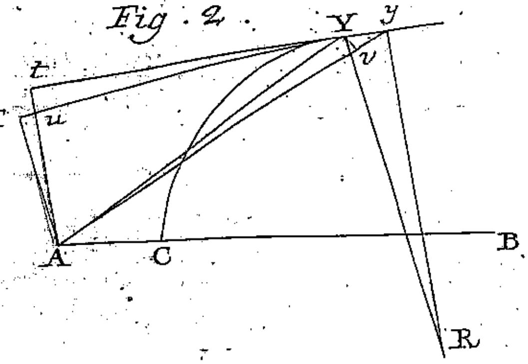

Fig. 3.

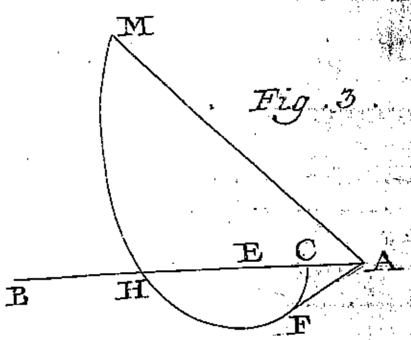

Fig. 4.

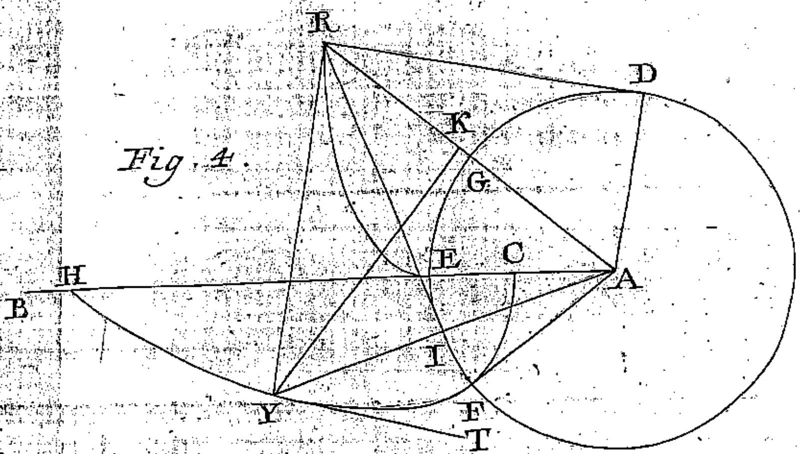

Fig. 5.

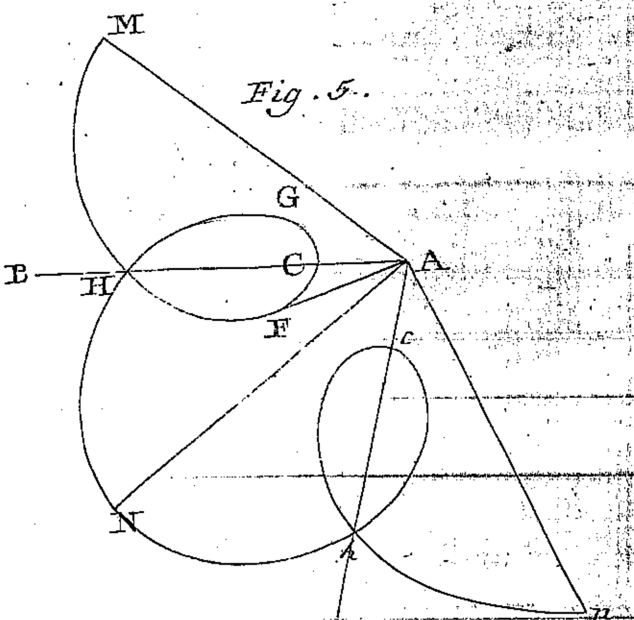

Fig. 6.