1788

De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta

Leonhard Euler

DE MOTV TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM SVPER EADEM LINEA RECTA.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 12 *Decemb.* 1776.

§. 1.

Hoc argumentum continet ſine dubio caſum ſimpliciſſimum celeberrimi illius problematis, quo motus trium corporum ſe inuicem attrahentium inueſtigandus proponitur. Quamobrem ſi praeſens quaeſtio, qua tria illa corpora ſuper eadem linea recta moueri ſumuntur, omnem ſagacitatem Geometrarum eludit, atque adeo vires analyſeos ſuperare videtur, nullo certe modo problematis illius generalis ſolutio ſperari poterit. Hanc ob rem haud inutile erit, iſtum caſum ſimpliciſſimum accuratius euoluere, atque omnes difficultates, quae eius ſolutionem impediunt, omni adhibita attentione perpendere, quo clarius appareat, quanta adhuc analyſeos incrementa deſiderentur, antequam problematis generalis ſolutio cum ſucceſſu ſuſcipi queat.

§. 2. Sit igitur O V linea recta, ſuper qua tria corpora A B C ſe inuicem attrahentia moueantur, quorum maſſas per

per easdem litteras A, B, C indicemus. Iam in illa recta accipiatur pro lubitu punctum fixum O, a quo ad quoduis tempus distantias illorum corporum inuestigari oporteat. Elapso igitur tempore quocunque $= t$, vocentur istae distantiae $OA = x$, $OB = y$, et $OC = z$, vbi quidem assumimus esse $y > x$ et $z > y$; sicque binorum corporum A et B distantia erit $AB = y - x$, distantia vera $AC = z - x$, et distantia $BC = z - y$, quarum distantiarum quadratis vires, quibus bina horum corporum se mutuo attrahunt, reciproce proportionales statuuntur. Hinc ergo corpus A a corpore B trahitur vi $= \frac{B}{(y-x)^2}$ atque a C vi $= \frac{C}{(z-x)^2}$. Deinde vero corpus B ad A trahitur vi $= \frac{A}{(y-x)^2}$ et ad C vi $= \frac{C}{(z-y)^2}$. Denique corpus C trahitur ad A vi $= \frac{A}{(z-x)^2}$ et ad B vi $= \frac{B}{(z-y)^2}$. Tab. III. Fig. 3.

§. 3. Ex his igitur viribus secundum principia motus orientur tres sequentes aequationes:

I. Pro motu corporis A

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = + \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2}.$$

II. Pro motu corporis B

$$\frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = - \frac{A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}.$$

III. Pro motu corporis C

$$\frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = - \frac{A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2};$$

atque in his tribus aequationibus omnia continentur, quibus motus horum trium corporum determinatur. Vbi imprimis notari oportet, has formulas tam diu tantum valere, quam diu fuerit $y > x$ et $z > y$, veluti figura ostendit. At vero si nunc fuerit $y > x$, in motus continuatione interuallum $AB = y - x$ eousque tantum imminui potest, quoad corpora A et B ad contactum

tactum perueniant: ſtatim vero atque hoc contigerit, colliſio fiet, qua totus motus aliam indolem accipiet, prouti corpora fuerint elaſtica nec ne, qui effectus neutiquam in noſtris formulis continetur; vnde euidens eſt, motum in his formulis contentum diutius durare non poſſe, quam donec duo horum corporum ad contactum peruenerint.

§. 4. Statim autem patet, ob ternas diſtantias variabiles x, y & z, quibuscum etiam variabilitas temporis coniungi debet, nullam harum trium aequationum per ſe integrationem admittere poſſe. Per certas autem combinationes aequationes inde integrabiles deriuari poſſunt, quarum praecipua eſt haec: I. A + II. B + III. C, quae praebet hanc aequationem:

$$\frac{A \partial\partial x + B \partial\partial y + C \partial\partial z}{\partial t^2} = 0$$

quae ducta in ∂t et integrata praebet;

$$A \partial x + B \partial y + C \partial z = \alpha \partial t,$$

hincque denuo integrando

$$A x + B y + C z = \alpha t + \beta,$$

vbi litterae α et β denotant conſtantes per geminam integrationem ingreſſas.

§. 5. Haec autem aequatio oſtendit, commune centrum grauitatis trium corporum noſtrorum motu vniformi ſuper recta OV proferri. Quod ſi enim hoc tempore commune centrum grauitatis corporum A, B et C ſtatuatur in puncto G, eiusque diſtantia ab O vocetur $OG = v$, ex natura centri grauitatis notum eſt fore

$$A.x + B.y + C.z = (A + B + C)\, v.$$

Hinc igitur erit

$$(A + B + C)\, v = \alpha t + \beta;$$

vnde

vnde cum celeritas progreſſiua iſtius centri grauitatis ſit $= \frac{\partial v}{\partial t}$, erit iſta celeritas $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha}{A + B + C}$, ideoque conſtans. Vnde manifeſtum eſt, quomodocunque tria corpora inter ſe moueantur, eorum comune centrum grauitatis G perpetuo motu vniformi proferri, niſi forte eueniat, vt prorſus quieſcat, quod fiet, ſi fuerit $\alpha = 0$.

§. 6. Deinde etiam alia aequatio integrabilis ex tribus inuentis formari poteſt, ope huius combinationis:

$$\text{I. } A\partial x + \text{II. } B\partial y + \text{III. } C\partial z,$$

quando quidem hinc ſequens aequatio naſcetur:

$$\frac{A\partial x \partial\partial x + B\partial y \partial\partial y + C\partial z \partial\partial z}{\partial t^2} = \frac{AB(\partial x - \partial y)}{(y - x)^2} + \frac{AC(\partial x - \partial z)}{(z - x)^2} + \frac{BC(\partial y - \partial z)}{(z - y)^2}.$$

cuius integrale manifeſto colligitur eſſe

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{2\partial t^2} = \frac{AB}{y - x} + \frac{AC}{z - x} + \frac{BC}{z - y} + \Delta.$$

§. 7. Haec aequatio continet principium foecundiſſimum virium viuarum, vel etiam minimae actionis. Cum enim $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis A, $\frac{\partial y}{\partial t}$ celeritatem corporis B, et $\frac{\partial z}{\partial t}$ celeritatem corporis C, quibus corpora a puncto fixo O recedunt, vires viuae horum corporum erunt: primi $A = \frac{A\partial x^2}{\partial t^2}$, ſecundi $B = \frac{B\partial y^2}{\partial t^2}$ et tertii $C = \frac{C\partial z^2}{\partial t^2}$; inde aequatio modo inventa nobis declarat, ſummam virium viuarum ſemper aequari huic formulae:

$$\frac{2AB}{y - x} + \frac{2AC}{z - x} + \frac{2BC}{z - y} + \Delta;$$

quae ergo quantitas eatenus increſcit, quatenus diſtantiae binorum corporum fiunt minores; dum contra, ſi corpora a ſe invicem recedant, ſumma virium viuarum diminuitur.

§. 8. Duas igitur iam nacti ſumus aequationes integratas, quarum prior adeo duplicem integrationem admiſit: vnde ſi quis inſuper vnicam aequationem integratam eruere poſſet, is certe plurimum praeſtitiſſe eſſet cenſendus, quanquam tractatio harum aequationum differentialium primi gradus adhuc maximis difficultatibus foret inuoluta, ita vt etiam tum vix vlla ſolutio idonea expectari poſſet. Quantumuis autem Geometrae in hac inueſtigatione elaborauerint, nulla tamen etiamnunc aequatio integrabilis deduci potuit. Interim tamen ſequenti modo aequationem maxime memorabilem deducere licet, vnde haud parum lucis expectari poterit.

§. 9. Euoluamus ſcilicet hanc combinationem: I. $Ax+$ II. $By+$ III. Cz, quae dabit hanc aequationem:

$$\frac{Ax\partial\partial x + By\partial\partial y + Cz\partial\partial z}{\partial t^2} = -\frac{AB}{y-x} - \frac{AC}{z-x} - \frac{BC}{z-y}.$$

Ante autem per integrationem inuenimus

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y} + \Delta,$$

vnde ſi has duas aequationes inuicem addamus, ob

$$x\partial\partial x + \partial x^2 = \partial. x\partial x = \tfrac{1}{2}. \partial\partial. xx,$$

ſimilique modo ob

$$y\partial\partial y + \partial y^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial. yy \text{ et}$$
$$z\partial\partial z + \partial z^2 = \tfrac{1}{2}\partial\partial. zz,$$

naſcetur ſequens aequatio maxime memorabilis:

$$\frac{A.\partial\partial. xx + B.\partial\partial. yy + C.\partial\partial. zz}{2\partial t^2} = \frac{AB}{y-x} + \frac{AC}{z-x} + \frac{BC}{z-y} + \Delta.$$

Neque tamen etiamnunc patet, qualis fructus hinc percipi queat, quoniam integrale membri dextri, ſi per ∂t multiplicetur, nullo modo ſperari poteſt.

§. 10. Quoniam autem iam inuenimus centrum grauitatis commune trium noſtrorum corporum vniformiter in directum

rectum

rectum progredi, vnde ad quoduis tempus eius situm seu distantiam $OG = v$ facillime assignare licebit, hoc obseruato sufficiet binas tantum distantias inter corpora nosse, quo pacto tota inuestigatio ad pauciores quantitates variabiles reducetur. Si enim ponamus distantiam $AB = p$ et distantiam $BC = q$, ita vt sit $y - x = p$ et $z - y = q$, erit $z - x = p + q$. Deinde ob $y = x + p$ et $z = x + p + q$, tres aequationes primo inuentae has induent formas:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = \frac{B}{pp} + \frac{C}{(p+q)^2};$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial x + \partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{A}{pp} + \frac{C}{qq};$$

$$\text{III. } \frac{\partial\partial x + \partial\partial p + \partial\partial q}{\partial t^2} = -\frac{A}{(p+q)^2} - \frac{B}{qq};$$

vnde si prima a secunda, tum vero secunda a tertia subtrahatur, impetrabuntur binae sequentes aequationes pro definiendis ad quoduis tempus t binis nouis variabilibus p et q:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{qq} - \frac{C}{(p+q)^2};$$

$$\text{II. } \frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(p+q)^2} - \frac{(B+C)}{qq}.$$

§. 11. Quoniam primo inuenimus esse

$$Ax + By + Cz = \alpha t + \beta,$$

si loco y et z valores supra assignatos substituamus, habebimus

$$(A + B + C)x + (B + C)p + Cq = \alpha t + \beta.$$

Per centrum autem grauitatis G reperta est haec aequatio:

$$(A + B + C)v = \alpha t + \beta,$$

vnde tres quantitates x, y et z definire poterimus; erit scilicet

$$x = v - \frac{(B+C)p - Cq}{A+B+C},$$

hincque porro fiet

$$y = v + \frac{Ap - Cq}{A+B+C} \text{ et}$$

$$z = v + \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C}.$$

§. 12.

§. 12. Quia centrum grauitatis G vel quiefcit vel vniformiter in directum progreditur, pofteriore cafu, fi toti fyftemati motus aequalis et contrarius ei, quo centrum grauitatis procedit, imprimi concipiatur, centrum grauitatis ad quietem redigetur. Quare cum nihil impediat, quominus punctum fixum O in ipfo centro grauitatis G conftituamus, ponamus $v = 0$, eritque multo fimplicius:

$$x = \frac{-(B+C)p - Cq}{A+B+C} = GA,$$

$$y = \frac{Ap - Cq}{A+B+C} = GB,$$

$$z = \frac{Ap + (A+B)q}{A+B+C} = GC,$$

Sicque fimulac quantitates p et q affignare licuerit, etiam fingulorum corporum loca innotefcent.

§. 13. Hinc etiam aequationem, quam fupra integrare licuit, quae erat

$$\frac{A\partial x^2 + B\partial y^2 + C\partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta,$$

ad iftum cafum accommodare licebit. Ponamus autem breuitatis gratia $A + B + C = \Sigma$, eritque

$$A\partial x^2 = \frac{A}{\Sigma^2}(B^2\partial p^2 + 2BC\partial p(\partial p + \partial q) + C^2(\partial p + \partial q)^2),$$

$$B\partial y^2 = \frac{B}{\Sigma^2}(A^2\partial p^2 - 2AC\partial p\partial q + C^2\partial q^2),$$

$$C\partial z^2 = \frac{C}{\Sigma^2}(A^2(\partial p + \partial q)^2 + 2AB\partial q(\partial p + \partial q) + B^2\partial q^2),$$

quae tres formulae in vnam fummam collectae dabunt:

$$\frac{1}{\Sigma^2}\left\{\begin{array}{l} + AB(A+B)\partial p^2 + AC(A+C)(\partial p + \partial q)^2 \\ + BC(B+C)\partial q^2 + 2ABC(\partial p + \partial q)^2 \end{array} - 2ABC\partial p\partial q\right\},$$

quae porro reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{\Sigma}(AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2),$$

quo valore fubftituto aequatio illa integrata transmutabitur in hanc formam:

$$\frac{AB\partial p^2 + BC\partial q^2 + AC(\partial p + \partial q)^2}{(A+B+C)\partial t^2} = \frac{2AB}{p} + \frac{2AC}{p+q} + \frac{2BC}{q} + \Delta.$$

§. 14.

§. 14. Quanquam haec aequatio ſatis eſt concinna et elegans, neutiquam tamen vlla via patet, inde ſolutionem quaeſtionis deriuandi, ita vt iſta quaeſtio merito profundiſſimae indaginis ſit cenſenda, et quicunque ſtudium et operam in his aequationibus reſoluendis conſumere voluerit, mox percipiet, ſe oleum et operam perdidiſſe; vnde manifeſto liquet, quid de iis ſit iudicandum, qui ſe iactant, in ſolutione problematis generalis de motu trium corporum ſe mutuo attrahentium ſatis felici cum ſucceſſu elaboraſſe.

§. 15. Praecipua cauſa harum difficultatum in eo poſita eſſe videtur, quod iſta quaeſtio adhuc nimis eſt generalis, quoniam ad maſſas trium corporum quaſcunque atque ad motus quoſcunque, qui iis imprimi potuerunt, extenditur. Datur enim vtique caſus maxime ſpecialis, quo motum horum trium corporum reuera aſſignare licet; ſemper enim eiusmodi motum in his corporibus concipere datur, vt binae diſtantiae p et q perpetuo eandem inter ſe rationem ſeruent, ad quem caſum euoluendum ponatur $q = np$, ac duae aequationes §. 10. datae ſequentem formam induent:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp} + \frac{C}{nnpp} - \frac{C}{(1+n)^2 pp};$$
$$\text{II. } \frac{n\,\partial\partial p}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{A}{(1+n)^2 pp} - \frac{(B+C)}{nnpp}.$$

§. 16. Statim autem hic perſpicitur, eiusmodi relationem inter numerum n et maſſas A, B, C exiſtere poſſe, vt hae duae aequationes euadant identicae, id quod eueniet, ſi membrum dextrum prius per n multiplicatum aequale ſtatuatur poſteriori, ex quo naſcetur haec aequatio:

$$-n(A+B) + \frac{C}{n} - \frac{nC}{(1+n)^2} = A - \frac{A}{(1+n)^2} - \frac{(B+C)}{nn},$$

vnde numerum n per reſolutionem elicere licebit; haec autem aequatio ſtatim contrahitur in hanc formam:

$$-n(A+B)+\frac{(1+2n)C}{n(1+n)^2}=\frac{(2n+nn)A}{(1+n)^2}-\frac{(B+C)}{nn},$$

quae ducta in $n^2(1+n)^2$ a fractionibus liberabitur, eritque

$$-(A+B)n^3(1+n)^2+Cn(1+2n)=An^2(2n+nn) \\ -(B+C)(1+n)^2,$$

in qua aequatione incognita n ad quintam poteſtatem aſſurgit, ideoque difficillimam reſolutionem poſtulat. Notetur autem hanc aequationem ſecundum litteras A, B et C diſpoſitam fieri

$$An^3(3+3n+nn)-B(1+n)^2(1-n^3)-C(1+3n+3nn)=0.$$

Certum autem eſt hanc aequationem vnam ad minimum habere radicem realem, quae ſi fuerit poſitiua, ſolutionem praebet deſideratam. At quia hinc coëfficiens ſupremi termini fit $A+B$, ideoque ſemper poſitiuus, terminus autem abſolutus eſt $=(B+C)$, ideoque ſemper negatiuus, id indicium eſt, iſtam aequationem certe habere radicem realem poſitiuam, qua ergo negotium noſtrum conficietur.

§. 17. Caſus hic imprimis notatu dignus occurrit, quo ambo corpora extrema A et C ſtatuuntur inter ſe aequalia, poſito enim $C=A$, aequatio habebit hanc formam:

$$A(n-1)(n^4+4n^3+7nn+4n+1-B(n+1)^2(1-n^3)=0,$$

quae manifeſto habet factorem $n-1$, ita vt ſit $n=1$ et $q=p$; hoc ergo caſu, ſi modo ambo corpora extrema a medio fuerint aequaliter remota et aequales motus acceperint, tum perpetuo a corpore medio aequaliter diſtabunt, et motu ſatis regulari eo pertingent. Poſtquam autem illam aequationem per $n-1$ diuiſerimus, prodit iſta:

$$A(n^4+4n^3+7nn+4n+1)+B(n+1)^2(nn+n+1)=0,$$

cuius nullam amplius radicem poſitiuam eſſe poſſe manifeſtum eſt.

§. 18.

§. 18. Inuento autem valore idoneo pro littera n, quoniam ambae aequationes principales identicae euadunt, si ponamus $-A-B+\frac{C}{nn}-\frac{C}{(1+n)^2}=N$, totus motus definiri debebit ex hac aequatione: $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2}=\frac{N}{pp}$, quae ducta in ∂p et integrata dat $\frac{\partial p^2}{2\partial t^2}=-\frac{N}{p}+\frac{N}{a}$; vbi cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem corporis, euidens est, corpus fuisse in quiete vbi fuerit $p=a$. Cum igitur sit $\frac{\partial p}{\partial t\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{N(p-a)}}{ap}$, inde colligitur

$$\partial t\sqrt{2N}=\frac{\partial p\sqrt{ap}}{\sqrt{(p-a)}}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(pp-ap)}},$$

quae per logarithmos facile integratur. Sin autem quantitas N fuerit negatiua, puta $N=-M$, aequatio erit

$$\partial t\sqrt{2M}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}},$$

cuius integratio per arcus circulares absoluitur. Facile autem ostendi potest, valorem N semper esse negatiuum; si enim foret positiuus, quia motus initio fuerat $p=a$, sequeretur deinceps distantiam p augeri, seu ex formula $\sqrt{(p-a)}$ sequeretur, deinceps fieri $p>a$, quod est absurdum.

§. 19. Consideremus casum supra memoratum quo $C=A$ et $n=1$, ideoque $q=p$; aequatio igitur motum definiens, ob $N=-B-\frac{A}{4}$ ideoque negatiuum, et $M=B+\frac{1}{4}A$, erit

$$\partial t\sqrt{(2B+\tfrac{1}{2}A)}=\frac{p\partial p\sqrt{a}}{\sqrt{(ap-pp)}}.$$

Cum igitur sit

$$\partial.\sqrt{(ap-pp}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p-p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}, \text{ erit}$$

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}=\frac{\frac{1}{2}a\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}-\partial.\sqrt{(ap-pp)},$$

vnde integrando erit

$t\sqrt{}$

$$t\sqrt{\frac{2B+\frac{1}{2}A}{a}}=\int\frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}-\sqrt{(ap-pp)}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}}=a\,A\,\text{ſin.}\sqrt{(\tfrac{p}{a}},$$

ita vt habeamus:

$$t=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(2B+\frac{1}{2}A)}}\left(a\,A\,\text{ſin.}\sqrt{\tfrac{p}{a}}-\sqrt{ap-pp}\right).$$

Quoniam autem caſus quo $q=np$ vnicus eſt, quem etiam nunc reſoluere licet, is vtique meretur vt eius ſolutionem clarius ob oculos ponamus.

EVOLVTIO CASVS

quo binae diſtantiae AB et BC perpetuo eandem inter ſe rationem conſeruant.

§. 20. Cum poſuerimus $AC=p$ et $BC=q$, ſtatuamus, vt modo fecimus, $q=np$, ac vidimus, hunc numerum n ex iſta aequatione definiri debere:

$$An^3(nn+3n+3)-B(1+n)^2(1-n^3)-C(1+3n+3nn)=0,$$

quae ſecundum poteſtates ipſius n diſpoſita hanc formam accipit:

$$(A+B)n^5+(3A+2B)n^4+(3A+B)n^3-(3C+B)nn$$
$$-(3C+2B)n-B-C=0,$$

quae, cum ſit ordinis quinti, et termini contrariis ſignis afficiantur, ſemper vnam habebit radicem realem poſitiuam, quae ergo ad noſtrum inſtitutum erit accommodata, propterea quod diſtantia $BC=q$ per hypotheſin eſt poſitiua.

§. 21.

§. 21. Inuento autem tali valore idoneo pro n, quaeratur quantitas M, vt fit $M = A + B - \frac{C}{nn} + \frac{C}{(1+n)^2}$. Cum igitur ex fuperiore aequatione fit

$$B = \frac{A n^3 (nn + 3n + 3) - C(1 + 3n + 3nn)}{(1+n)^2 (1 - n^3)},$$

hoc valore introducto erit

$$M = \frac{A(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{(1+n)^2 (1 - n^3)} - \frac{C(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1+n)^2 (1-n^3)},$$

fiue

$$M = \frac{(A nn - C)(1 + 2n + nn + 2n^3 + n^4)}{nn(1+n)^2 (1-n^3)},$$

qui valor, cum vt iam obferuauimus femper debeat effe pofitiuus, hinc concludere licet, quoties fuerit $A nn > C$, toties effe debere $n < 1$; contra vero fi fuerit $A nn < C$, tum femper fore $n > 1$.

§. 21. His circa numerum M obferuatis, fupra inuenimus hanc aequationem differentialem inter p et t

$$\partial t \sqrt{2M} = \frac{p \partial p \sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}};$$

vnde cum $\frac{\partial p}{\partial t}$ exprimat celeritatem, qua interuallum $AB = p$ crefcit, erit ifta celeritas $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\sqrt{2M(ap - pp)}}{p\sqrt{a}}$. Sin autem diftantiae inter corpora decrefcant, quoniam extractio radicis quadratae huc perduxit, fcribi debet

$$\partial t \sqrt{2M} = -\frac{p \partial p \sqrt{a}}{\sqrt{(ap - pp)}}.$$

Vtroque cafu ergo difcimus, vbi fiet $p = a$ ideoque $q = na$, tum vtramque corporis celeritatem fieri $= 0$. At fi eueniat $p = 0$, id quod in ipfo corporum contactu contingit, tum vtramque celeritatem fieri infinitam. Verum, ob extenfionem corporum, fieri nequit, vt haec tria corpora in vnum punctum conueniant.

§. 23. Denuo autem istam aequationem differentialem integrare licebit; cum enim sit

$$\frac{\partial t\sqrt{2M}}{\sqrt{a}} = \frac{p\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}} = -\sqrt{(ap-pp)} + \frac{\frac{1}{2}a\,\partial p}{\sqrt{(ap-pp)}},$$

erit integrale

$$t\sqrt{\frac{2M}{a}} = \alpha - \sqrt{(ap-pp)} + a\,\text{A fin.}\sqrt{\frac{p}{a}},$$

in qua formula signa erunt mutanda, si distantia p decrescat. Verum ipse calculus istud discrimen innuit: si enim tempus t computemus ab eo statu, quo fuerat $p = a$, atque adeo celeritas concursus nulla, constantem α hinc definire licet; fiet enim $0 = \alpha + \frac{a\pi}{2}$, vnde fit $\alpha = -\frac{a\pi}{2}$. Quoniam autem ab hoc statu corpora ad se mutuo accedunt, mutatis signis erit

$$t\sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \sqrt{(ap-pp} - a\,\text{A fin.}\sqrt{\frac{p}{a}},$$

vnde patet, corpora inuicem esse coitura, ponendo $p = 0$, elapso tempore $t = \frac{1}{2}\pi\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}$.

§. 24. Quo hanc expressionem propius ad vsum accommodemus, introducamus angulum Φ, cuius sinus sit $\sqrt{\frac{p}{a}}$, vnde fiet $p = a\,\text{fin.}\,\Phi^2$ et $q = n\,a\,\text{fin.}\,\Phi^2$; tum autem erit

$$\sqrt{(ap-pp)} = a\sqrt{\text{fin.}\,\Phi\,\text{cof.}\,\Phi} = \tfrac{1}{2}a\,\text{fin.}\,2\Phi.$$

Hinc igitur aequatio nostra integralis erit

$$t\sqrt{\frac{2M}{a}} = \frac{a\pi}{2} + \frac{a}{2}\,\text{fin.}\,2\Phi - a\Phi, \text{ ideoque}$$

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2M}}\left(\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,2\Phi - \Phi\right).$$

Quod si hic porro ponamus $\frac{\pi}{2} - \Phi = \frac{1}{2}\omega$, erit $\text{fin.}\,2\Phi = \text{fin.}\,\omega$, hocque valore substituto fiet

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2M}}(\omega + \text{fin.}\,\omega).$$

§. 25. Ecce igitur ſolutio huc eſt reducta, vt ad datum tempus t quaeri debeat angulus ω, ita vt ſit

$$\omega + \text{ſin.}\ \omega = \frac{2t\sqrt{2M}}{a\sqrt{a}},$$

quo inuento, cum ſit $\Phi = 90^\circ - \frac{1}{2}\omega$, ideoque $\text{ſin.}\ \Phi = \text{coſ.}\ \frac{1}{2}\omega$, pro hoc tempore reperietur diſtantia

$$AB = p = a\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}\omega^2 = \tfrac{1}{2}a(1 + \text{coſ.}\ \omega),\ \text{et}$$

$$q = \tfrac{1}{2}na(1 + \text{coſ.}\ \omega).$$

CONSIDERATIO CASVS

quo maſſa vnius corporis plane euaneſcit.

§. 26. Quoniam maſſae trium corporum praecipuam cauſſam continent omnium difficultatum, quibus haec quaeſtio premitur, non immerito ſuſpicari licet, has difficultates maximam partem diſſipari debere, ſi vni trium corporum tribuatur maſſa euaneſcens, ita vt ab hoc corpore motus duorum reliquorum plane non turbetur, quae ergo inter ſe motu maxime regulari ferentur, quaſi tertium corpus plane abeſſet. Poſito autem $C = 0$, diſtantiis vero vt ſupra $AB = p$ et $BC = q$, pro motu determinando habebuntur duae ſequentes aequationes: I. $\frac{\partial\partial p}{\partial t^2} = -\frac{(A+B)}{pp}$ et II. $\frac{\partial\partial q}{\partial t^2} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2}$.

§. 27. Hic ſtatim aequationem priorem integrare licet, quae poſito breuitatis gratia $A + B = m$ fit

$$\frac{\partial p^2}{2\partial t^2} = +\frac{m}{p} - \frac{m}{a} = \frac{m(a-p)}{ap},$$

vnde fit $\partial t^2 = \frac{ap\,\partial p^2}{2m(a-p)}$, qui valor ſi in altera aequatione ſubſtituatur, prodibit aequatio binas tantum variabiles p et q inuoluens, a cuius ergo reſolutione totum negotium pendebit. Cum autem in altera aequatione elementum ∂t pro conftante fit affumtum, quo haec confideratio exuatur, multiplicetur aequatio per ∂q, et repraefentari poterit fub hac forma:

$$\tfrac{1}{2}.\ \partial.\ \frac{\partial q^2}{\partial t^2} = \frac{A\,\partial q}{pp} - \frac{B\,\partial q}{qq} - \frac{A\,\partial q}{(p+q)^2},$$

vnde, facta fubftitutione, inter quantitates p et q obtinebitur ifta aequatio:

$$\tfrac{1}{2}.\ \partial.\ \frac{2m(a-p)\,\partial q^2}{a p\,\partial p^2} = \frac{A\,\partial q}{pp} - \frac{B\,\partial q}{qq} - \frac{A\,\partial q}{(p+q)^2}.$$

Interim tamen haec aequatio, quomodocunque tractetur, omne ftudium in ea refoluenda fruftra impendi deprehendetur, folo cafu excepto, quo ambae quantitates p et q conftantem inter fe tenent rationem. Si enim ponamus $q = np$, ob $\partial q = n\partial p$, aequatio hanc induet formam:

$$\tfrac{1}{2}\partial.\ \frac{2mnn(a-p)}{ap} = \frac{nA\,\partial p}{pp} - \frac{B\,\partial p}{npp} - \frac{nA\,\partial p}{pp(1+n)^2},$$

membrum vero finiftrum euolutum dat $-\frac{2mnn\,\partial p}{pp}$, vnde totam aequationem per $\frac{\partial p}{pp}$ diuidendo prodit

$$-mnn = nA - \frac{B}{n} - \frac{nA}{(1+n)^2},$$

quae nullam amplius variabilem continet, fed ipfi numero n inueniendo inferuit. Facile autem patet ob $m = A + B$, eandem haberi aequationem, quam iam fupra pro numero n definiendo dedimus, fi quidem ponatur $C = 0$, vnde huic cafui immorari fuperfluum foret.

§. 28. Euoluamus autem in genere membrum finiftrum, ac fumendo elementum ∂p conftans, haec aequatio euoluta emerget:

$$\frac{2m(a-p)\,\partial\partial q}{ap\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{pp\,\partial p} = \frac{A}{pp} - \frac{B}{qq} - \frac{A}{(p+q)^2},$$

pro qua refoluenda nulla plane via patet, atque omnia artificia, quae adhuc funt inuenta, nequicquam in fubfidium vocantur. Quin etiam, quamuis fumamus $a = \infty$, quo cafu

aequatio

aequatio fit homogenea, nihil tamen praeſtari poſſe deprehendemus; aequatio autem habebit hanc formam:

$$\frac{2m\,\partial\partial q}{p\,\partial p^2} - \frac{m\,\partial q}{p\,p\,\partial p} = \frac{A}{p\,p} - \frac{B}{q\,q} - \frac{A}{(p+q)^2}.$$

Facile enim intelligitur, ſi haec aequatio vires noſtras ſuperet, prioris ſolutionem fruſtra ſuſcipi.

§. 29. Quoniam haec poſtrema aequatio eſt homogenea, eam more ſolito tractemus, ponendo $q = up$ et $\partial q = s\partial p$, vnde ſtatim fit $\frac{\partial p}{s} = \frac{\partial u}{s-u}$. Facta autem hac ſubſtitutione ipſa aequatio induet ſequentem formam:

$$\frac{2m\,\partial s}{p\,\partial p} - \frac{m\,s}{p\,p} = \frac{A}{p\,p} - \frac{B}{u\,u\,p\,p} - \frac{A}{p\,p\,(1+u)^2},$$

quae multiplicata per $p\,\partial p$ praebet

$$2m\,\partial s = \frac{\partial p}{p}\left(m\,s + A - \frac{B}{u\,u} - \frac{A}{(1+u)^2}\right),$$

vnde ſi loco $\frac{\partial p}{p}$ ſcribatur valor modo datus $\frac{\partial u}{s-u}$, per eumque diuidatur, peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{2m\,\partial s\,(s-u)}{\partial u} = m\,s + A - \frac{A}{(1+u)^2} - \frac{B}{u\,u},$$

vbi notetur eſſe $m = A + B$, quae quanquam eſt primi gradus et duas tantum variabiles s et u inuoluit, fruſtra tamen omnis labor in ea ſoluenda impendi videtur, vnde multo minus quicquam circa aequationem aliquanto generaliorem, in qua inerat conſtans a, ſperare licebit, niſi forte quis obiicere velit, ſi inſuper vel maſſa A vel B euaneſcens ſtatueretur, ſolutionem facile perfici poſſe, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, neque hic efferri meretur.