1788

De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrice ducendis

Leonhard Euler

DE LINEIS RECTIFICABILIBVS IN SVPERFICIE SPHAEROIDICA QVACVNQVE GEOMETRICE DVCENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4. Iul. 1776.

§. 1.

Maxime ardua eſt quaeſtio, quando in ſuperficie corporis cuiuscunque eiusmodi lineae geometrice ducendae requiruntur, quarum omnes arcus algebraice aſſignare liceat; cum adeo in cylindris, etſi pro genere ſimpliciſſimo huiusmodi corporum ſint habendi, praeter lineas rectas axi parallelas nullae aliae curuae rectificabiles duci queant. Hinc equidem etiam ſum arbitratus, in ſuperficiebus conicis quoque nullas alias tales lineas, niſi quae ipſae ſint rectae, duci poſſe, id quod quidem in genere affirmandum videtur; veruntamen deinceps deprehendi, in iis conis rectis, quorum latera ad baſis diametrum rationem teneant rationalem, infinitas plane lineas rectificabiles geometrice duci poſſe, quemadmodum alia occaſione ſum oſtenſurus. In ſuperficie autem ſphaerica nullae adhuc aliae huiusmodi lineae rectificabiles inueniri potuerunt, praeter Epicycloïdes illas ſatis notas, quae prouolutione circuli maximi ſuper minore naſcuntur, quae quidem inueſtigatio per nullam certam methodum, ſed potius caſu quodam fortuito peracta videtur.

§. 2. Multo minus igitur ſperare licuit, vnquam fore, vt in ſuperficie corporis ſphaeroidici eiusmodi lineae rectificabiles detegerentur; quandoquidem arcus elliptici talem inueſtigationem penitus impedire videbantur. Incidi autem nuper in inſigne quodpiam Theorema, quod tanquam fundamentum talium inueſtigationum merito ſpectari poteſt, vnde non ſolum pro ſuperficiebus ſphaericis methodo ſatis plana et facili curvas illas rectificabiles elicere potui, ſed quod me etiam ad tales curuas in ſuperficie ſphaeroidica quacunque manuduxit. Hoc igitur Theorema ante omnia iſti inueſtigationi praemittere neceſſe eſt.

Theorema generale.

§. 3. *Si littera* v *denotet functionem quamcunque anguli* ϕ, *atque elementum curuae ita exprimatur vt ſit* $\partial s = v\partial\phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\phi}$, *tum coordinatae orthogonales huius curuae, quae ſint* x *et* y, *ſemper ita abſolute exprimi poſſunt, vt ſit*

$$x = \int \partial s \,\text{ſin.}\, \phi = \frac{\partial v}{\partial\phi}\,\text{ſin.}\, \phi - v \,\text{coſ.}\, \phi \quad \textit{et}$$

$$y = \int \partial s \,\text{coſ.}\, \phi = \frac{\partial v}{\partial\phi}\,\text{coſ.}\, \phi + v \,\text{ſin.}\, \phi.$$

Demonſtratio.

Tab. I. Fig. 1. §. 4. Sit A Y linea illa curua ad axem A N relata, ad quam in quouis puncto Y ducatur normalis Y N, in qua producta notetur punctum O, centrum circuli curuam in Y y oſculantis. Tum vero vocetur angulus A N Y $= \phi$, ac demiſſo ex Y ad axem perpendiculo Y X, ſint coordinatae A X $= x$ et X Y $= y$, ipſe vero arcus A Y vocetur $= s$. Iam quia eius

ele-

elementum est $Yy = \partial s = v\,\partial\Phi + \partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}$, per hypothesin, ob angulum $AYX = \Phi$, erit vtique $\partial x = \partial s.\text{fin.}\,\Phi$ et $\partial y = \partial s \,\text{cof.}\,\Phi$, ideoque

$$\partial x = v\,\partial\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + \text{fin.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$\partial y = v\,\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi + \text{cof.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$

quamobrem habebitur integrando

$$x = \int v\,\partial\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + \int \text{fin.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi};$$
$$y = \int v\,\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi + \int \text{cof.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi}.$$

§. 5. Ad istas formulas integrales euoluendas per reductiones notissimas elicimus

$$\int v\,\partial\Phi\,\text{fin.}\,\Phi = -v\,\text{cof.}\,\Phi + \int \partial v\,\text{cof.}\,\Phi \quad \text{et}$$
$$\int \text{fin.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{fin.}\,\Phi - \int \partial v\,\text{cof.}\,\Phi,$$

quibus coniunctis manifesto prodit $x = -v\,\text{cof.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{fin.}\,\Phi$. Simili modo pro applicata y reperietur

$$\int v\,\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi = v\,\text{fin.}\,\Phi - \int \partial v\,\text{fin.}\,\Phi \quad \text{et}$$
$$\int \text{cof.}\,\Phi\,\partial.\frac{\partial v}{\partial\Phi} = \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cof.}\,\Phi + \int \partial v\,\text{fin.}\,\Phi;$$

vnde conficitur $y = v\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cof.}\,\Phi$.

Corollarium 1.

§. 6. Quodsi ergo v fuerit functio algebraica, non quidem ipsius anguli Φ, sed potius eius sinus vel tangentis, ita vt posita tang. $\Phi = t$ quantitas v sit functio quaecunque algebraica ipsius t; euidens est, ipsam curuam futuram esse algebraicam, propterea quod ambae eius coordinatae x et y per functiones algebraicas ipsius t exprimuntur. Longitudo autem huius curuae, cum sit $s = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}$, adeo erit rectificabilis, quoties formulam $\int v\,\partial\Phi$, siue $\int \frac{v\,\partial t}{1+tt}$, integrare licet. Contra vero

 haec

haec rectificatio ab eiusmodi quadratura pendebit, quam formula integralis $\int v \partial \Phi$ inuoluet; vnde ope huius theorematis facile erit, non solum innumerabiles curuas algebraicas assignare, quae sint rectificabiles, sed etiam tales, quarum rectificatio datam quadraturam inuoluat.

Corollarium 2.

§. 7. Quoniam ducta normali proxima yO, priori in centro circuli osculantis O occurrente, ob angulum $Any = \Phi + \partial \Phi$, erit angulus $YOy = \partial \Phi$, ideoque ipse radius osculi $YO = \frac{\partial s}{\partial \Phi}$. Hinc ergo sumto elemento $\partial \Phi$, pro differentialibus secundis, constante, erit ipse radius osculi $YO = v + \frac{\partial \partial v}{\partial \Phi^2}$.

Corollarium 3.

§. 8. Quoniam inuenimus applicatam

$$XY = y = v \sin. \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cos. \Phi,$$

ob angulum $XNY = \Phi$ erit ipsa normalis

$$YN = \frac{v}{\sin. \Phi} = v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi$$

et subnormalis

$$XN = v \cos. \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{\cos. \Phi^2}{\sin. \Phi},$$

vnde erit interuallum $AN = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cdot \frac{1}{\sin. \Phi}$. Quare si ex A in normalem YN ducatur perpendiculum AP, habebimus $AP = AN \sin. \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$ et interuallum $NP = AN \cos. \Phi = \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi$. Hinc cum esset $YN = v + \frac{\partial v}{\partial \Phi} \cot. \Phi$, colligitur fore $PY = v$; sicque functio nostra v exprimit perpendiculum ex puncto A in tangentem YT demissum.

Corollarium 4.

§. 9. Hinc igitur discimus, quoties hoc perpendiculum AT fuerit functio algebraica anguli $ANY = \Phi$, seu potius

tius eius tangentis $= t$, toties ipſam curuam fore algebraicam; quoniam inde ambas coordinatas $AP = x$ et $PN = y$ algebraice exprimere licet. Vbi meminiſſe iuuabit angulum Φ tanquam menſuram amplitudinis curuae ſpectari poſſe.

Corollarium 5.

§. 10. Si praeterea ducamus chordam AY, quia in triangulo rectangulo APY habemus cathetos $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$ et $PY = v$, longitudo ipſius chordae ita concinne exprimitur, vt ſit $AY = \sqrt{(vv + \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2})}$, vnde ſimul deducitur tang. $AYP = \frac{\partial v}{v \partial \Phi}$, quae ergo ſimul erit cotangens anguli AYT, quem chorda cum tangente conſtituit, ita vt huius anguli tangens ſit $= \frac{v \partial \Phi}{\partial v}$, dum ipſa tangens YT aequatur rectae $AP = \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion 1.

§. 11. Ceterum ſi perpendiculum, ex quopiam puncto fixo A in tangentem curuae demiſſum, fuerit functio algebraica amplitudinis curuae $= \Phi$, ſeu potius eius tangentis $= t$, facile perſpicitur, ſi loco A aliud quoduis punctum a accipiatur, perpendiculum inde in tangentem demiſſum at pariter fore functionem algebraicam ipſius Φ, ſeu t. Vnde in genere patet, quoties perpendicula, ex puncto quocunque fixo in tangentes curuae demiſſa, fuerint functiones algebraicae ipſius Φ vel t, toties curuam ſemper fore algebraicam, quod eſt theorema ſine dubio maximi momenti in theoria linearum curuarum.

Scholion 2.

§. 12. Quae hactenus analytice ſunt demonſtrata, per ſolas conſiderationes geometricas ſequenti modo oſtendi poſſunt. Sumatur punctum quodcunque fixum A, vnde recta AN poſi- Tab. I. Fig. 2.

 tione

tione data cum radio osculi curuae Y O constituat angulum $ANY = \phi$; tum vero ex A in ipsum radium osculi ducatur perpendiculum A P, positoque interuallo $YP = v$, si ex A simili modo in radium osculi proximum y O ducatur perpendiculum Ap, erit vtique interuallum $yp = v + \partial v = Yq$, propterea quod ambo radii osculi ad curuam sunt normales; quare cum, ob angulum $Any = \phi + \partial\phi$, sit angulus ad $O = \partial\phi$, erit etiam angulus $PAq = \partial\phi$, vnde cum $Pq = \partial v$, euidens est fore perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial \phi}$, ex quo erit $Ap = \frac{\partial v}{\partial\phi} + \frac{\partial\partial v}{\partial\phi}$, ideoque elementum $pq = \frac{\partial\partial v}{\partial\phi}$, vnde ob angulum ad $O = \partial\phi$ statim deducitur interuallum Oq siue $OP = \frac{\partial\partial v}{\partial\phi^2}$, sicque perspicuum est ipsum radium osculi fore $v + \frac{\partial\partial v}{\partial\phi^2}$. Porro vero quia inuenimus perpendiculum $AP = \frac{\partial v}{\partial\phi}$, ob angulum $ANP = \phi$ erit ipsum interuallum $AN = \frac{\partial v}{\partial\phi} \cdot \frac{1}{\sin.\phi}$ et interuallum $PN = \frac{\partial v}{\partial\phi} \cot.\phi$, ita vt iam futura sit tota normalis

$$YN = YP + PN = v + \frac{\partial v}{\partial\phi} \cot.\phi.$$

Demittamus iam ex Y ad A N perpendiculum Y X, vt obtineamus coordinatas $AX = x$ et $XY = y$, et quoniam in triangulo rectangulo X Y N habemus hypothenusam $YN = v + \frac{\partial v}{\partial\phi}\cot.\phi$, cum angulo $XNY = \phi$, inde statim cognoscimus ipsam applicatam

$$XY = y = v \sin.\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} \cos.\phi$$

et subnormalem

$$XN = v \cos.\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} \cdot \frac{\cos.\phi^2}{\sin.\phi},$$

qua a toto interuallo A N ablata relinquitur abscissa

$$AX = x = -v\cos.\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi}\sin.\phi,$$

quas ergo coordinatas, sine vlla integratione, algebraice expressas elicuimus, prorsus vt ante. His igitur praemissis institutum nostrum aggrediamur.

Pro-

Problema.

§. 13. *Si quadrans ellipticus ACB circa axem CB circumuoluatur, sicque sphaeroides ellipticum formetur, cuius aequator erit circulus radio CA descriptus, semiaxis vero CB, in superficie huius sphaeroidis eiusmodi lineam curuam geometrice describere, quae simul sit rectificabilis.* Tab. I. Fig. 3.

Solutio.

§. 14. Vocemus radium aequatoris $CA = 1$, at semiaxem sphaeroidis $CB = c$, ac referat in Figura 4. circulus centro C radio $CA = 1$ descriptus aequatorem sphaeroidis propositi, ad quem ex quouis superficiei puncto Z demittatur perpendiculum ZY, atque ex Y ad radium aequatoris CA perpendiculum YX, vt locum puncti Z per ternas coordinatas orthogonales determinemus, quae sint $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, quibus constitutis, si nostrum sphaeroides esset sphaera radio $= 1$ descripta, ob interuallum $CZ = 1$ haberetur haec aequatio: $xx + yy + zz = 1$, ideoque $z = \surd(1 - xx - yy)$. Nunc igitur, quia semiaxis sphaeroidis est $= c$, ista altitudo YZ in ratione $= 1 : c$ augeri debet, ita vt pro hac superficie sphaeroidica habeamus istam aequationem: $z = c\surd(1 - xx - yy)$, quae est aequatio naturam huius sphaeroidis exprimens. Fig. 4.

§. 15. Constat autem in genere, quando in superficie corporis cuiuscunque ducatur linea curua quaecunque, eius elementum ∂s semper ita exprimi, vt sit $\partial s = \surd(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)$. Quamobrem nostra quaestio huc reducitur, vt eiusmodi relatio inter binas coordinatas x et y assignetur, vnde formula illa differentialis pro ∂s data euadat integrabilis; tum autem aequatio inter x et y huic conditioni satisfaciens simul exhibebit proiectionem curuae illius rectificabilis in plano aequatoris factam,

ita

ita vt vicissim ex cognita hac proiectione ipsa curua quaesita in superficie sphaeroidis facile exploretur.

§. 16. Quisquis autem hunc laborem in genere suscipere voluerit, mox deprehendet, nullum successum exspectari posse, nisi inuestigationem ad casum particularem adstrinxerit, quo ratio constans inter longitudinem curuae quaesitae s et altitudinem z statuatur. Hanc ob rem statim ponamus esse $s = nz$, ita vt sumtis differentialibus esse debeat

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = nn\,\partial z^2, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial z\sqrt{(nn - 1)};$$

vnde perspicitur, numerum n necessario vnitate maiorem esse debere.

§. 17. Cum igitur formula $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ exprimat elementum proiectionis in plano aequatoris factae, patet etiam hanc proiectionem esse debere curuam rectificabilem. Si enim eius longitudo ponatur $= \Sigma$, ob $\partial\Sigma = \partial z\sqrt{(nn - 1)}$ sequitur fore $\Sigma = z\sqrt{(nn - 1)} + C$; quamobrem si amplitudo istius arcus Σ ponatur $= \Phi$, per theorema praecedens, si v denotet functionem quamcunque algebraicam ipsius Φ, erit $\Sigma = \int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}$, vbi manifestum est formulam $\int v\,\partial\Phi$ quoque integrabilem esse debere; tum vero necesse est vt sit

$$\int v\,\partial\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi} = z\sqrt{(nn - 1)}.$$

§. 18. Cum autem sit $z = c\sqrt{(1 - xx - yy)}$, supra vidimus ob

$$x = -v\,\text{cos.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{sin.}\,\Phi \text{ et}$$

$$y = v\,\text{sin.}\,\Phi + \frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{cos.}\,\Phi, \text{ fore}$$

$$xx + yy = vv + \frac{\partial v^2}{\partial\Phi^2};$$

sicque

ſicque totum negotium reductum eſt ad hanc aequationem:

$$\int v\,\partial\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} = c\sqrt{(nn-1)\left(1 - vv - \frac{\partial v^2}{\partial\phi^2}\right)},$$

ad quam reſoluendam ponamus $v = f\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi + \alpha)$, eritque

$$\int v\,\partial\phi = \frac{f}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha) \text{ et}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\phi} = -\lambda f\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha),$$

vnde habebimus

$$\int v\,\partial\phi + \frac{\partial v}{\partial\phi} = \frac{f(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha),$$

qui ergo eſt valor membri ſiniſtri noſtrae aequationis.

§. 19. Pro membro autem dextro primo erit

$$vv = ff\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2 \text{ et}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial\phi^2} = \lambda^2 f^2\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2;$$

quamobrem habebimus

$$1 - vv = 1 - ff\,\text{coſ.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2,$$

qui valor vt cum poſtrema parte conſpiret, ſumatur $f = 1$, vt fiat $1 - vv = \text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha)^2$, hocque modo noſtra aequatio erit

$$\frac{(1-\lambda\lambda)}{\lambda}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha) = c\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha)\sqrt{(nn-1)(1-\lambda\lambda)},$$

quae per $\sqrt{(1-\lambda\lambda)}\,\text{ſin.}\,(\lambda\phi + \alpha)$ diuiſa praebet

$$\frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda)}}{\lambda} = c\sqrt{(nn-1)}$$

vnde numerus hactenus indefinitus λ ita determinatur, vt ſit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1+(nn-1)cc}}$. Vel etiam numerum λ arbitrio noſtro relinquere poſſumus, indeque numerum illum n definire, qui ergo erit $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, vbi tantum notari oportet, numerum λ ita accipi debere, vt numerus $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc$ prodeat poſitiuus, id quod eueniet quando fuerit $\lambda < \frac{1}{\sqrt{(1-cc)}}$; tum vero etiam, vt iam notauimus, numerus n vnitate maior eſſe debet, ad quod requiritur vt fit $\lambda < 1$, atque adeo hanc conditionem obferuaſſe fufficiet: dummodo enim $\lambda < 1$, etiam femper erit $1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc > 0$, fimulque $n > 1$.

§. 20. Quaecunque igitur fractio vnitate minor pro λ accipiatur, indeque capiatur $n = \frac{\sqrt{(1 - \lambda\lambda + \lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, habebimus

$$v = \operatorname{cof.} (\lambda \phi + \alpha),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \phi} = - \lambda \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha) \text{ et}$$

$$\int v \partial \phi = \frac{1}{\lambda} \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha),$$

vnde coordinatae proiectionis curuae quaefitae in planum aequatoris factae ita determinabuntur, vt fit

$$x = - \operatorname{cof.} \phi \operatorname{cof.} (\lambda \phi + \alpha) - \lambda \operatorname{fin.} \phi \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha) \text{ et}$$

$$y = \operatorname{fin.} \phi \operatorname{cof.} (\lambda \phi + \alpha) - \lambda \operatorname{cof.} \phi \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha),$$

ex quibus porro colligitur

$$xx + yy = \operatorname{cof.} (\lambda \phi + \alpha)^2 + \lambda\lambda \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha)^2, \text{ fiue}$$

$$xx + yy = 1 - (1 - \lambda\lambda) \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha)^2.$$

At vero per notas reductiones ambae coordinatae ita repraefentari poterunt:

$$x = - \frac{1+\lambda}{2} \operatorname{cof.} [(\lambda - 1)\phi + \alpha] - \frac{1-\lambda}{2} \operatorname{cof.} [(\lambda + 1)\phi + \alpha]$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2} \operatorname{fin.} [(\lambda + 1)\phi + \alpha] - \frac{1+\lambda}{2} \operatorname{fin.} [(\lambda - 1)\phi + \alpha],$$

tum autem longitudo ipfius curuae in fuperficie fphaeroidica defcriptae erit

$$s = \int v \partial \phi + \frac{\partial v}{\partial \phi} = \frac{1 - \lambda\lambda}{\lambda} \operatorname{fin.} (\lambda \phi + \alpha).$$

§. 21. Has formulas multo fimpliciores reddere licet, fumendo angulum conftantem $\alpha = 0$. Quoniam enim per variationem huius anguli α tantum pofitio coordinatarum x et y immutatur, dum ipfa curua eadem manet, fine vlla folutionis reftrictione tuto ftatuere poterimus $\alpha = 0$; tum autem coordinatae

natae x et y ita concinnius exprimentur:

$$x = -\frac{1+\lambda}{2}\,\text{cos.}\,(1-\lambda)\,\Phi - \frac{(1-\lambda)}{2}\,\text{cos.}\,(1+\lambda)\,\Phi,$$

$$y = \frac{1-\lambda}{2}\,\text{fin.}\,(1+\lambda)\,\Phi + \frac{(1+\lambda)}{2}\,\text{fin.}\,(1-\lambda)\,\Phi,$$

tum autem erit longitudo curuae in fuperficie defcriptae

$$s = \frac{1-\lambda\lambda}{\lambda}\,\text{fin.}\,\lambda\,\Phi,$$

quae ergo euanefcit vbi $\Phi = 0$, et eo vsque extenditur, quoad angulus $\lambda\,\Phi$ euadat rectus, a quo termino curua iterum recedere incipit.

§. 23. In hac euolutione quantitas c, qua fpecies fphaeroidis exprimitur, aliter in computum non eft ingreffa, nifi in numero n, quem inuenimus $n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda+\lambda\lambda cc)}}{\lambda c}$, et quo ratio continetur, quam longitudo curuae quaefitae ad altitudinem z tenet; vnde haec proprietas notatu maxime digna confequitur: quod pro omnibus fphaeroidibus ellipticis, fiue fint oblonga fiue compreffa, lineae rectificabiles, in eorum fuperficiebus ducendae, fi in planum aequatoris proiiciantur, ad easdem proiectiones perducant; ita vt folutio huius problematis plane congruat cum folutione eius, quo lineae rectificabiles in fuperficie fphaerica quaeruntur. Atque adeo praefens folutio illi, qua hactenus iftud problema pro fphaera eft folutum, ideo longiffime anteferenda videtur, quod per certam methodum ad fcopum optatum perduxit, cum folutio vulgaris cafui fortuito accepta fit referenda.

Applicatio
praecedentis Solutionis ad corpora conoidica hyperbolica.

§. 23. Quoniam quantitas c, qua femiaxem ellipfis generantis CB defignauimus, ex calculo fere penitus eft egreffa, manifeftum eft noftram folutionem etiam locum habere

 poffe

poſſe, licet iſta quantitas c fiat adeo imaginaria, id quod euenit, quando ellipſis initio conſiderata transmigrat in hyperbolam, cuius centrum erit etiamnunc in c et ſemiaxis transuerſus $CA = 1$, vt ante. Ad hunc igitur caſum euoluendum tantum opus eſt vt loco c quantitatem imaginariam ſtatuamus, ponendo $cc = -aa$, ſiue $c = a\sqrt{-1}$.

§. 24. Omnia igitur, quae ſupra euoluimus, prorſus immutata manebunt, ſola illa aequatione, qua numerum n definivimus, excepta, quae poſito $c = a\sqrt{-1}$ recipiet hanc formam:

$$n = \frac{\sqrt{(1-\lambda\lambda-\lambda\lambda aa)}}{\lambda\sqrt{-a}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda\lambda(1+aa)-1}{aa}};$$

vbi patet eſſe debere $\lambda\lambda(aa+1) > 1$, ſiue $\lambda > \frac{1}{\sqrt{(aa+1)}}$, tum vero, quia etiam eſſe debet $n > 1$, tam haec quam praecedens conditio adimplebitur, dummodo capiatur $\lambda > 1$. Quamobrem tota ſolutio huius caſus a praecedente in hoc tantum diſcrepabit, quod hic numerum λ vnitate maiorem accipi oportet, cum ante vnitate minor fuiſſet; quamobrem coordinatae proiectionis nunc ita exprimentur:

$$x = -\frac{\lambda+1}{2}\operatorname{cof.}(\lambda-1)\Phi + \frac{\lambda-1}{2}\operatorname{cof.}(\lambda+1)\Phi,$$

$$y = -\frac{\lambda-1}{2}\operatorname{fin.}(\lambda-1)\Phi - \frac{\lambda+1}{2}\operatorname{fin.}(\lambda-1)\Phi,$$

ex hisque erit

$$xx+yy = 1+(\lambda\lambda-1)\operatorname{fin.}\lambda\Phi^2,$$

ipſa autem curuae in ſuperficie deſcriptae longitudo erit

$$s = -\frac{\lambda\lambda-1}{\lambda}\operatorname{fin.}\lambda\Phi,$$

vbi ſignum negationis nihil in figura curuae turbat, dum tantum in partem vergit contrariam ei quam in calculo ſpectauimus. Hoc igitur modo ſolutio noſtra multo latius eſt extenſa quam primo initio ſperare licuiſſet.