



1788

Methodus facilis inveniendi integrali huius formulae $\int \frac{\partial x}{x} \cdot (x^{n+p} - 2x^n \cos(\zeta) + x^{n-p}) / (x^{2n} - 2x^n \cos(\theta) + 1)$ casu, post integrationem ponitur vel $x=1$ vel $x=\infty$

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Methodus facilis inveniendi integrali huius formulae $\int \frac{\partial x}{x} \cdot (x^{n+p} - 2x^n \cos(\zeta) + x^{n-p}) / (x^{2n} - 2x^n \cos(\theta) + 1)$ casu, post integrationem ponitur vel $x=1$ vel $x=\infty$ " (1788). *Euler Archive - All Works*. 620. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/620>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

**METHODVS FACILIS
INVENIENDI INTEGRALE HVIVS FORMVLAE**

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^n + p - 2x^n \operatorname{cof.} \zeta + x^n - p}{x^{2n} - 2x^n \operatorname{cof.} \theta + 1},$$

CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR

VEL $x = 1$ VEL $x = \infty$.

Auctore

L. EYLERO.

Conuent. exhib. d. 18 Mart. 1776.

§. 1.

Denotet S integrale huius formulae generaliter sumtum, ita ut quaeri debeat valor ipsius S , casu quo statuitur $x=1$; vbi primum obseruo, formam propositam multo concinnio-rem reddi, si fractionis numerator et denominator per x^n diuidantur; tum enim habebimus

$$S = \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p - 2 \operatorname{cof.} \zeta + x^{-p}}{x^n - 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}}.$$

Hic statim patet, denominatorem $x^n - 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}$ semper in n factores resolui posse, qui singuli sint formae $x^r - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-r}$, vbi angulum ω ita capi oportet, vt, dum iste euanescit, simul etiam ipse denominator ad nihilum redigatur.

A 2

§. 2.

§. 2. Posito autem isto factore $x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2} = 0$, inde fit $x = \cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega$, vnde in genere colligitur

$$x^\lambda = \cos. \lambda \omega + \sqrt{-1} \sin. \lambda \omega \text{ et}$$

$$x^{-\lambda} = \cos. \lambda \omega - \sqrt{-1} \sin. \lambda \omega.$$

Hinc ergo denominator istum accipiet valorem: $2 \cos. n \omega - 2 \cos. \theta$, qui igitur euaneschet, si pro $n \omega$ sumatur aliquis ex his valoribus:

$$\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \theta + 6\pi, \theta + 8\pi, \text{ etc.}$$

quare cum numerus horum valorum debeat esse $= n$, omnes valores anguli ω erunt sequentes:

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \frac{\theta + 6\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Praeterea vero cum fit $\cos. n \omega = \cos. \theta$, erit etiam $\sin. n \omega = \sin. \theta$.

§. 3. Cum igitur denominator habeat n factores huius formae: $x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2}$, nostra fractio, quicumque fuerit eius numerator, in n fractiones simplices resolui poterit, quarum denominatores erunt illi n factores denominatoris. Scribamus igitur breuitatis gratia Π loco numeratoris $x^2 -$

$2 \cos. \zeta + x^{-2}$, atque haec fractio: $\frac{\Pi}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$ resoluetur in n fractiones simplices, quarum singulae hanc habebunt formam: $\frac{P}{x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2}}$, quocirca statuamus:

$$\frac{\Pi}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}} = \frac{P}{x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2}} + R;$$

vbi littera R omnes reliquas complectatur fractiones, vnde statim habebimus

$$\frac{\Pi (x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2})}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}} = P + R (x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2}).$$

Quodsi

===== (5) =====

Quodsi iam faciamus $x^2 - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-2} = 0$, hinc colligemus numeratorem P: erit enim

$$P = \frac{\Pi (x^2 - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-2})}{x^n - 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}},$$

siquidem in hac aequatione ponatur $x = \operatorname{cof.} \omega + \sqrt{-1} \operatorname{fin.} \omega$.

§. 4. At vero iam vidimus, si ipsi x hunc valorem tribuamus, illius fractionis tam numeratorem quam denominatorem evanescere, quamobrem secundum regulam notissimam loco numeratoris et denominatoris sua scribamus differentialia,

ac prodibit $P = \frac{\Pi (x^2 - x^{-2})}{n x^n - n x^{-n}}$. Nunc igitur si loco x valor assignatus scribatur, primo pro Π nanciscemur hunc valorem:

$$\Pi = 2 \operatorname{cof.} p \omega - 2 \operatorname{cof.} \zeta;$$

ex fractione autem oritur iste valor: $\frac{\operatorname{fin.} \omega}{n \operatorname{fin.} n \omega}$, quae ergo expressio cum sit realis, numerator quaesitus erit

$$P = \frac{2 \operatorname{fin.} \omega (\operatorname{cof.} p \omega - \operatorname{cof.} \zeta)}{n \operatorname{fin.} n \omega}.$$

Iam autem vidimus esse $\operatorname{fin.} n \omega = \operatorname{fin.} \theta$, vnde iste numerator erit $P = \frac{2 \operatorname{fin.} \omega (\operatorname{cof.} p \omega - \operatorname{cof.} \zeta)}{n \operatorname{fin.} \theta}$.

§. 5. Quaelibet igitur fractio partialis ex resolutione fractionis propositae oriunda erit huiusmodi:

$$\frac{2 (\operatorname{cof.} p \omega - \operatorname{cof.} \zeta)}{n \operatorname{fin.} \theta} \cdot \frac{\operatorname{fin.} \omega}{x^2 - 2 \operatorname{cof.} \omega + x^{-2}},$$

in qua forma si angulo ω successiue tribuantur omnes valores supra assignati, qui erant:

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \frac{\theta + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n},$$

orientur omnes fractiones partiales, quae in vnam summam

collectae ipsam formam propositam $\frac{x^p - 2 \cos. \zeta + x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$ pro-
ducere debent, unde etiam singulae in $\frac{\partial x}{x}$ ductae et integra-
tae, tum vero in vnam summam collectae, exhibebunt integrale
quaesitum S.

§. 6. Consideremus igitur fractionem: $\frac{\sin. \omega}{x^2 - 2 \cos. \omega + x^{-2}}$

quae ducta in $\frac{\partial x}{x}$ praebet $\frac{\partial x \sin. \omega}{x^2 - 2 \cos. \omega + 1}$, cuius integrale, ita
sumtum vt euanescat posito $x = 0$, constat esse $= A \text{ tang. } \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$.
Hinc igitur ex hac fractione partiali oritur ista pars integra-
lis: $\frac{2 (\cos. p \omega - \cos. \zeta)}{n \sin. \theta} \cdot A \text{ tang. } \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega}$, unde ergo facile dedu-
cuntur omnes n partes integralis quaesiti, si loco ω ordine
omnes eius valores assignati substituuntur atque in vnam sum-
mam colligantur.

§. 7. Quoniam autem hoc loco eum tantum integra-
lis valorem postulamus, qui oritur posito $x = 1$, hoc casu
fiet

$$A \text{ tang. } \frac{x \sin. \omega}{1 - x \cos. \omega} = A \text{ tang. } \frac{\sin. \omega}{1 - \cos. \omega}$$

At vero ista formula $\frac{\sin. \omega}{1 - \cos. \omega}$ exprimit cotangentem anguli $\frac{1}{2} \omega$,
ideoque tangentem anguli $\frac{\pi - \omega}{2}$, ita vt hoc casu pars integra-
lis futura sit $\frac{\cos. p \omega - \cos. \zeta}{n \sin. \theta} (\pi - \omega)$. Hic autem in transitu no-
tasse iuuabit, si desideretur integrale pro casu $x = \infty$, tum
proditorum esse $A \text{ tang. } -\frac{\sin. \omega}{\cos. \omega}$; quia igitur est $-\frac{\sin. \omega}{\cos. \omega}$ tan-
gens anguli $\pi - \omega$, cum ante habuiffemus $\frac{\pi - \omega}{2}$, hinc patet,
casu $x = \infty$ etiam totum integrale duplo maius fore quam
casu $x = 1$.

§. 8.

(7)

§. 8. Tribuamus igitur angulo ω successive omnes eius valores, eosque ordine hic sistamus, eritque

$$S = \frac{\text{cof. } \frac{p\theta}{n} - \text{cof. } \zeta}{n \sin. \theta} \cdot \left(\pi - \frac{\theta}{n}\right) \\ + \frac{\text{cof. } \frac{p}{n} (\theta + 2\pi) - \text{cof. } \zeta}{n \sin. \theta} \cdot \frac{((n-2)\pi - \theta)}{n} \\ + \frac{\text{cof. } \frac{p}{n} (\theta + 4\pi) - \text{cof. } \zeta}{n \sin. \theta} \cdot \frac{((n-4)\pi - \theta)}{n} \\ + \frac{\text{cof. } \frac{p}{n} (\theta + 6\pi) - \text{cof. } \zeta}{n \sin. \theta} \cdot \frac{((n-6)\pi - \theta)}{n} \\ \text{etc.}$$

quarum formularum numerus debet esse $= n$. Haec autem expressio statim in duas partes distinguitur hoc modo indicandas:

$$S = \frac{Q}{n \sin. \theta} - \frac{R \text{ cof. } \zeta}{n \sin. \theta}, \text{ ita vt fit}$$

$$Q = \frac{n\pi - \theta}{n} \cdot \text{cof. } \frac{p\theta}{n} + \frac{((n-2)\pi - \theta)}{n} \cdot \text{cof. } \frac{p}{n} (\theta + 2\pi) \\ + \frac{((n-4)\pi - \theta)}{n} \cdot \text{cof. } \frac{p}{n} (\theta + 4\pi) \text{ etc.}$$

$$R = \frac{n\pi - \theta}{n} + \frac{(n-2)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-4)\pi - \theta}{n} + \frac{(n-6)\pi - \theta}{n} + \text{etc.}$$

ita vt iam nobis incumbatur in valores litterarum Q et R inquirere.

§. 9. Primo autem statim patet, valorem ipsius R esse progressionem arithmeticam decrescentem differentia $\frac{2\pi}{n}$, vnde summa n terminorum erit $= \pi - \theta$, ita vt fit $R = \pi - \theta$. At vero inuentio progressionis Q maiorem requirit apparatus, quem in finem sequentes inuestigationes generaliores praemittamus.

§. 10.

§. 10. Consideretur primo progressio ista cosinum, quorum anguli in progressionem arithmetica progrediantur et quorum numerus sit n :

$$t = \text{cof.}(\alpha + 2\beta) + \text{cof.}(\alpha + 4\beta) + \text{cof.}(\alpha + 6\beta) + \dots + \text{cof.}(\alpha + 2n\beta).$$

Iam multiplicemus vtrinque per $2 \sin. \beta$, et cum sit

$$2 \sin. \beta \text{ cof.} \gamma = \sin. (\beta + \gamma) - \sin. (\gamma - \beta),$$

proveniet sequens forma:

$$2t \sin. \beta = -\sin. (\alpha + \beta) + \sin. (\alpha + 3\beta) + \sin. (\alpha + 5\beta) + \dots + \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - \sin. (\alpha + 3\beta) - \sin. (\alpha + 5\beta) - \dots$$

vbi omnes termini intermedii manifesto se destruunt, ita vt soli extremi remaneant, hincque ergo fiet

$$t = \frac{\sin. [\alpha + (2n+1)\beta] - \sin. (\alpha + \beta)}{2 \sin. \beta}.$$

§. 11. Deinde vero iidem cosinus combinentur cum numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, n , ac statuatur

$$u = 1 \text{ cof.}(\alpha + 2\beta) + 2 \text{ cof.}(\alpha + 4\beta) + 3 \text{ cof.}(\alpha + 6\beta) + \dots + n \text{ cof.}(\alpha + 2n\beta)$$

qua expressione ducta in $2 \sin. \beta$, adhibita resolutione qua modo sumus vsi, consequemur

$$2u \sin. \beta = -\sin. (\alpha + \beta) + \sin. (\alpha + 3\beta) + 2 \sin. (\alpha + 5\beta) + \dots + \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - 2 \sin. (\alpha + 3\beta) - 3 \sin. (\alpha + 5\beta) - \dots$$

quae forma reducitur ad istam:

$$n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - 2u \sin. \beta = \sin. (\alpha + \beta) + \sin. (\alpha + 3\beta) + \dots + \sin. (\alpha + (2n-1)\beta)$$

quae vocetur $= v$.

§. 12. Nunc ista series denuo ducatur in $2 \sin. \beta$, et cum in genere fit

$$2 \sin. \beta \sin. \gamma = \cos. (\gamma - \beta) - \cos. (\gamma + \beta),$$

nanciscemur

$$2v \sin. \beta = \cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2\beta) - \cos. (\alpha + 4\beta) - \dots - \cos. (\alpha + 2n\beta) \\ + \cos. (\alpha + 2\beta) + \cos. (\alpha + 4\beta) + \dots$$

vnde ob terminos medios omnes se destruentes colligitur

$$v = \frac{\cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2n\beta)}{2 \sin. \beta}; \text{ quare cum fit}$$

$$u = \frac{n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - v}{2 \sin. \beta}, \text{ hinc obtinemus}$$

$$u = \frac{n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta)}{2 \sin. \beta} - \frac{[\cos. \alpha - \cos. (\alpha + 2n\beta)]}{4 \sin. \beta^2}.$$

§. 13. Combinemus nunc ambas summationes modo traditas in genere, ac statuamus

$$V = (a+b) \cos. (\alpha + 2\beta) + (a+2b) \cos. (\alpha + 4\beta) + (a+3b) \cos. (\alpha + 6\beta) + \dots + (a+nb) \cos. (\alpha + 2n\beta),$$

atque evidens est fore $V = at + bu$, vnde loco t et u valoribus substitutis erit

$$V = \frac{a \sin. (\alpha + (2n+1)\beta) - a \sin. (\alpha + \beta)}{2 \sin. \beta} + \frac{b n \sin. (\alpha + (2n+1)\beta)}{2 \sin. \beta} \\ - \frac{b \cos. \alpha + b \cos. (\alpha + 2n\beta)}{4 \sin. \beta^2}.$$

§. 14. Iam satis perspicuum est progressionem, quam supra littera Q exhibuimus, in ista forma generali pro V inventa contineri, quandoquidem vtrinque idem terminorum numerus n occurrit, atque coefficientes cosinum seriei Q etiam progressionem arithmeticam constituunt. Quamobrem pro coefficientibus primo faciamus

$$a + b = \frac{n\pi - \theta}{n} \text{ et } a + 2b = \frac{(n-2)\pi - \theta}{n},$$

vnde deducimus

$$b = -\frac{2\pi}{n} \text{ et } a = \frac{(n+2)\pi - \theta}{n}.$$

Nunc etiam angulos inter se coaequemus faciamusque

$$\alpha + 2\beta = \frac{p\theta}{n} \text{ et } \alpha + 4\beta = \frac{p}{n}(\theta + 2\pi),$$

vnde colligimus $\beta = \frac{\pi p}{n}$, hincque porro

$$\alpha = \frac{p}{n}(\theta - 2\pi) = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta),$$

hocque modo fiet $V = Q$. At anguli in expressione ipsius V occurrentes erunt: primo

$$\alpha + (2n + 1)\beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta)$$

vbi cum p sit numerus integer, postrema pars $2\pi p$, totam circumferentiam exprimens, omissa est, ex quo habebimus

$$\sin.(\alpha + (2n + 1)\beta) = -\sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Deinde occurrit angulus

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{n}(\pi - \theta), \text{ cuius sinus est}$$

$$\sin.(\alpha + \beta) = -\sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta).$$

Denique erit

$$\alpha + 2n\beta = -\frac{p}{n}(2\pi - \theta) \text{ et}$$

$$\cos.(\alpha + 2n\beta) = \cos. \frac{p}{n}(2\pi - \theta).$$

His igitur valoribus substitutis prodibit

$$\begin{aligned} Q = V = & -\frac{\frac{(n+2)\pi - \theta}{n} \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta) + \frac{(n+2)\pi - \theta}{n} \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2 \sin. \frac{\pi p}{n}} \\ & + \frac{2\pi \sin. \frac{p}{n}(\pi - \theta)}{2 \sin. \frac{\pi p}{n}} \\ & + \frac{\frac{2\pi}{n} \cos. \frac{p}{n}(2\pi - \theta) - \frac{2\pi}{n} \cos. \frac{p}{n}(2\pi - \theta)}{4 \sin. \frac{\pi p^2}{n}} \end{aligned}$$

quae

quae expressio manifesto reducitur ad hanc:

$$Q = V = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{\operatorname{fin.} \frac{\pi p}{n}}.$$

§. 15. Inuentis igitur valoribus litterarum Q et R, valor integralis quem quaerimus pro casu $x = 1$ erit

$$S = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \frac{\pi p}{n}} - \frac{(\pi - \theta) \operatorname{cof.} \zeta}{n \operatorname{fin.} \theta}.$$

Sin autem integrale quaeratur a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$, eius valor duplo maior euadet.

§. 16. His iam in genere expeditis, consideremus casum iam saepius tractatum, quo est $\zeta = 90^\circ$ et $\theta = 90^\circ$, haecque formula integranda proponitur: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}}$, atque

pro eius valore casu $x = 1$ habebimus $S = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{2n}}{n \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n}}$, quae ob

$\operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n} = 2 \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{2n} \operatorname{cof.} \frac{p\pi}{2n}$, abit in formulam illam notissimam

$\frac{\pi}{2n \operatorname{cof.} \frac{p\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n} \operatorname{sec.} \frac{p\pi}{2n}$. Sin autem tantum sumamus $\zeta = 90$,

vt formula integranda fit $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \operatorname{cof.} \theta + x^{-n}}$, eius valor

ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extensus erit $\frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \operatorname{fin.} \theta \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n}}$,

quae expressio reducitur ad hanc:

$$\frac{\pi}{n \operatorname{fin.} \theta} (\operatorname{cof.} \frac{p\theta}{n} - \operatorname{fin.} \frac{p\theta}{n} \operatorname{cot.} \frac{p\pi}{n}).$$

OBSERVATIONES
in integrationem traditam.

I. Primum hic obseruo terminum medium in nume-
ratore exhibitum nullo modo integrationem turbare, quoniam,
si solus adesset, integratio nulla laboraret difficultate; tum enim

formula $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{1}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$ reducitur ad hanc for-

mam: $\int \frac{x^{n-1} \partial x}{x^{2n} - 2 x^n \cos. \theta + 1}$, quae posito $x^n = y$ abit in hanc:

$\frac{1}{n} \int \frac{\partial y}{y - 2 y \cos. \theta + 1}$, cuius integrale est $\frac{1}{n \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{y \sin. \theta}{1 - y \cos. \theta}$, cuius

valor, casu $x = 1$, fit $\frac{1}{n \sin. \theta} A \text{ tang. } \frac{\sin. \theta}{1 - \cos. \theta} = \frac{(\pi - \theta)}{2 n \sin. \theta}$, qui

ductus in $-2 \cos. \zeta$ praebet illam ipsam partem hinc oriun-
dam in forma supra inuenta, quamobrem superfluum foret hunc
terminum in calculo retinere, vnde hanc formam integram

sumus contemplaturi: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$, cuius valo-

rem casu $x = 1$ inuenimus $= \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$, quem breui-

tatis gratia littera P designemus, ita vt fit $P = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$.

Tum vero etiam inuenimus casu $x = \infty$ valorem huius formu-
lae esse $= 2 P$.

II. Secundo loco probe notari oportet, exponentem p
necessario minorem esse debere quam exponentem n , quia alio-
quin fractio foret spuria, et variabilis x in numeratore tot vel
plures dimensiones esset habitura quam in denominatore. Quo-
ties autem hoc euenit, integrali praeter partes, quas per reso-
lutio-

lutionem in fractiones partiales sumus nacti, quantitas quaedam integra adiiici debet, id quod in nostra solutione non est factum, quamobrem tales casus hinc prorsus excludi conuenit. Ceterum quolibet casu has partes integras facile erit adiiicere ad partes quas nobis nostra methodus suppeditabit.

III. Ex ipsa solutione, quam dedimus, perspicuum est exponentem p necessario integrum statui debere, quia alias operationes ibi exhibitae locum habere non possent; vnde eo magis mirum videbitur, quod conclusiones inuentae subsistere queant, etiamsi iste exponentes p fuerit numerus fractus quicumque, dummodo minor quam n , propterea quod hos casus semper ad exponentes integros reducere licet. Ad hoc ostendendum ponamus esse $p = \frac{q}{\lambda}$, atque forma nostra, posito $x = z^\lambda$, reducetur ad hanc formam: $\lambda \int \frac{\partial z}{z} \cdot \frac{z^q + z^{-q}}{z^{\lambda n} - 2 \cos. \theta + z^{-\lambda n}}$, vbi

cum omnes exponentes sint integri, ac pro terminis integrationis, qui erant $x = 0$, $x = 1$ et $x = \infty$, etiam fiat $z = 0$, $z = 1$

et $z = \infty$, pro $z = 1$ valor integralis erit $\frac{\lambda \pi \sin. \frac{q}{\lambda n} (\pi - \theta)}{\lambda n \sin. \theta \sin. \frac{q \pi}{\lambda n}}$,

qui, restituto loco $\frac{q}{\lambda}$ valore p , abit in hunc: $\frac{\pi \sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p \pi}{n}}$,

quae expressio cum superiore prorsus congruit. Atque hinc intelligitur, quominus etiam exponenti p valores irrationales tribuantur, dumne superent exponentem n , semper hoc euenire debere.

IV. Hic iam quaestio oritur maximi momenti, vtrum etiam exponenti p dare liceat valores imaginarios nec ne? Hoc autem affirmandum videtur, quandoquidem imaginaria certe non sint maiora quam n ; vnde concludimus, dummodo valor ipsius p ita capiatur imaginarius, vt ipsa formula differentialis

maneant reales, tum etiam conclusiones nostras veritati consentaneas esse manifestas. Hoc autem evenit, si statuamus $p = q\sqrt{-1}$; tum enim, cum in genere sit $e^{\Phi\sqrt{-1}} + e^{-\Phi\sqrt{-1}} = 2 \cos. \Phi$, quia nostro casu est $\Phi = qlx$, ipsa formula integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{2 \cos. qlx}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}.$$

Nunc igitur videamus quamnam formam nostrum integrale casu $x = 1$ sit recepturum, et quoniam sinus angulorum imaginariorum sunt etiam imaginarii, quandoquidem

$$e^{\Phi\sqrt{-1}} - e^{-\Phi\sqrt{-1}} = \frac{2}{\sqrt{-1}} \sin. \Phi,$$

loco Φ scribamus $\psi\sqrt{-1}$, eritque

$$\sin. \psi\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} (e^{-\psi} - e^{+\psi}),$$

vnde in forma integrali erit $\frac{p}{n} = \frac{q\sqrt{-1}}{n}$, ideoque loco ψ scribamus $\frac{q}{n}(\pi - \theta)$ pro numeratore, et $\frac{q\pi}{n}$ pro denominatore, ex quo valor integralis ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus erit

$$\frac{\pi}{n \sin. \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi - \theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi - \theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}.$$

Hinc igitur formemus sequens Theorema notatu dignissimum:

Quodsi ista formula integralis:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos. qlx}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}},$$

a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extendatur, eius valor semper

$$\text{erit} = \frac{\pi}{2n \sin. \theta} \cdot \frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi - \theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi - \theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}. \text{ Sin autem in-}$$

tegrale extendatur ab $x = 0$ $x = \infty$, valor prodibit duplo maior.

Hoc

Hoc theorema vtique eo maiorem attentionem meretur, quod nulla via patet, eius veritatem directe demonstrandi.

V. Reuertamur autem ad formam integram primo expositam, et quoniam numerator duabus constat partibus x^p et x^{-p} , vnde summa integralium pro $x = 1$ inuenta est $= P$, at pro casu $x = \infty$ duplo maior $= 2 P$, hic maxime notatu dignum occurrit, quod pro termino $x = \infty$ vtraque pars numeratoris eundem producat valorem $= P$. Semper enim erit, integrale ab $x = 0$ ad $x = \infty$ extendendo,

$$\int \frac{\partial x}{x} \frac{x^p}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}} = \int \frac{\partial x}{x} \frac{x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}} = P.$$

Ad hoc ostendendum ponamus pro posteriore formula $x = \frac{1}{z}$, eaque induet hanc formam:

$$- \int \frac{\partial z}{z} \frac{z^{-p} + z^+ p}{z^{-n} - 2 \cos. \theta + z^n},$$

quae cum fit priori formae prorsus similis, solo signo — excepto, eius valor a termino $z = 0$ vsque ad $z = \infty$, negative sumtus, primae formulae erit aequalis. Cum autem fit $z = \frac{1}{x}$, isti termini integralis erunt ab $x = \infty$ vsque ad $x = 0$, qui ergo si inuertantur, etiam signum integralis erit mutandum, sicque ipsi priori formulae aequale euadet; quare cum ambae formulae coniunctae summam habeant $= 2 P$, vtriusque seorsim sumtae valor erit $= P$, vnde deducitur sequens theorema notatu pariter dignissimum:

Istius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \frac{x^{\pm p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$ valor a termino $x = 0$ vsque ad $x = \infty$ extensus semper est

$$= P = \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}},$$

Euidens

Evidens autem est hanc aequalitatem pro casu $x = 1$, neutiquam locum habere posse.

VI. Quoniam in nostra formula differentiali tantum occurrit terminus $2 \cos. \theta$, cuius valor idem manet, etiamsi pro θ sumeremus $\theta \pm 2i\pi$, maxime hic mirum videri debet, quod tum valor integralis maxime diuersus fit proditurus, scilicet $= \frac{\pi \sin. \frac{p}{n} (\pi - \theta \pm 2i\pi)}{n \sin. \theta \sin. \frac{p\pi}{n}}$, vnde merito quaeritur, quisnam

horum valorum veritati sit conformis, ad quod certe nihil aliud responderi potest, nisi quod omnes veritati aequae consentanei sint censendi, id quod eo minus mirum videri debet, quod omnes huiusmodi formulae integrales reuera sunt functiones multiformes, atque adeo infinitiformes, id quod ex hoc exemplo simplicissimo: $\int \frac{dx}{1+x^2}$ intelligi potest. Cum enim eius integrale exhibeat arcum circuli cuius tangens est x , tales autem arcus innumerabiles dentur, quorum eadem sit tangens $= x$, necesse est, vt omnes aequae iu hac forma integrali contineantur. Quin etiam in nostro valore inuento P loco π quoque scribere licet $\pi + 2i\pi$, eiusque valor nihilominus cum veritate consistere poterit. Verum in huiusmodi integrationibus perpetuo valores minimi desiderari solent, hocque modo omnis difficultas e medio est sublata.

VII. Deinde in Analyfi supra adhibita supposuimus omnes factores denominatoris inter se esse inaequales, id quod vtiq; semper euenit, nisi fit $\cos. \theta = \pm 1$, quippe quibus casibus denominator quadratum inuoluit: fit enim is

$$= x^{-n} (x^n \pm 1)^2;$$

ex quo patet omnes factores $x^n \pm 1$ bis occurrere debere. Hoc incommodum etiam innuitur per ipsam nostram formulam P, quae

quae casu $\theta = 0$ valorem indicat infinitum. Verum posito $\theta = \pi$, singulare phaenomenon se offert, dum formulae pro P inuentae tam numerator quam denominator euanescent, atque adeo fractio determinatum nanciscitur valorem. Ponamus enim $\theta = \pi - \omega$, existente ω infinite paruo, eritque $\sin. \theta = \sin. \omega = \omega$; at ob $\pi - \theta = \omega$, in numeratore habebimus $\sin. \frac{p\omega}{n} = \frac{p\omega}{n}$, vnde valor ipsius P resultat $\frac{\pi p}{n n \sin. \frac{p\pi}{n}}$, qui cum penitus sit determinatus, nullum plane dubium superesse potest, quin cum veritate conspiret, vnde sequens enascitur Theorema maxime memorabile :

Theorema.

Proposita formula differentiali

$$\frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 1 + x^{-n}} = \frac{x^{n-1} \partial x (x^p + x^{-p})}{(x^n + 1)^2},$$

si eius integrale a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extendatur, eius valor semper erit $\frac{\pi p}{n n \sin. \frac{p\pi}{n}}$; sin autem vsque ad terminum

$x = \infty$ extendatur, eius valor erit duplo maior $= \frac{2 \pi p}{n n \sin. \frac{p\pi}{n}}$.

Demonstratio huius Theorematis directa.

Formula ista integralis resoluetur sequenti modo:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1 + x^n)^2} = \frac{Q}{1 + x^n} + \int \frac{\partial x}{x} \frac{R}{1 + x^n}.$$

Sumantur igitur differentia simulque ducantur in $\frac{x}{\partial x}$, positoque $\partial Q = Q \partial x$, orietur ista aequatio:

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p}}{(1 + x^n)^2} = \frac{Q' x}{1 + x^n} - \frac{n Q x^n}{(1 + x^n)^2} + \frac{R}{1 + x^n},$$

Noua Acta Acad. Imp. Sc. T. III.

C

quae

quae per $1 + x^n$ multiplicata hoc modo representetur :

$$\frac{x^{n+p} + x^{n-p} + n Q x^n}{1 + x^n} = Q' x + R,$$

vbi iam Q ita accipi debet, vt illa fractio ad integrum reuocetur. Facile autem patet, hoc fieri statuendo

$$n Q = -x^p + x^{n-p},$$

tum enim illa fractio fiet

$$\frac{x^{n-p} + x^{n-p}}{1 + x^n} = x^{n-p},$$

ita vt nunc habeamus $x^{n-p} = Q' x + R$. Cum igitur sit

$$Q = \frac{x^{n-p} - x^p}{n}, \text{ erit}$$

$$Q' x = \frac{(n-p)x^{n-p} - p x^p}{n},$$

hincque colligitur $R = \frac{p}{n}(x^{n-p} + x^p)$, quocirca formula integralis proposita reducta est ad hanc formam :

$$\frac{x^{n-p} - x^p}{n(1+x^n)} + \frac{p}{n} \int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^{n-p} + x^p}{1+x^n},$$

quod integrale ita est sumendum, vt euanescat posito $x = 0$. Nunc igitur statuamus $x = 1$, ac prior pars absoluta euanescit, formulae autem integralis valor, per ea quae dudum sunt inuenta,

prodit $\frac{p}{n} \cdot \frac{\pi}{n \sin \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi p}{n n \sin \frac{p\pi}{n}}$, qui ergo cum ante inuento perfecte congruit.

VIII. Tribuatur nunc etiam in hac postrema forma exponenti p valor imaginarius, ponendo $p = q \sqrt{-1}$, et cum, vt ante vidimus, hinc fiat $x^p + x^{-p} = 2 \cos. q l x$, formula integralis proposita erit $= 2 \int \frac{\partial x}{x} \frac{x^n \cos. q l x}{(1+x^n)^2}$. Pro eius valore

valore autem iam ante vidimus fore

$$\text{fin. } \frac{\pi q \sqrt{-1}}{n} = \frac{e^{-\frac{\pi q}{n}} - e^{+\frac{\pi q}{n}}}{2 \sqrt{-1}},$$

quamobrem valor nostrae formulae, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensus, erit $\frac{2 \pi q}{n n (e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{-\frac{\pi q}{n}})}$, vnde deducimus sequens theoremata omni attentione dignum.

Theorema.

Si valor istius formulae integralis: $\int \frac{x^{n-1} \partial x (x^p + x^{-p})}{(1 + x^n)^2}$, a termino $x = 0$ vsque $x = 1$ extendatur, is semper aequabitur huic formulae: $\frac{\pi q}{n n (e^{\frac{\pi q}{n}} - e^{-\frac{\pi q}{n}})}$. Cuius autem Theorematis demonstratio ex principiis iam cognitis vix elici posse videtur.

IX. Praeterea etiam perspicuum est, methodum, qua vsi sumus ad nostram formulam integrandam, subsistere non posse, nisi terminus medius denominatoris binario sit minor, quam ob causam eum hac forma $2 \cos. \theta$ expressimus. Quamobrem hinc oritur quaestio maximi momenti: vtrum nostrae conclusiones etiamnunc valeant, si terminus ille medius binario maior acciperetur, siue si angulus θ foret imaginarius, nec ne? Verum etiam hoc casu nullum dubium superesse potest, quin formula nostra finalis etiamnunc veritati consentanea sit futura. Ante omnia autem hic est observandum, illi termino medio $2 \cos. \theta$ valorem negativum tribui convenire, quia alioquin ipse denominator in nihilum abiret, dum quantitas nostra variabilis x a termino 0 vsque ad 1 augetur. Hanc ob rem statuamus angulum $\theta = \pi - \eta$, et valor noster integralis erit

C 2

$\int \partial x$

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + 2 \cos. \eta + x^{-n}} \left[\begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{array} \right] = \frac{\pi \sin. \frac{p \eta}{n}}{n \sin. \eta \sin. \frac{\pi p}{n}}$$

In hac igitur forma faciamus angulum η imaginarium, ponendo $\eta = \Phi \sqrt{-1}$, eritque, per ea quae iam supra obseruauimus, $2 \cos. \Phi \sqrt{-1} = e^\Phi + e^{-\Phi}$, ita vt iam noster denominator fit

$$x^n + e^\Phi + e^{-\Phi} + x^{-n} = \frac{1}{x^n} (x^n + e^\Phi)(x^n + e^{-\Phi}),$$

quem idcirco statim in duos factores reales formae $x+k$ resolueri licet; tum vero fiet

$$\sin. \theta = \sin. \Phi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\Phi} - e^{+\Phi}}{2 \sqrt{-1}},$$

similique modo erit

$$\sin. \frac{p}{n} \eta = \sin. \frac{p}{n} \Phi \sqrt{-1} = \frac{e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}}}{2 \sqrt{-1}},$$

vnde formula nostra integralis emergit realis

$$= \frac{\pi (e^{-\frac{p\Phi}{n}} - e^{+\frac{p\Phi}{n}})}{n (e^{-\Phi} - e^{+\Phi}) \sin. \frac{p\pi}{n}}.$$

Statuamus autem hic breuitatis gratia $e^\Phi = f$, vt sit $e^{-\Phi} = \frac{1}{f}$, atque nostra formula integralis sequentem induet formam:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}} \left[\begin{array}{l} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{array} \right] = \frac{\pi (f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}})}{n (f - f^{-1}) \sin. \frac{p\pi}{n}},$$

id quod tanquam Theorema omni attentione dignum spectari potest; vbi per se intelligitur, valorem eiusdem integralis, vsque ad $x = \infty$ extensum, fore duplo maiorem.

X. Quodsi iam in hac forma etiam exponenti p valorem imaginarium tribuamus, pariter nullo modo dubitari poterit,

rit, quin conclusio nostra vera fit mansura. Ponamus igitur $p = q\sqrt{-1}$, eritque ut ante $x^p + x^{-p} = 2 \cos. q l x$; tum

vero erit $\sin. \frac{p \pi}{n} = \frac{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}}{2\sqrt{-1}}$, pro integralis autem numeratore erit $f^{\frac{p}{n}} - f^{-\frac{p}{n}} = 2\sqrt{-1} \sin. \frac{q}{n} l f$. His igitur valoribus substitutis sequens nanciscimur

Theorema.

Valor istius formulae integralis: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos. q l x}{x^n + (f + \frac{1}{f}) + x^{-n}}$, a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensus, semper aequabitur formulae $\frac{2\pi \sin. \frac{q}{n} l f}{n(f - f^{-1})(e^{\frac{q\pi}{n}} - e^{-\frac{q\pi}{n}})}$.

XI. Deinde iam pridem observaui, omnia huiusmodi integralia satis commode per series infinitas exprimi posse. Cum enim ista fractio:

$$\frac{x^p}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}} = \frac{x^{n+p}}{x^{2n} - 2 x^n \cos. \theta + 1},$$

resoluatur in hanc seriem:

$$\frac{x}{\sin. \theta} (x^{n+p} \sin. \theta + x^{2n+p} \sin. 2\theta + x^{3n+p} \sin. 3\theta \text{ etc.})$$

integrale istud: $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^{2n} - 2 x^n \cos. \theta + 1}$, a termino $x = 0$

usque ad $x = 1$ extensum, aequabitur huic seriei infinitae:

$$\frac{x}{\sin. \theta} \left(\frac{\sin. \theta}{n+p} + \frac{\sin. 2\theta}{2n+p} + \frac{\sin. 3\theta}{3n+p} + \frac{\sin. 4\theta}{4n+p} + \text{etc.} \right)$$

Hinc ergo, si p negative caperemus, tum formula nostra prin-

cipalis $\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$, ab $x = 0$ ad $x = 1$ ex-

tenfa, femper aequabitur huic feriei infinitae geminatae :

$$\frac{1}{\sin. \theta} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin. \theta}{n+p} + \frac{\sin. 2\theta}{2n+p} + \frac{\sin. 3\theta}{3n+p} + \frac{\sin. 4\theta}{4n+p} \text{ etc.} \\ + \frac{\sin. \theta}{n-p} + \frac{\sin. 2\theta}{2n-p} + \frac{\sin. 3\theta}{3n-p} + \frac{\sin. 4\theta}{4n-p} \text{ etc.} \end{array} \right\},$$

quae binis homologis coniungendis contrahitur in hanc feriem:

$$\frac{2n}{\sin. \theta} \left(\frac{\sin. \theta}{n n - p p} + \frac{2 \sin. 2\theta}{4 n n - p p} + \frac{3 \sin. 3\theta}{9 n n - p p} + \frac{4 \sin. 4\theta}{16 n n - p p} + \text{etc.} \right)$$

XII. Hinc iam manifesto pro casu, quo ponitur $p = q \sqrt{-1}$, ista series infinita exoritur:

$$\frac{2n}{\sin. \theta} \left(\frac{\sin. \theta}{n n + q q} + \frac{2 \sin. 2\theta}{4 n n + q q} + \frac{3 \sin. 3\theta}{9 n n + q q} + \frac{4 \sin. 4\theta}{16 n n + q q} + \text{etc.} \right)$$

quae ergo exprimit valorem huius formulae integralis :

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{\cos. q \log x}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}},$$

scilicet ab $x = p$ ad $x = 1$ extensae, ita vt istius seriei summa finito modo expressa sit etiam

$$\frac{\pi}{n \sin. \theta} \cdot \left(\frac{e^{-\frac{q}{n}(\pi - \theta)} - e^{+\frac{q}{n}(\pi - \theta)}}{e^{-\frac{q\pi}{n}} - e^{+\frac{q\pi}{n}}} \right).$$

Quin etiam facile intelligitur hic quoque angulum θ imaginarium accipi posse. Vidimus enim posito $\theta = \Phi \sqrt{-1}$ fore

$$\sin. \theta = \frac{e^{-\Phi} - e^{+\Phi}}{2 \sqrt{-1}}, \text{ hincque in genere}$$

$$\sin. \lambda \theta = \frac{e^{-\lambda \Phi} - e^{+\lambda \Phi}}{2 \sqrt{-1}}.$$

Quare si statuamus $e^{\Phi} = f$, erit $\frac{\sin. \lambda \theta}{\sin. \theta} = \frac{f^{\lambda} - f^{-\lambda}}{f - f^{-1}}$, vnde se-

ries illa satis concinnam formam accipiet.

XII. Denique operationes, quibus in integratione nostrae formulae sumus vsi, consistere nequeunt, nisi exponens n fuerit numerus integer. Interim tamen valor integralis, quem inuenimus pro casu vel $x = 1$ vel $x = \infty$, veritati conformis apprehenditur, non solum quando pro n numerus fractus quicumque sed etiam adeo imaginarius accipitur, quorum prius facile ostenditur. Sit enim $n = \frac{m}{\lambda}$, ac ponatur $x = y^\lambda$, atque ob $\frac{\partial x}{x} = \frac{\lambda \partial y}{y}$, orietur haec forma integralis exponentibus integris contenta: $\int \frac{\lambda \partial y}{y} \cdot \frac{y^{\lambda p} + y^{-\lambda p}}{y^m - 2 \cos. \theta y^{-m}}$, cuius ergo valor casu $x = 1$ debet esse secundum formulam inuentam

$$\frac{\lambda \pi}{m} \cdot \frac{\text{fin. } \frac{\lambda p}{m} (\pi - \theta)}{\text{fin. } \theta \text{ fin. } \frac{\lambda p \pi}{m}}$$

qui, si iam loco m valor λn restituatur, manifesto abit in ipsam nostram formulam supra inuentam: $\frac{\pi}{n} \frac{\text{fin. } \frac{p}{n} (\pi - \theta)}{\text{fin. } \theta \text{ fin. } \frac{p \pi}{n}}$. Hinc autem

nulli amplius dubio relinquitur, quin veritas haec subsistat, etiam si n fuerit numerus imaginarius. Ponamus igitur $n = m \sqrt{-1}$; et formula integralis reducetur ad hanc formam:

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{2 \cos. m l x - 2 \cos. \theta}, \text{ cuius ergo valor casu } x = 1$$

certe erit $\frac{p}{m \sqrt{-1}} \cdot \frac{\frac{p}{e^m} (\pi - \theta) - e^{-\frac{p}{m}} (\pi - \theta)}{\text{fin. } \theta (e^{\frac{\pi p}{m}} - e^{-\frac{\pi p}{m}})}$, vbi mirum

videbitur istum valorem semper esse imaginarium, licet ipsa formula differentialis, dum variabilis x , a termino 0 vsque ad terminum $x=1$, maneat realis, id quod merito maxime videtur paradoxum. Interim tamen non desunt casus, quibus valor integralis formulae differentialis realis manifesto euadit imaginarius, id quod in ista formula simpliciori $\int \frac{\partial x}{x \cos. m l x}$ ostendisse

suffi-

sufficiet, quae utique, dum x a 0 ad 1 augetur, constanter manet realis. Ad hanc ergo formulam integrandam statuamus $l x = -z$, ubi notetur, dum x a 0 vsque ad 1 progreditur, tum quantitatem z ab ∞ vsque ad 0 decrefcere. Nunc igitur formula nostra integralis erit $\int \frac{-dz}{\cos. m z}$, cum vero constet esse $\int \frac{d\Phi}{\sin. \Phi} = l \text{ tang. } \frac{1}{2} \Phi$, fumamus $\Phi = 90^\circ - m z$, eritque $d\Phi = -m dz$, hincque

$$\int \frac{-m dz}{\cos. m z} = + l \text{ tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} m z),$$

quod integrale manifesto euanesct pro termino $z = 0$, dum autem ab hoc termino quantitas z in infinitum vsque augetur, infinities tangens huius anguli fiet negatiua, eiusque logarithmus propterea imaginarius, vnde non amplius mirabimur, quod formulae differentialis realis integrale euadere possit certis casibus imaginarium.

XIII. Hoc igitur modo euictum est formulae nostrae differentialis propositae $\int \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^p + x^{-p}}{x^n - 2 \cos. \theta + x^{-n}}$, integrale assignatum a termino $x = 0$ vsque ad $x = 1$ semper cum veritate consistere, quicumque valores ternis litteris n , p et θ , tribuantur, siue integri, siue fracti, siue etiam imaginarii. Interim tamen dantur casus iam initio indicati, quibus isti valores integrales a veritate aberrabunt, quippe quod semper vsu venire debet, quoties exponens p maior est exponente n , quam ob causam sedulo excludere debemus omnes casus, quibus formula $p - n$ euadit realis et positiua. His autem exceptis variae formulae, ad quas hic sumus perducti, ita sunt comparatae, vt maxima attentione dignae videantur, simulque non contemnenda incrementa Scientiae analyticae promittant.