



1788

Éclaircissemens sur le mémoire de Mr. de La Grange, inséré dans le Ve. volume de *Mélanges* de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, etc.

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Éclaircissemens sur le mémoire de Mr. de La Grange, inséré dans le Ve. volume de *Mélanges* de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, etc." (1788). *Euler Archive - All Works*. 628.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/628>

ÉCLAIRCISSEMENTS

SUR

LE MÉMOIRE DE Mr. DE LA GRANGE,
INSÉRÉ DANS LE V^e. VOLUME DE MÉLANGES DE
TURIN, CONCERNANT LA MÉTHODE DE PRENDRE
LE MILIEU ENTRE LES RÉSULTATS DE PLU-
SIEURS OBSERVATIONS, &c.

Par

M. L. EULER.

Présenté à l'Académie le 27 Nov. 1777.

Qu'on conçoive un Quart-de-cercle tel que, lorsqu'on s'en sert pour observer, par exemple, la hauteur du Pole, après avoir fait un grand nombre de telles observations il se trouve a observations qui donnent cette hauteur exacte, b observations qui la donnent d'une minute trop grande, et enfin c observations qui la donnent trop petite d'une minute; desorte que le nombre de toutes ces observations soit $N = a + b + c$, parmi lesquelles il y en ait a où l'erreur est $= + 1$ & c où l'erreur est $= - 1$.

Un tel Quart-de-cercle étant supposé, quand on aura fait n observations pour déterminer l'élevation du pôle, la déclinaison d'une étoile, ou quoi que ce soit, parmi lesquelles on

Nova Acta Acad. Imp. Sc. T. III.

O o

aura

aura pris un milieu, selon la manière ordinaire, en ajoutant tous les résultats ensemble & divisant la somme par le nombre des observations n ; on demande: quelle sera la probabilité, que ce milieu donne exactement la vraie hauteur cherchée, ou que la somme de tous les résultats donne exactement zero? & ensuite: quelle sera la probabilité que la somme de tous les résultats devienne ou $+1$, ou -1 , ou $+2$, ou -2 , ou $+3$, ou -3 ; &c.?

Pour repandre plus de lumière sur cette question, on n'a qu'à concevoir plusieurs billets dont le nombre soit $N = a + b + c$ & qui soient marqués a par 0 , b par $+1$ & c par -1 . Que de ces billets renfermés dans une boîte, on tire, au hazard, successivement n billets, en remettant chaque fois le billet tiré dans la boîte, & l'on pourra demander: quelle sera la probabilité, que la somme de tous les nombres tirés successivement soit ou 0 , ou $+1$, ou -1 , ou $+2$, ou -2 , &c. où il est d'abord clair que cette somme ne sçauroit jamais surpasser ou $+n$, ou $-n$. De cette manière la question proposée pourra aisément être résolue par la Théorie des Combinaisons, en supposant d'abord $n = 1$, ensuite $n = 2$, $n = 3$, &c.

Soit donc $n = 1$, où qu'on ne tire de la boîte qu'un seul billet, & il est évident, qu'il y aura a cas où le nombre tiré peut être 0 , b cas où il peut être $+1$ & c cas où il peut être -1 ; donc puisque le nombre de tous les cas est $a + b + c = N$, la probabilité que le nombre tiré soit 0 sera $\frac{a}{N}$, la probabilité qu'il soit $+1$ fera $\frac{b}{N}$ & celle enfin qu'il soit -1 fera $\frac{c}{N}$, & puisqu'ici on ne tire qu'un seul billet il n'y a pas de milieu à prendre.

Soit

Soit $n = 2$, ou qu'on tire de la boîte deux billets successivement, & quel que soit le nombre du premier, le second pourra être celui de chaque billet dans la boîte, en sorte que chaque billet tiré d'abord admet N variations, d'où l'on voit que le nombre de tous les cas possibles sera $N^2 = (a+b+c)^2$. Or cette formule étant développée donne $aa + bb + cc + 2(ab + ac + bc)$, dont le premier terme aa exprime le nombre des cas où les deux billets tirés sont $0 + 0$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{a a}{N^2}$. Ensuite le second terme bb marque le nombre des cas où les deux billets tirés seront $+1 + 1 = +2$, dont la probabilité sera $\frac{b b}{N^2}$. Le troisième terme cc marque le nombre des cas où les nombres des billets tirés seront $-1 - 1 = -2$, dont la probabilité $= \frac{c c}{N^2}$. De la même manière le quatrième terme $2ab$ exprime le nombre des cas, où l'un des nombres tirés est 0 & l'autre $+1$ & partant leur somme $= +1$, dont la probabilité $= \frac{2 a b}{N^2}$. Le terme $2ac$ est le nombre des cas où il arrive que les nombres des deux billets tirés sont 0 & -1 , & partant la somme $= -1$, dont la probabilité $= \frac{2 a c}{N^2}$. Enfin le dernier terme marque le nombre des cas où ces nombres tirés sont $+1$ & -1 , leur somme partant $= 0$, & la probabilité en est $\frac{2 b c}{N^2}$.

Puisque ici nous avons deux billets, la somme des deux nombres tirés dans chaque cas étant divisée par 2 , donne le milieu dont nous avons parlé ci-dessus, & partant la probabilité que ce milieu soit $= 0$, sera $\frac{a a + 2 b c}{N^2}$. Que ce milieu soit $+1$, la probabilité sera $\frac{b b}{N^2}$; qu'il soit -1 , elle sera $\frac{c c}{N^2}$. Or il peut aussi arriver que ce milieu soit $+\frac{1}{2}$ & la probabilité de ce cas sera $\frac{2 a b}{N^2}$; & enfin pour le milieu $-\frac{1}{2}$ la probabilité est $\frac{2 a c}{N^2}$.

Supposons maintenant $n = 3$, & puisque chacun des cas précédens, dont le nombre étoit N^2 , peut être suivi de chacun des N billets, le nombre de tous les cas possibles sera $N^3 = (a + b + c)^3$, dont nous devons considérer tous les termes qui résultent du développement de cette formule, & chacun exprimera le nombre des cas qui produisent les trois nombres tirés, dont on aura par conséquent tant la somme que le milieu, en la divisant par trois, auquel il sera aisé d'ajouter la probabilité, qui se trouve en divisant chaque terme par le nombre de tous les cas possibles, c'est à dire par N^3 . Nous représenterons tous les cas dans la table suivante:

Termes.	Nombres.	Somme	Milieu.	Probabilité.
a^3	0 + 0 + 0	0	0	$\frac{a^3}{N^3}$
b^3	1 + 1 + 1	3	1	$\frac{b^3}{N^3}$
c^3	-1 -1 -1	-3	-1	$\frac{c^3}{N^3}$
$3aab$	0 + 0 + 1	+1	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3aab}{N^3}$
$3aac$	0 + 0 -1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3aac}{N^3}$
$3abb$	0 + 1 + 1	+2	$+\frac{2}{3}$	$\frac{3abb}{N^3}$
$3acc$	0 -1 -1	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3acc}{N^3}$
$6abc$	0 + 1 -1	0	0	$\frac{6abc}{N^3}$
$3bbc$	+1 + 1 -1	+1	$+\frac{1}{3}$	$\frac{3bbc}{N^3}$
$3bcc$	+1 -1 -1	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3bcc}{N^3}$

On voit de cette table que le milieu = 0 s'y rencontre deux fois, la probabilité en fera par conséquent $\frac{a^3 + 6abc}{N^3}$. Ensuite elle montre que le milieu $\frac{1}{3}$ se rencontre deux fois, & partant la probabilité fera $\frac{3aab + 3bbc}{N^3}$. Or que ce milieu devienne $-\frac{1}{3}$ la probabilité fera $\frac{3aac + 3bcc}{N^3}$. La probabilité pour le milieu $+\frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3}$ fera $\frac{3abb}{N^3}$; pour $-\frac{2}{3}$ elle fera $\frac{3acc}{N^3}$. Pour que le milieu devienne $+1$ la probabilité est $\frac{b^3}{N^3}$ & pour qu'il soit -1 il y aura la probabilité $\frac{c^3}{N^3}$.

De la même manière parcourons le cas où $n = 4$, & où par conséquent on tire quatre billets, & il est clair que le nombre de tous les cas possibles sera $N^4 = (a + b + c)^4$. Developpant donc cette formule, on verra aisément tant ces quatre nombres tirés, répondans à chaque nombre, que leur somme & leur milieu, qui avec la probabilité seront représentés dans la table suivante:

Termes	Nombres	Somme	Milieu	Probabilité
a^4	+0+0+0+0	0	0	$\frac{a^4}{N^4}$
$4a^3b$	+0+0+0+1	+1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3b}{N^4}$
$4a^3c$	+0+0+0-1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4a^3c}{N^4}$
$6aabb$	+0+0+1+1	+2	$+\frac{1}{2}$	$\frac{6aabb}{N^4}$
$6aacc$	+0+0-1-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{6aacc}{N^4}$
$12aabc$	+0+0+1-1	0	0	$\frac{12aabc}{N^4}$
$4ab^3$	+0+1+1+1	+3	$+\frac{3}{4}$	$\frac{4ab^3}{N^4}$
$12abbc$	+0+1+1-1	+1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12abbc}{N^4}$
$12abcc$	+0+1-1-1	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{12abcc}{N^4}$
$4ac^3$	+0-1-1-1	-3	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4ac^3}{N^4}$
b^4	+1+1+1+1	+4	+1	$\frac{b^4}{N^4}$
$4b^3c$	+1+1+1-1	+2	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4b^3c}{N^4}$
$6bbcc$	+1+1-1-1	0	0	$\frac{6bbcc}{N^4}$
$4bc^3$	+1-1-1-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4bc^3}{N^4}$
c^4	-1-1-1-1	-4	-1	$\frac{c^4}{N^4}$

Dans cette table on trouve 9 milieux différens dont quelques uns se rencontrent deux & même trois fois. Nous marquerons donc dans la table suivante pour chacun de ces milieux la probabilité qui lui répond:

Milieu	Probabilité.
0	$\frac{a^3 + 12 a^2 b c + 6 b^2 c^2}{N^3}$
+ $\frac{1}{4}$	$\frac{4 a^3 b + 12 a^2 b c}{N^3}$
+ $\frac{1}{2}$	$\frac{6 a^2 b^2 + 12 a b^2 c}{N^3}$
+ $\frac{3}{4}$	$\frac{6 a a c c + 4 b c^3}{N^3}$
- $\frac{1}{4}$	$\frac{4 a b^3}{N^3}$
- $\frac{3}{4}$	$\frac{4 a c^3}{N^3}$
+ 1	$\frac{b^4}{N^4}$
- 1	$\frac{c^4}{N^4}$

La considération de ces quatre cas nous ouvre la route à la question générale, où le nombre des billets tirés est $=n$; car d'abord il est évident que le nombre de tous les cas possibles est ici $N^n = (a + b + c)^n$, dont le développement n'a aucune difficulté. Mais pour nous dispenser de la considération de chacun des termes qui en résultent, nous considérons ici la forme générale de chacun de ces termes, qui soit $M a^\alpha b^\beta c^\gamma$, où la somme des exposans $\alpha + \beta + \gamma$ doit être $=n$ et pour trouver le coefficient M de ce terme, la Théorie des Combinaisons nous fournit cette formule:

$$M = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \gamma}$$

Or les nombres tirés qui répondent à ce terme seront $0. \alpha$
+ 1.

$\pm 1. \beta - 1. \gamma$, & partant le milieu de ces nombres tirés fera $\frac{\beta - \gamma}{n}$, auquel répond la probabilité $\frac{M a^\alpha b^\beta c^\gamma}{N^n}$.

Puisque la somme de tous les nombres tirés qui répondent à ce terme est $0. \alpha + 1. \beta - 1. \gamma$, on voit que si nous écrivions au lieu des lettres a, b, c ces formules: $a x^0, b x^1, c x^{-1}$, le terme que nous considérons prendroit cette forme: $M a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta - \gamma}$, de sorte que l'exposant de x donneroit d'abord la somme de tous les nombres tirés. Pour cet effet on n'a qu'à développer cette puissance: $(a x^0 + b x^1 + c x^{-1})^n$, & chacun de ses termes, qui aura, comme nous venons de voir, la forme $M a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta - \gamma}$, nous donne pour le milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$, et la probabilité sera $\frac{M a^\alpha b^\beta c^\gamma}{N^n}$.

Or on comprend aisément que ce même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$ peut résulter de plusieurs termes différens, d'où par conséquent il faudra tirer la probabilité qui répond à chacun, & la somme de toutes ces probabilités donnera la probabilité pour le même milieu $\frac{\beta - \gamma}{n}$. Pour trouver tous les termes affectés de la même puissance de x , je tâcherai de donner une méthode qui nous dispensera de ramasser tout ces termes par le développement actuel; mais auparavant je parcourrai successivement les cas où l'exposant de x devient ou 0 ou ± 1 , ou ± 2 , ± 3 . Et d'abord pour le premier; où le milieu est $= 0$, il faudra mettre $\beta = \gamma$, desorte que les termes suivans, qui produisent ce même milieu, seront $a^n, a^{n-2} b c, a^{n-4} b^2 c^2, a^{n-6} b^3 c^3, a^{n-8} b^4 c^4$, qu'il faut continuer jusqu'à ce que les exposans de a deviendront négatifs, & de ce que nous avons observé il sera facile d'assigner à chacun de ces termes son

coëf-

coefficient; par conséquent la somme de tous ces termes divisée par N^n donne la probabilité entière pour que ce milieu ait lieu.

De la même manière, pour que le milieu en question devienne $\frac{1}{n}$, où l'exposant de x , savoir $\beta - \gamma$, devient $= 1$; tous les termes qui y conduisent, à cause de $\beta = \gamma + 1$ & $a = n - 2\gamma - 1$, seront exprimés par les formules suivantes: $a^{n-1} b$, $a^{n-3} b^2 c$, $a^{n-5} b^3 c^2$, $a^{n-7} b^4 c^3$, &c. dont la somme, après y avoir joint leurs coefficients, divisée par N^n donne la probabilité pour ce milieu $\frac{1}{n}$. De même pour que le milieu devienne $-\frac{1}{n}$, & partant $\beta - \gamma = -1$, on aura $\gamma = \beta + 1$ & $a = n - 2\beta - 1$, d'où les termes qui produisent ce milieu seront: $a^{n-1} c$, $a^{n-3} b c^2$, $a^{n-5} b^2 c^3$, $a^{n-7} b^3 c^4$, $a^{n-9} b^4 c^5$, &c.

Si l'on veut que le milieu se trouve $= +\frac{2}{n}$, ou qu'il soit $\beta - \gamma = 2$, et partant $\beta = \gamma + 2$ & $a = n - 2\gamma - 2$, tous les termes qui produisent ce milieu seront $a^{n-2} b^2$, $a^{n-4} b^3 c$, $a^{n-6} b^4 c^2$, $a^{n-8} b^5 c^3$, $a^{n-10} b^6 c^4$, &c. Or pour que le milieu soit $-\frac{2}{n}$, les termes qui le produisent, à cause de $\beta - \gamma = -2$ & partant $a = n - 2\beta - 2$, seront $a^{n-2} c^2$, $a^{n-4} b c^3$, $a^{n-6} b^2 c^4$, $a^{n-8} b^3 c^5$, $a^{n-10} b^4 c^6$, &c. où l'on doit continuer ces formules tant que l'exposant de a demeure positif; & il est très-facile de continuer cette opération pour tous le milieux différens qui peuvent avoir lieu.

Maintenant il sera très-aisé de résoudre cette question en général, lorsque le Quart-de-cercle est supposé tel que parmi un très grand nombre N d'observations, il y en ait a qui ayent la même erreur $= a$, b observations qui produisent la même erreur $= \beta$, c observations qui ayent la même erreur

erreur = γ & d observations dont l'erreur soit = δ , &c. où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, marquent en général des nombres quelconques positifs ou négatifs, de sorte qu'on ait

$$N = a + b + c + d + e + \&c.$$

Cela posé si l'on veut sçavoir la probabilité, qu'ayant fait n observations, la somme de tous les nombres tirés (supposant qu'à chaque observation réponde un billet, comme ci-dessus) soit ou 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou en général λ , on n'a qu'à développer cette puissance:

$$(a x^\alpha + b x^\beta + c x^\gamma + d x^\delta + \&c.)^n$$

& à prendre la somme de tous les termes affectés par la même puissance x^λ , qui étant divisée par N^n , donnera la probabilité qui convient à la somme de tous les nombres tirés = λ , ou bien à leur milieu $\frac{\lambda}{n}$. Toutes ces opérations se feront sans aucune difficulté, de la même manière que nous l'avons enseigné ci-dessus.