1788

Solutio problematis mechanici

Leonhard Euler

SOLUTIO PROBLEMATIS MECHANICI

Auctore L. EULERO.

Conventui exhibita die 25. April. 1782.

§. 1.

Tab. I. Fig. I.

Referat circulus XTGF, cujus centrum in C, globum sive cylindrum, aliudve corpus rotundum, plano inclinato AH incumbens, cujus inclinatio ad horizontem sit angulus $AHD = \zeta$; circuli autem radius ponatur $CX = a$. Corporis, hoc circulo repraesentati, axis maneat perpetuo horizontalis, ejusque massa statuatur $= M$, qua simul ejus pondus exprimatur. Momentum vero inertiae respectu axis sit $= Mkk$.

§. 2. Huic circulo, seu corpori rotundo, circumvolutum intelligatur filum, cujus terminus extremus fixus sit in puncto E, a plano inclinato distante intervallo $AE = a$, hoc est radio circuli aequali, cujus situs initio tangebat punctum E, filo scilicet penitus involuto. Hinc autem elapso tempore t pervenerit in situm figurâ repraesentatum, quem jam filum deferat in puncto T, ejusque portio ulterior circulo sit circumvoluta, indefinitae longitudinis, ut, quamdiu corpus descendat, evolvi queat.

§. 3.

§. 3. Nunc igitur circulus tangat planum inclinatum AH in puncto X, ac ponatur ſpatium $AX = x$, ita ut, ſumpto intervallo $AB = a$, ſit $BX = x - a$, eritque BX ſpatium motu corporis progreſſivo deſcriptum. Tum igitur, ducta recta EC, ea erit plano inclinato AH parallela, ideoque aequalis ipſi x; unde ducto radio CT erit anguli ECT cosinus $= \frac{a}{x}$, at anguli XCT ſive CET ſinus $= \frac{a}{x}$. Ponatur autem iſte angulus $XCT = CET = \vartheta$, ita ut ſit $\sin.\vartheta = \frac{a}{x}$.

§. 4. Hinc jam longitudo fili evoluti colligitur fore $ET = x\cos.\vartheta$. cui ſi aequalis ſtatuatur arcus TGF, erit F punctum circuli, quod initio applicatum erat puncto E, ubi ergo radius CF erat plano inclinato AH parallelus ſive cadebat in EG. Statuatur angulus motu rotatorio jam confectus $GCF = \Phi$, erit angulus $TCF = 90° - \vartheta + \Phi$, ex quo ipſe arcus $TGF = a(90° - \vartheta + \Phi)$, qui cum aequalis ſit rectae $TE = a\cot.\vartheta$, hinc concluditur angulus $\Phi = \cot.\vartheta - 90° + \vartheta$. Unde patet, tam ſpatium x quam angulum Φ per angulum ϑ definiri poſſe, cum ſit $X = \frac{a}{\sin.\vartheta}$ et $\Phi = \cot.\vartheta - 90° + \vartheta$.

§. 5. Ut jam in motum corporis noſtri ſuper plano inclinato deſcendentis inquiramus, obſervandum eſt, corpus primo ſollicitari a propria gravitate $= M$; unde oritur vis motum progreſſivum accelerans $= M\sin.\zeta$. Deinde vero corpus etiam urgetur a tenſione fili TE, quae autem tenſio etiamnunc penitus eſt incognita. Ponatur ea $= T$, et cum corpus urgeat ſecundum directionem TE, ea producit vim directioni motus progreſſivi contrariam ſecundum CE ſollicitantem $= T\cos.\vartheta$, ita ut motus progreſſivus centri C, ubi ſimul

cen-

centrum gravitatis totius corporis exiftere affumimus, vis fit $= M \, sin. \zeta - T \, cos. \vartheta$.

§. 6. Ex primis igitur motus principiis, fumendo elementum temporis dt conftans, ac denotante g altitudinem lapfus uno minuto fecundo peracti, fequitur fore $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = \frac{M \, sin. \zeta - T \, cos. \vartheta}{M}$. Hac fcilicet aequatione motus corporis progreffivus determinatur, unde autem nihil adhuc concludere licet, propterea quod vis T eft incognita. Hanc ergo aequationem combinari oportet cum ea, qua motus corporis gyratorius determinatur.

§. 7. Jam obfervavimus, corpus motu gyratorio jam abfolviffe angulum $GCF = \Phi$, in fenfum GF, qui ergo motus unice producitur a tenfione fili $ET = T$, cujus momentum, refpectu axis gyrationis, eft Ta, quod divifum per momentum inertiae Mkk dabit accelerationem motus gyratorii, quae ex principiis motus eft $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2}$. Habebimus ergo hanc aequationem: $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = \frac{T a}{M k k}$, ex qua colligitur ipfa vis incognita, feu tenfio $T = \frac{M k k \partial \partial \Phi}{2 a g \partial t^2}$.

§. 8. Subftituatur igitur ifte valor in aequatione ante inventa et facta divifione per maffam M prodibit ifta aequatio: $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = sin. \zeta - \frac{k k \partial \partial \Phi \, cos. \vartheta}{2 a g \partial t^2}$, unde fit $sin. \zeta = \frac{k k \partial \partial \Phi \, cos. \vartheta + a \partial \partial x}{2 a g \partial t^2}$, atque in hujus aequationis integratione erit elaborandum. Verum fi ambas incognitas x et Φ per angulum ϑ exprimere velimus, ope formularum $x = \frac{a}{sin. \vartheta}$ et $\Phi = cot. \vartheta - 90^0 + \vartheta$, ob differentialia fecundi gradus delaberemur in aequationem tantopere complicatam, ut nihil prorfus inde concludi poffet.

§. 9.

§. 9. Singulari autem artificio haec infignis difficultas fuperari poteft, cujus ope potius ipfe angulus ϑ ex calculo extrudi poterit, ita ut, etiamfi binae variabiles x et Φ in ea relinquantur, totum tamen negotium facile confici queat. Cum enim fit $\partial x = -\frac{a\partial\vartheta \cos.\vartheta}{\sin.\vartheta^2}$ et $\partial\Phi = -\frac{\partial\vartheta}{\sin.\vartheta^2} + \partial\vartheta = -\frac{\partial\vartheta \cos\vartheta^2}{\sin.\vartheta^2}$, colligitur $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\cos.\vartheta}{a}$, five $\cos.\vartheta = \frac{a\partial\Phi}{\partial x}$.

§. 10. In aequatione ergo differentio-differentiali ante inventa loco $\cos.\vartheta$ ifte valor $\frac{a\partial\Phi}{\partial x}$ fubftitutus hanc producit aequationem integrationem admittens: $\partial x \sin.\zeta = \frac{kk\partial\Phi\partial\partial\Phi + \partial x\partial\partial x}{2g\partial t^2}$, cujus integrale eft $C + x \sin.\zeta = \frac{\partial x^2 + kk\partial\Phi^2}{4g\partial t^2}$. Quoniam autem motus initium affumfimus ubi $x = a$, hoc integrale, habita conftantis ratione, erit $(x-a)\sin.\zeta = \frac{\partial x^2 + kk\partial\Phi^2}{4g\partial t^2}$.

§. 11. Ex hac jam aequatione ipfum tempus elapfum t determinari poterit. Cum enim fit

$4g(x-a)\partial t^2 \sin.\zeta = \partial x^2 + kk\partial\Phi^2$, ob $x = \frac{a}{\sin.\vartheta}$,

$\partial x = -\frac{a\partial\vartheta\cos.\vartheta}{\sin.\vartheta^2}$ et $\partial\Phi = -\frac{\partial\vartheta\cos.\vartheta^2}{\sin.\vartheta^2}$, his valoribus fubftitutis habebitur ifta aequatio:

$$\frac{4ag\partial t^2 \sin.\zeta(1-\sin.\vartheta)}{\sin.\vartheta} = \frac{\partial\vartheta^2 \cos.\vartheta^2}{\sin.\vartheta^2}(aa + kk\cos.\vartheta^2),$$ unde fit

$$\partial t = \frac{\partial\vartheta\cos.\vartheta}{2\sin.\vartheta}\sqrt{\frac{aa + kk\cos.\vartheta^2}{ag\sin.\zeta\sin.\vartheta(1-\sin.\vartheta)}},$$ unde colligitur

$$t = -\int\frac{\partial\vartheta\cos.\vartheta}{2\sin.\vartheta}\sqrt{\frac{aa + kk\cos.\vartheta^2}{ag\sin.\zeta\sin.\vartheta(1-\sin.\vartheta)}}.$$ Hic fcilicet fignum negativum praefigimus, quoniam angulus ϑ continuo decrefcit, qui angulus initio, ubi $t = 0$, erat $\vartheta = 90°$.

§. 12. Hinc igitur patet, tempus t pro quovis angulo ϑ definiri poffe per formulam quidem integralem, quam autem

 neque

neque per logarithmos neque per arcus circulares evolvere licet. Quo haec expreſſio aliquanto ſimplicior evadat, ponatur $\sin.\vartheta = s$, eritque tempus

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{ag\sin.\zeta}}\int\frac{\partial s}{s}\sqrt{\frac{aa+kk(1-ss)}{s(1-s)}},$$

ac ſi ponatur $s = \frac{1}{z}$ erit

$$t = \frac{+1}{2\sqrt{ag\sin.\zeta}}\int\frac{\partial z}{z}\sqrt{\frac{(aa+kk)zz-kk}{z-1}}.$$

Viciſſim ergo, conceſſis quadraturis, ad quodvis tempus t angulus ϑ reperiri poterit, quo invento etiam ſpatium x cum angulo Φ habebitur.

§. 13. Longe autem difficilius eſt tenſionem fili ET per expreſſionem finitam aſſignare, quippe quae hactenus fuerat incognita atque hanc ob cauſſam ex calculo expulſa. Erat autem ex motu gyratorio $\frac{Ta}{Mkk} = \frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$, unde neceſſe eſt differentiale ſecundum $\partial\partial\Phi$ ad differentiale primi gradus revocare, quod praeſtari poterit ope poſtremae aequationis differentio-differentialis, unde integrale hauſimus, quaeque erat $\partial x\partial\partial x + kk\partial\Phi\partial\partial\Phi = 2g\partial t^2\partial x\sin.\zeta$. Fuerat autem $\partial x\cos\vartheta = a\partial\Phi$, hinc differentiando colligitur $a\partial\partial\Phi = \partial\partial x\cos.\vartheta - \partial\vartheta\partial x\sin.\vartheta$, ex qua aequatione oritur $\partial\partial x = \frac{a\partial\partial\Phi}{\cos.\vartheta} + \partial x\partial\vartheta\, tag\,\vartheta$, qui valor in illa ſubſtitutus praebet hanc: $\partial\partial\Phi\left(\frac{a}{\cos.\vartheta} + \frac{kk\cos.\vartheta}{a}\right) = 2g\partial t^2\sin.\zeta - \partial x\partial\vartheta\, tag.\vartheta$. Sicque nunc differentio-differentiale $\partial\partial\Phi$ per differentialia primi gradus definitur. Atque ſi loco $2g\partial t^2$ et ∂x valores ſupra per $\partial\vartheta$ expreſſi ſubſtituantur, orietur

$$\frac{\partial\partial\Phi(aa+kk\cos.\vartheta^2)}{a\cos.\vartheta} = \partial\vartheta^2\left(\frac{aa(1+\sin.\vartheta^2-2\sin.\vartheta^3)+kk\cos.\vartheta^4}{2a\sin.\vartheta^3(1-\sin.\vartheta)}\right)$$

§. 14.

§. 14. Quod si ergo hinc valor pro $\partial\partial\Phi$ in formula pro tensione fili T inventa substituatur, prodibit

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{M}kk}{2ag\partial t^2} + \frac{\partial\vartheta^2 \cos.\vartheta\,(aa(1+\sin.\vartheta^2-2\sin.\vartheta^3)+kk\cos.\vartheta^4)}{2\sin.\vartheta^3\,(1-\sin.\vartheta)(aa+kk\cos.\vartheta^2)}$$

Est vero $2ag\partial t^2 = \frac{\partial\vartheta^2\cos.\vartheta^2\,(aa+kk\cos.\vartheta^2)}{2\sin.\vartheta^2\;\sin.\zeta\,\sin.\vartheta'(1-\sin.\vartheta)}$, unde fit tensio

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{M}kk\sin.\zeta\,(aa(1+\sin.\vartheta^2-2\sin.\vartheta^3)+kk\cos.\vartheta^4)}{\cos.\vartheta\,(aa+kk\cos.\vartheta^2)^2}$$

quae expressio quia solum angulum ϑ involvit, ad quodvis tempus elapsum t tensio T absolute assignari poterit et cum pondere M comparari.

§. 15. Denique etiam tam celeritas corporis progressiva, quae est $\frac{\partial x}{\partial t}$, quam gyratoria $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, satis eleganter definiri potest. Si enim ponamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = u$, erit aequatio $vv + kkuu = 4g(x-a)\sin\zeta$. Unde simul patet principium virium vivarum hic egregie conservari. Cum enim sit $\mathrm{M}vv$ vis viva motus progressivi et $\mathrm{M}kkuu$ vis viva motus gyratorii, erit summa utriusque $\mathrm{M}(vv+kkuu) = 4g\mathrm{M}(x-a)\sin\zeta$, cujus aequationis membrum postremum exprimit descensum verticalem centri gravitatis corporis in massam M ductum, cui constat semper aequalem esse debere totam vim vivam hoc descensu generatam.

§. 16. Quin etiam ex solo principio conservationis virium vivarum ista aequatio facile deduci potuisset. Neque vero patet quomodo hinc ipsa tensio fili, qua insigne momentum perfectae solutionis est constituendum, derivari potuisset. Quam ob caussam operam dedi, ut universam hujus Problematis solutionem ex primis motus principiis repeterem.