



1788

# Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae" (1788). *Euler Archive - All Works*. 622.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/622>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

SPECIMEN SINGVLARE  
ANALYSEOS INFINITORVM  
INDETERMINATAE.

Auctore

L. EVLERO.

---

Conuent. exhib. d. 18 Mart. 1776.

---

§. I.

Iam ante complures annos nouum prorsus Calculi genus ad-  
vmbraui, cui *Analyseos Infinitorum indeterminatae* nomen in-  
posueram, quoniam ad Analysis Infinitorum ordinariam eodem  
modo refertur, quo Analysis Diophantea ad Algebram com-  
munem. Indoles scilicet huius Calculi in eo consistit, vt eius-  
modi relatio inter binas variables inuestigetur, vnde vna plu-  
resue formulae integrales nanciscantur valores siue algebraicos,  
siue datas quadraturas inuoluentes. Veluti si talis definiri de-  
beat relatio inter binas variables  $x$  et  $y$ , vt ista formula in-  
tegralis:  $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , algebraicum valorem adipiscatur, vel  
etiam datas quantitates transcendentis inuoluat. Hinc enim  
euidens est curuas algebraicas obtineri, quae sint vel rectifi-  
cables, vel quarum rectificatio a datis quadraturis pendeat; at-  
que hinc problema illud *Hermannianum* celeberrimum methodo  
directa solutum dedi, quo requirebantur curuae algebraicae non  
rectificables, sed quarum rectificatio datas quadraturas inuol-  
veret, in quibus tamen nihilominus vel vnus, vel duo, vel ad-  
eo quotquis voluerit arcus assignari possent absolute rectifica-  
biles,

biles, postquam ipse *Hermannus* et *Bernoullii* methodo maxime indirecta ad eius solutionem peruenissent. Praeterea vero etiam tum temporis plura alia huius generis Problemata non parum curiosa ope methodi, quam ibi exposui, felici successu expediui.

§. 2. Methodus autem mea huiusmodi Problemata solvendi ita est comparata, ut eius beneficio sequens Problema generale pertractari possit:

*Si P, Q, R, S, etc. fuerint functiones quaecunque datae variabilis x, semper eiusmodi ratio algebraica inter binas variables x et y assignari potest, ut omnes istae formulae integrales:  $\int P \partial y$ ,  $\int Q \partial y$ ,  $\int R \partial y$ , etc. quocumque fuerint, algebraicos sortiantur valores. Quin etiam effici potest ut una earum, vel etiam duae, datas quadraturas inuoluant.*

Quamvis autem iste casus latissime patere videatur, tamen hac conditione maxime restringitur, quod in istis formulis altera variabilis *y* unquam tantum obtineat dimensionem. Si enim diversae dimensiones occurrerent, nequam adhuc perspicere possum, quomodo resolutio suscipi deberet.

§. 3. Quoties igitur eiusmodi quaestiones proponuntur, quas ad huiusmodi formulas reuocare non licet, fateri cogor, me nullo adhuc modo perspicere posse, quibusnam artificijs solutionem saltem tentari conueniat, id quod exemplo simplicissimo declarasse sufficiet. Veluti si haec duae formulae:  $\int \frac{y \partial x}{x}$  et  $\int \frac{\partial x}{y x}$ , ambae reddi debeant integrabiles, aliam solutionem exhiberi posse non video, nisi quae sponte se offert, dum pro *y* potestas quaecunque ipsius *x* assumitur. Vix autem asseuerare ausim, nullam aliam solutionem locum habere posse. Ex quo intelligere licet, quantopere adhuc istud nouum calcul

culi genus nobis sit absconditum, et omnia quae adhuc sunt praestita vix tanquam prima eius elementa spectari posse; vnde maxime esset optandum, vt sagacissima ingenia omnes vires intenderent ad istam Analyseos partem vberius excolendam.

§. 4. Ad hoc etiam Calculi genus referri debent bina illa Theoremata, quae non ita pridem in medium afferre sum ausus, quorum priore asseueravi, praeter circulum nullam aliam dari curuam algebraicam, cuius singuli arcus per arcus circulares exhiberi queant, siue nullam aliam inter  $x$  et  $y$  relationem algebraicam assignari posse, vt fieret

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{\sqrt{(x - z^2)}}.$$

Altero autem Theoremate affirmavi, nullam plane dari curuam algebraicam, cuius singuli arcus per simplices logarithmos exprimi queant, siue vt fieri possit  $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{z}$ . Pluribus quidem rationibus veritatem horum Theorematum corroborare sum annisus, ita vt nullum amplius dubium superesse posse videatur; interim tamen plenam eius demonstrationem vix ante exspectare licebit, quam nouum hoc Calculi genus vberius fuerit elaboratum.

§. 5. Imprimis autem ad istum Calculum pertinent quaestiones iam passim tractatae de lineis rectificabilibus in data superficie siue conuexa siue concaua ducendis, quarum solutio semper multo maiorem huius noui calculi perfectionem requirere videtur. Postquam enim multum desudassem, vt in superficie sphaerica lineam rectificabilem inuestigarem, nullam aliam reperire potui, praeter eam, quae Geometris iam pridem innotuit, quae scilicet describitur, dum circulus sphaerae maximus super minore prouoluitur, et cuius inuentio casui potius fortuito quam certae methodo accepta est referenda; vnde vix

dubitauerim asseuerare, praeter istam curuam in superficie sphaerica nullam aliam dari, quae esset rectificabilis. Quin etiam in superficiebus cylindricis et conicis nullae aliae lineae rectificabiles mihi quidem exhibere posse videntur, praeter eas quae ipsae sunt rectae.

§. 6. Nuper vero se mihi alia huius generis quaestio obtulit, cuius quidem solutio iam aliunde mihi erat cognita; interim tamen eam ita comparatam deprehendi, vt nullam plane viam directam, ad eius solutionem pertingendi, perspicere potuerim, nisi ipsa solutio iam aliunde innotuisset. Hinc scilicet methodum maxime obliquam et indirectam deriuauit, quae demum per plures ambages ad scopum perduxerat; quamobrem plurimum lucis in hoc obscuro calculi genere affulgere posse confido, si problema istud cum mea solutione, quantumuis obliqua, Geometris proposuero.

### Problema.

*Inuestigare relationem inter binas quantitates variabiles q et z, vt primo haec formula:  $\int q dz$ , fiat algebraica, tum vero ista:  $\int \frac{dz \sqrt{(qq-1)}}{z}$  arcum circulaarem exprimat.*

### Solutio.

§. 7. Hic manifesto summa difficultas in posteriori formula deprehenditur, quam ad arcum circulaarem reuocari oportet; vbi quidem in transitu notari meretur, si ista formula etiam algebraica reddi deberet, vti prior, ne vllam plane viam me perspicere posse hoc negotium conficiendi. Ex quo conditio, quod ista formula ad arcum circulaarem reduci debeat, multo difficilior videbatur; interim tamen haec ipsa conditio viam nobis apperiet ad scopum propositum perueniendi, id quod ex sequentibus operationibus patebit.

§. 8.

§. 8. Primo igitur formulam  $\int \frac{\partial z \sqrt{qq-1}}{z}$  arcui circuli, cuius tangens sit  $\frac{x}{y}$ , aequalem statuamus, vbi data opera duas novas variables  $x$  et  $y$  in calculum introducimus, quo deinceps ambae nostrae propositae  $q$  et  $z$  per eas commodius exprimi queant. Sumtis igitur differentialibus consequemur hanc aequationem:  $\frac{\partial z \sqrt{qq-1}}{z} = \frac{y \partial x - x \partial y}{xx + yy}$ , et nunc faciamus  $zz = xx + yy$ , id quod utique sine vlla quaestionis restrictione fieri licet, propterea quod ambae litterae  $x$  et  $y$  profus a nostro arbitrio pendent. Posito autem  $zz = xx + yy$ , superest vt fiat  $z \partial z \sqrt{qq-1} = y \partial x - x \partial y$ , vnde cum sit  $z \partial z = x \partial x + y \partial y$  deducimur ad hanc determinationem:

$$\sqrt{qq-1} = \frac{y \partial x - x \partial y}{x \partial x + y \partial y}.$$

§. 9. Vt iam hanc formulam a differentialibus liberemus, statuamus  $\partial y = p \partial x$ , vbi manifestum est formulam integram  $\int p \partial x$  absolute integrabilem seu algebraicam reddi debere. Hinc igitur habebimus  $\sqrt{qq-1} = \frac{y - px}{x + py}$ , vbi commode vsu venit vt sumtis quadratis fiat  $qq = \frac{(1+pp)(xx+yy)}{(x+py)^2}$ ; quare ob  $xx + yy = zz$ , erit radice extracta  $q = \frac{z \sqrt{1+pp}}{x + py}$ , ita vt nunc ambae variables  $q$  et  $z$  propositae satis concinne per binas novas variables  $x$  et  $y$  expressae prodierint, atque posteriori conditioni, qua formula  $\int \frac{\partial z \sqrt{qq-1}}{z}$  arcum circuli exprimere debet, iam perfecte sit satisfactum, idque tam generaliter, vt nulla limitatio sit introducta, quandoquidem in calculo adhuc duae variables  $x$  et  $y$  remanserunt, nullo modo a se inuicem pendentes.

§. 10. Quoniam igitur posteriori conditioni problematicis est satisfactum, nihil aliud superest, nisi vt prior conditio, qua formula  $\int q \partial z$  ad quantitatem algebraicam est reuocanda adimpleatur. Quod si vero loco  $q$  valorem inuentum substituamus

tuamus, reperiemus:  $q \partial z = \frac{z \partial x \sqrt{(1+p^2)}}{x+py}$ ; quare cum fit

$$z \partial z = x \partial x + y \partial y = \partial x (x + py),$$

quasi praeter expectationem deducimur ad istam formulam simplicissimam:  $q \partial z = \partial x \sqrt{(1+p^2)}$ , quandoquidem hinc denominator quasi casu fortuito est sublatus, ex quo tota quaestio huc est reducta, ut ista formula integralis  $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$  ad quantitatem algebraicam reuocetur, simul vero etiam, uti iam ante obseruauimus, haec formula  $\int p \partial x$  euadat algebraica, quibus duabus conditionibus cum fuerit satisfactum, problema nostrum in omni extensione simul erit resolutum, tum enim primo habebimus  $y = \int p \partial x$ , hincque porro

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)} \text{ et } q = \frac{z \sqrt{(1+p^2)}}{x+py}.$$

His autem valoribus ambae conditiones praescriptae ita adimplentur, ut fit  $\int q \partial z = \int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$ , quae per hypothesin est quantitas algebraica; pro altera autem conditione fit

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(q^2 - 1)}}{z} = A \text{ tang. } \frac{x}{y},$$

ideoque arcui circuli aequalis, uti requirebatur.

§. 11. Quæri igitur debet eiusmodi ratio inter binas variables  $p$  et  $x$ , ut ambae istae formulae  $\int p \partial x$  et  $\int \partial x \sqrt{(1+p^2)}$  euadant algebraicae. Cum igitur fit

$$\int p \partial x = px - \int x \partial p \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+p^2)} = x \sqrt{(1+p^2)} - \int \frac{x p \partial p}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

quoniam hae duae nouae formulae in supra §. 2. memoratis continentur, per methodum olim expositam statuamus primo  $\int x \partial p = t$ , ut fit  $x = \frac{\partial t}{\partial p}$ , atque altera formula abibit in hanc:

$$\int \frac{p \partial t}{\sqrt{(1+p^2)}}, \text{ quae si statuatur } = u, \text{ hinc fiet } \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial u}{\partial t};$$

vbi iam pro  $u$  functionem quamcunque algebraicam ipsius  $t$  assumere

mere licet. Quare si ponamus  $\partial u = v \partial t$ , erit  $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = v$ ,  
 hincque  $p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}}$  et  $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$ .

§. 12. Tota ergo nostra solutio ita se habebit. Sumta  
 functione quacunque variabilis  $t$ , quae vocetur  $= u$ , vnde fiat  
 $\partial u = v \partial t$ , ita vt etiam  $v$  fit functio ipsius  $t$ , hinc primo erit

$$p = \frac{v}{\sqrt{(1-vv)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-vv)}}$$

quo valore inuento capiatur  $x = \frac{\partial t}{\partial p}$ , ita vt iam  $p$  et  $x$  per  
 solam variabilem  $t$  sint expressae. Tum vero erit

$$\int p \partial x = \frac{v \partial t}{\partial p \sqrt{(1-vv)}} - t = y.$$

Deinde simili modo erit

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \frac{\partial t}{\partial p \sqrt{(1-vv)}} - u = \int q \partial z.$$

Denique ex his ipsae quantitates in problemate quaesitae ita  
 per nouam variabilem  $t$  exprimentur, vt fit  $z = \sqrt{(xx + yy)}$ ,  
 et hinc  $q = \frac{z \sqrt{(1+pp)}}{x + py}$ , atque ex his valoribus problemati ita  
 satisfiet, vt fit

$$\int q \partial z = \frac{x}{\sqrt{(1-vv)}} - u \text{ et } \int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = A \text{ tang. } \frac{x}{y}.$$

§. 13. Quo haec clarius intelligantur, exemplum euol-  
 vamus, fumendo  $u = a t^n$ , vnde fit

$$v = n a t^{n-1} \text{ et } \sqrt{(1-vv)} = \sqrt{(1-n n a a t^{2n-2})},$$

vnde colligitur

$$p = \frac{n a t^{n-1}}{\sqrt{(1-n n a a t^{2n-2})}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-n n a a t^{2n-2})}}.$$

Cum igitur hinc fit

$$\partial p = \frac{n(n-1) a t^{n-2} \partial t}{(1-n n a a t^{2n-2})^{\frac{3}{2}}}, \text{ erit}$$



$$x = \frac{(1 - n n a a t^{2n-1})^{\frac{3}{2}}}{n(n-1) a t^{n-2}} \text{ et}$$

$$y = \frac{t(2 - n - n n a a t^{2n-2})}{n-1}$$

Quoniam vero hae formulae iam nimis fiunt intricatae, fumamus  $a = 1$  et  $n = 2$ , ut fit  $u = tt$  et  $v = 2t$ , ex quibus porro colliguntur valores

$$p = \frac{2t}{\sqrt{(1-4tt)}} \text{ et } \sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1-4tt)}}$$

$$x = \frac{1}{2} (1 - 4tt)^{\frac{3}{2}}, y = -4t^3, \text{ hincque}$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - 3tt + 12t^4\right)}, \text{ ac denique}$$

$$q = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - 3tt + 12t^4\right)}}{\frac{1}{2} - 4tt}$$

Problemati autem iam ita satisfiet, ut fit

$$\int q \partial z = \frac{1}{2} - 3tt \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial z \sqrt{(qq-1)}}{z} = A \text{ tang.} - \frac{(1-4tt)^{\frac{3}{2}}}{8t^3}$$

### Alia Solutio.

per formulas racionales procedens.

§. 14. Ut formulas radicales eitemus, ponamus statim  $p = \frac{rr-1}{2r}$ , ut fiat  $\sqrt{(1+pp)} = \frac{rr+1}{2r}$ . Nunc igitur has duas formulas:

$$\int p \partial x = \int \frac{(rr-1)\partial x}{2r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(rr+1)\partial x}{2r},$$

integrabiles reddi oportet, id quod praestabitur faciendo has duas

duas formulas:  $\int r \partial x$  et  $\int \frac{\partial x}{r}$  integrabiles; tum enim fiet

$$\int p \partial x = \frac{1}{2} \int r \partial x - \frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{r} \text{ et}$$

$$\int \partial x \sqrt{(1 + p p)} = \frac{1}{2} \int r \partial x + \frac{1}{2} \int \frac{\partial x}{r}.$$

Sicque quaeritur eiusmodi relatio inter  $r$  et  $x$ , ut tantum hae duae formulae euadant integrabiles.

§. 15. Hic igitur reductione supra adhibita utamur, et cum fit

$$\int r \partial x = r x - \int x \partial r \text{ et } \int \frac{\partial x}{r} = \frac{x}{r} + \int \frac{x \partial r}{r r},$$

ponamus  $\int x \partial r = t$ , ut fiat  $x = \frac{\partial t}{\partial r}$ ; tum vero altera formula

erit  $\int \frac{x \partial r}{r r} = \int \frac{\partial t}{r r}$ , cuius valorem si vellemus statuere  $= u$ ,

quantitas  $r$  signum radicale inuolueret, quod ut euitemus, utamur eadem reductione:  $\int \frac{\partial t}{r r} = \frac{t}{r r} + 2 \int \frac{t \partial r}{r^3}$ , ac iam statuamus

$\int \frac{t \partial r}{r^3} = s$ , fietque  $t = \frac{r^3 \partial s}{\partial r}$ . Hic iam pro  $s$  functionem quam-

cunque ipsius  $r$  accipere licebit, unde fiat  $\partial s = s' \partial r$ , fic-

que habebimus  $t = r^3 s'$ , hincque regrediendo

$$\int \frac{\partial t}{r r} = \int \frac{x \partial r}{r r} = r s' + 2 s,$$

tum vero, posito  $\partial s' = s'' \partial r$ , erit  $x = 3 r r s' + r^3 s''$ .

§. 16. His valoribus inuentis, cum fit

$$\int r \partial x = 2 r^3 s' + r^3 s'' \text{ et}$$

$$\int \frac{\partial x}{r} = 2 s + 4 r s' + r r s'',$$

ex his duobus valoribus colligimus sequentes:

$$\int p \partial x = -s + (r^3 - 2 r) s' + \frac{1}{2} (r^4 - r r) s'',$$

$$\int \partial x \sqrt{(1 + p p)} = s + (r^3 + 2 r) s' + \frac{1}{2} (r^4 + r r) s'',$$

ex quibus porro deducuntur reliqui:  $\int p \partial x$ ,  $z = \sqrt{(x x + y y)}$ ,

$q = \frac{z \sqrt{(1 + p p)}}{x + p y}$ , hocque pacto tota solutio formulis rationali-

bus absoluetur.

§. 17.

§. 17. Ceterum non dubito, quin contemplatio huius Problematis et Solutionis utcumque obliquae, quae casu tantum successisse videatur, Geometris occasionem suppeditare queat, hoc nouum Calculi genus, cuius vix prima elementa nobis etiam nunc sunt cognita, ulterius rimandi atque ad maiorem perfectionis gradum euehendi, quandoquidem hinc maxima incrementa ad vniuersam Analysin redundare sunt existimanda.