1788

# Enodatio difficultatis super figura terrae a vi centrifuga oriunda

Leonhard Euler

# ENODATIO DIFFICVLTATIS
# SVPER FIGVRA TERRAE
## A VI CENTRIFVGA ORIVNDA.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. d. 2 Nouembr. 1775.*

§. 1.

Notum eſt, ſi Terrae figura ex ſola vi grauitatis cum vi centrifuga coniuncta definiatur, rationem Diametri aequatoris ad axem Terrae non maiorem reperiri quam 578 : 577, cum tamen haec ratio poſt menſuras diuerſorum graduum inſtitutas multo maior deprehendatur 201 : 200 propemodum. *Hugenius* quidem et *Newtonus*, qui primi hanc rationem inueſtigarunt, totam Terram tanquam ex materia vniformi compoſitam ſunt contemplati, interim tamen quaecunque diuerſa ſtructura in partibus Terrae interioribus ſtatuatur, eadem ſemper ratio diametri aequatoris ad axem reſultat, quamdiu ſcilicet grauitatis directio ad centrum Terrae tendens aſſumitur.

§. 2. Quod ſi enim intra Terram grauitatio poteſtati cuicunque diſtantiae a centro, quae ſit $= z$, proportionalis ſtatuatur, vt ea ſit $= z^{n-1}$, dum ſemi-axis Terrae per vnitatem exprimitur, ex Theoria aequilibrii fluidorum deducitur iſta aequatio: $\frac{z^n}{n} = C + \frac{xx}{2f}$, vbi ſi C A pro radio aequatoris et Tab. IV. Fig. 3.

$CB = 1$ pro ſemi-axe Terrae accipiatur, littera $z$ denotat diſtantiam cuiusque particulae $Z$ a centro terrae $C$, at $x$ intervallum $CX$ demiſſo ex $Z$ ad $CA$ perpendiculo $CX$, littera vero $f$ denotat numerum 289 ex motu vertiginis Terrae ortum; tum vero littera $C$ eſt quantitas conſtans ex ipſo ſtatu Terrae determinanda. Primo igitur punctum indefinitum $Z$ capiatur in ipſo polo B, fietque $x = 0$; at prodire debet $z = 1$, vnde colligitur conſtans $C = \frac{1}{n}$. Nunc punctum $Z$ transferatur in aequatorem A, vt fiat $x = z$, atque habebitur iſta aequatio: $\frac{z^n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{zz}{2f}$. Hinc autem, quia nouimus valorem ipſius $z$ quam minime vnitatem eſſe ſuperaturum, ponamus $z = 1 + \omega$, eritque ſatis exacte $z^n = 1 + n\omega$, et ob $2f = 578$ loco $\frac{zz}{2f}$ ſcribi ſufficiet $\frac{1+2\omega}{578}$, hincque aequatio noſtra praebebit $\frac{1+n\omega}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1+2\omega}{578}$, vnde colligitur $\omega = \frac{1}{576}$, ita vt hinc fiat radius aequatoris $C = 1 + \frac{1}{576}$, ideoque diameter aequatoris ad axem Terrae vt $577 : 576$, vnde patet hanc rationem ab exponente indefinito $n$ prorſus non pendere.

§. 3. Ex his etiam manifeſtum eſt, quaecunque alia functio ipſius $z$ pro grauitate accipiatur, perpetuo eandem concluſionem inde ſequi debere. Quamobrem cum vera proportio inter axem Terrae et diametrum aequatoris tantopere ab iſta inuenta ratione diſſideat, neceſſario ſtatui oportet, ſingulas Terrae particulas $Z$ non ſolum ad centrum Terrae $C$ vrgeri, ſed inſuper alias vires adeſſe debere, quibus particula in $Z$ ſecundum directionem $ZS$ ad $CZ$ normalem ſollicitetur; tales etiam vires hypotheſis grauitatis vniuerſalis qua ſingulae particulae ad omnes alias attrahi ſupponuntur reuera oſtendit, ita vt in figura Terrae determinanda etiam iſtae vires laterales in computum duci debeant. Verum has ipſas vires ex theoria grauitavitationis ne determinare quidem licet, nisi iam ante figura Terrae cum vniuersa eius structura fuerit cognita, quandoquidem harum virium determinatio non solum a densitate materiae per totam Terram dispositae sed etiam ab ipsa figura externa totius Terrae pendet; vnde satis intelligitur, hanc inuestigationem tantopere esse absconditam, vt eius perfecta explicatio nullo modo sperari possit. Quicquid enim a Geometris super hoc argumento in medium est allatum, meris hypothesibus iisque precario assumtis innititur, quae plerumque adeo omni probabilitate destituuntur.

§. 4. Quod si vero hanc inquisitionem generalissime suscipere velimus, binas illas vires, quibus singulae Terrae particulae Z secundum directiones ZC et ZS ob grauitatem vniuersalem sollicitantur, generaliter in computum introduci conueniet, vnde autem ob summam generalitatem vix quicquam concludere licebit; cum non constet, a quibusnam elementis istae vires pendere sint censendae; vis quidem prior ad centrum C vrgens probabili ratione functioni cuipiam ipsius distantiae $CZ = z$ proportionalis statui posse videtur, quam designemus littera Z, altera vero vis lateralis secundum ZS quae sit $= S$, manifesto non solum a distantia $CZ = z$ pendere potest, sed insuper angulum ACZ ita inuoluere debet, vt ea euanescat tam casu quo iste angulus euanescit, quam vbi fit rectus; quoniam ex rei natura euidens est, istam vim lateralem tam in aequatore CA quam in axe CB euanescere debere, siquidem nullum est dubium quin tam sub polis quam in aequatore omnia corpora directe versus centrum C sollicitentur, quamobrem vim illam alteram S tanquam functionem binarum variabilium $CZ = z$ et $CX = x$ spectari oportebit.

§. 4. His igitur praenotatis figuram Terrae secundum principia aequilibrii fluidorum, quemadmodum ea in Tom. XIII.

 nouor.

nouor. Commentar. expoſui inueſtigemus, ac primo quidem ſtatum preſſionis in puncto quocunque Z definiamus, quae altitudine $p$ definiatur. Hunc in finem pro puncto Z vocemus binas coordinatas $CX = x$ et $XZ = CY = y$: hic enim tertia coordinata, quae ibi vocata erat $= z$, carere poſſumus, quandoquidem certum eſt, in omnibus ſectionibus per axem factis terram eandem figuram habere debere. Nunc igitur ambae vires Z et S ſecundum binas directiones ZX et ZY reſoluantur, ac prior quidem Z ſecundum ZC pro directionibus ZY et ZX, praebet vires $\frac{Zx}{z}$ et $\frac{Zy}{z}$. Altera vero vis $ZS = S$ pro iisdem directionibus dat has vires: $-\frac{Sy}{z}$ et $+\frac{Sx}{z}$. Praeterea vero vis centrifuga a motu diurno Terrae orta praebet vim ſecundum $YZ = \frac{x}{f}$, vnde ex ternis viribus quas in genere deſignaui per litteras P, Q, R, primo erit $R = 0$, ſecundo $P = \frac{x}{f} - \frac{Zx}{z} + \frac{Sy}{z}$ et tertio $Q = -\frac{Zy}{z} - \frac{Sx}{z}$. Ex his autem viribus, ſumta littera $q$ pro denſitate in puncto Z, principia aequilibrii hanc dederunt aequationem: $\frac{\partial p}{q} = P\,\partial x + Q\,\partial y$, quae ergo noſtro caſu induet hanc formam,

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Zx.\partial x}{z} + \frac{Sy.\partial x}{z} - \frac{Zy.\partial y}{z} - \frac{Sx.\partial y}{z},$$

ſiue

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - \frac{Z}{z}(x\,\partial x + y\,\partial y) + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

Haec autem aequatio porro, ob $x\,\partial x + y\,\partial y = z\,\partial z$, contrahitur in hanc

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\,\partial x}{f} - Z\,\partial z + \frac{S}{z}(y\,\partial x - x\,\partial y).$$

§. 6. Nunc autem ante omnia tenendum eſt, niſi haec formula integrationem admittat, ſtatum aequilibrii nullo modo locum inuenire poſſe; quamobrem, cum tuto aſſumere queamus, in Terra dari ſtatum aequilibrii, quia alioquin quaeſtio de de figura ne suscipi quidem posset, necesse est vt formula haec inuenta integrationem admittat, quod quidem in primo termino $\frac{x\partial x}{f}$ sponte euenit; tum vero etiam integratio in secundo termino semper succedit, dummodo Z fuerit functio ipsius $z$ vti assumsimus; quamobrem superest vt postremum membrum $\frac{S}{z}(x\partial x - x\partial y)$ integrationem admittat, quod cum hoc modo repraesentari possit $\frac{Sxy}{z}(\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y})$, integratio locum habere nequit, nisi $\frac{Sxy}{z}$ sit functio ipsius $\frac{x}{y}$, ideoque functio nullius dimensionis ipsarum $x$ et $y$; quare cum $z = \sqrt{(xx+yy)}$ vnam habeat dimensionem, necesse est vt S sit functio homogenea ipsarum $x$ et $y$, cuius dimensionum numerus sit $-1$, vnde iam satis clare cognoscimus indolem functionis S, siquidem pro certo assumamus, figuram terrae aequilibrio esse praeditam.

§. 7. Quo hoc clarius appareat, loco coordinatarum $x$ et $y$ in postremo membro introducamus angulum ACZ $= \Phi$, eritque $x = z\cos.\Phi$ et $y = z\sin.\Phi$, vnde fit $y\partial x - x\partial y = -zz\partial\Phi$, ita vt iam nostra aequatio hanc induat formam:

$$\frac{\partial p}{q} = \frac{x\partial x}{f} - Z\partial z - Sz\partial\Phi,$$

quae manifesto integrationem non admittit, nisi fuerit $Sz$ functio anguli $\Phi$. Sit igitur $\Phi$ ista functio, eritque vis lateralis $S = \frac{\Phi}{z}$; vbi patet, istam functionem $\Phi$ ita debere esse comparatam, vt euanescat tam posito $\Phi = 0$, quam $\Phi = 90°$. Hinc igitur integrando adipiscemur

$$\int\frac{\partial p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z\partial z - \int\Phi\partial\Phi.$$

Atque hic porro obseruandum est aequilibrium subsistere non posse, nisi etiam formula $\int\frac{\partial p}{q}$ sit integrabilis. Quoniam autem hic densitatem aquae $q$ vbique constantem assumere licet, erit

 vtique

vtique

$$\frac{p}{q} = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi.$$

Si enim ob diuerſos caloris gradus denſitas $q$ eſſet variabilis, iam ſatis euictum eſt, aequilibrium locum habere non poſſe, niſi $q$ ſit functio ipſius $p$ tantum, hoc eſt niſi per ſingula ſtrata vbi eadem eſt preſſio $p$ etiam denſitas ſit eadem.

§. 8. His de aequilibrio per totam fluidi maſſam praemiſſis, nil aliud ſupereſt niſi vt aequatio inuenta ad ſupremam aquae ſuperficiem accommodetur, vbi cum preſſio $p$ ſit euaneſcens, poſito $p = 0$ aequatio haec

$$0 = C + \frac{xx}{2f} - \int Z \partial z - \int \Phi \partial \phi,$$

exprimet figuram quam ſuprema aquae ſuperficies in ſtatu aequilibrii accipiet. Ex iam allatis autem patet, parum referre, cuiusmodi functio ipſius $z$ pro $Z$ aſſumatur, quoniam diſcrimen inter diametrum aequatoris et axem Terrae nimis eſt paruum, quam vt ex natura functionis $Z$ ſenſibilis diuerſitas oriri poſſit.

§. 9. Deſignemus igitur vti incepimus vnitate ſemiaxem Terrae $CB$, ſitque ſub ipſo polo in $B$ vis grauitatis acceleratrix etiam vnitate expreſſa, ita vt poſito $z = 1$, fieri quoque debeat $Z = 1$; quamobrem ſtatuamus aliquanto generalius $Z = z^{n-1}$, vt fiat $\int Z \partial z = \frac{z^n}{n}$. Deinde quia functio $\Phi$ euaneſcere debet caſibus $\phi = 0$ et $\phi = 90°$, pro $\Phi$ capiamus functionem ſimpliciſſimam huic conditioni ſatisfacientem, ponendo $\Phi = \alpha \sin.\phi \cos.\phi$, vnde fit $\int \Phi \partial \phi = \frac{1}{2} \alpha \sin.\phi^2$. His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio pro ſuperficie aquae erit $0 = C + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2}\alpha \sin.\phi^2$, quae ergo ſimul exprimit

mit figuram Terrae, quam ob vim centrifugam recipere debet, vbi vt ante eſt $f = 289$.

§. 10. Ante omnia hic conſtantem C definire oportet, id quod commodiſſime fiet transferendo punctum Z in ipſum B, vbi fieri neceſſe eſt $z = 1$, $x = 0$ et $\Phi = 90°$, vnde colligitur conſtans $C = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha$. Sicque aequatio pro figura Terrae erit

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{xx}{2f} - \frac{z^n}{n} - \frac{1}{2}\alpha \sin.\Phi^2, \text{ ſiue}$$

$$0 = \frac{1 - z^n}{n} + \frac{xx}{2f} + \frac{1}{2}\alpha \cos.\Phi^2,$$

ſeu quia $\cos.\Phi = \frac{x}{z}$, erit

$$z^n = 1 + \frac{nxx}{2f} + \frac{\alpha nxx}{2zz},$$

vnde ob $z = \sqrt{(xx + yy)}$ facile deducitur aequatio inter binas coordinatas $x$ et $y$.

§. 10. Hinc igitur quaeramus ſemi-diametrum aequatoris transferendo punctum Z in A, vbi ergo fiet $x = z = CA$, cuius propterea valor ex hac aequatione elici debet

$$z^n = 1 + \frac{nzz}{2f} + \frac{1}{2}\alpha n.$$

Quia vero nouimus, valorem ipſius $z$ parum ab vnitate diſcrepare, ponamus $z = 1 + \omega$, vt fiat $z^n = 1 + n\omega$ et $zz = 1 + 2\omega$, quibus valoribus inductis fiet $\omega = \frac{1 + \alpha f}{2(f - 1)}$. Sin autem hunc valorem accuratius deſideremus, loco $z^n$ ſcribamus

$$1 + n\omega + \frac{1}{2}n(n - 1)\omega\omega$$

et $1 + 2\omega + \omega\omega$ loco $zz$, et noſtra aequatio fiet

$$\omega + \frac{1}{2}(n - 1)\omega\omega = \frac{1 + 2\omega + \omega\omega}{2f} + \frac{1}{2}\alpha,$$

vbi cum ſit

(2

$$(2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega)\,\omega = 1+\alpha f,$$

inde fit $\omega = \frac{1+\alpha f}{2(f-1)+(f(n-1)-1)\omega}$, vbi ſi loco $f$ ſcribatur 289, fiet $\omega = \frac{1+289\alpha}{576+(289n-290)\omega}$, in quo denominatore loco $\omega$ ſufficit ſcripſiſſe valorem vero proximum, qui eſt $\frac{1+289\alpha}{576}$, vnde obtinebitur valor correctus $\frac{(1+289\alpha)576}{576^2+(289n-290)(1+289\alpha)}$.

§. 11. Quoniam igitur ex menſuris variorum graduum meridiani ratio diametri aequatoris ad axem Terrae concluſa eſt vt 201 ad 200, erit pro prima approximatione $\omega = \frac{1}{200}$, atque hinc valor coefficientis $\alpha$ definiri poterit, cum eſſe debeat $\frac{1}{200} = \frac{1+289\alpha}{576}$, vnde igitur fiet $\alpha = \frac{376}{200 \cdot 289} = \frac{47}{25 \cdot 289} = \frac{1}{154}$, proxime. Superfluum autem foret determinationem magis exactam deſiderare, cum ratio aſſumta 201 : 200 ſatis notabiliter a veritate recedere poſſit; quamobrem hinc plus concludere non licet, quam eſſe propemodum $\alpha = \frac{1}{150}$, vnde ſimul patet, exponentem $n$ prorſus non in computum ingredi.

§. 12. Hinc igitur diſcimus, vt ſuperficies oceani in ſtatu quo Terra actu reperitur in aequilibrio ſubſiſtere poſſit, neceſſario requiri, vt in viſceribus Terrae ſingulae particulae non ſolum ad centrum Terrae in directione Z C ſollicitentur, ſed praeterea accedat vis lateralis ſecundum directionem ad Z C normalem agens, cuius quantitas propemodum erit $\frac{\Phi}{z} = \frac{\sin.\Phi \cos.\Phi}{150\,z}$, dum ſcilicet grauitas ſub ipſo Polo vnitate exprimitur. Ita igitur vis lateralis maxima euadet vbi angulus $ACZ = \Phi$ fit ſemirectus, quippe cui reſpondebit vis lateralis $= \frac{1}{300\,z}$, quae ergo in ſuperficie maris vbi fit proxime $z = 1$ euadit $\frac{1}{300}$, ideoque vi centrifugae fere aequalis.

§. 13.

§. 13. Nisi igitur istae vires laterales ita fuerint comparatae, maria in superficie Terrae in aequilibrio subsistere nequeunt, sed in perpetua agitatione versarentur, id quod imprimis intelligendum est, si totus Terrae globus ex materia fluida constaret; tum enim, etiamsi suprema superficies talem figuram accepisset, vt vires totales, quibus singula puncta ibi sollicitantur, essent ad ipsam superficiem normales, tamen quia in maioribus profunditatibus aqua non foret in quiete, mox ille situs perturbaretur, neque igitur tota Terra ad certam figuram se componere posset.

§. 14. Manifestum autem est, talem legem circa vires laterales in ipsa natura locum habere nullo modo posse, quandoquidem pro minimis a centro Terrae distantiis hae vires laterales in infinitum excrescerent, cuiusmodi effectus ab attractione mutua neutiquam oriri potest; vnde pro certo affirmare possumus: Si tota Terra esset fluida, eius superficiem nunquam ad vllum statum aequilibrii peruenire posse.

§. 15. Cum autem maxime verisimile sit, maria nusquam tantam profunditatem occupare, vt discrimen nostrae formulae pro S inuentae a vera lege attractionis, quaecunque ea fuerit, vnquam sentiri queat, ideoque perinde, vtrum vires laterales nostram legem sequantur an vero quamcunque aliam, vtique fieri poterit, vt vniuersus oceanus in aequilibrio subsistat, siquidem hic ab exiguis agitationibus, quae a plurimis caussis oriri possunt, mentem abstrahamus, cuiusmodi sunt venti, imprimis autem varietas caloris. Cum enim sub aequatore calor perpetuo multo maior sit quam versus polos, quoniam ibi densitas aquae aliquanto minor euadit, aequilibrium etiam ob hanc caussam locum habere nequit, sed per ea, quae in Theoria motus fluidorum demonstraui, aqua suprema perpetuo fluxu ab aequatore versus polos deferri debet, quae autem iactura ab aqua prope fundum a polis ad aequatorem affluente iterum resarcietur. Talis igitur motus oceano aeque est naturalis atque ille, quo perpetuo ab oriente occidentem versus profertur.

SUR