1787

De motu globi heterogenei super plano horizontali, una cum dilucidationibus necessariis super motu vacillatorio

Leonhard Euler

DE

MOTV GLOBI HETEROGENEI
SVPER PLANO HORIZONTALI,
VNA CVM DILVCIDATIONIBVS NECESSARIIS SVPER MOTV VACILLATORIO.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 *Aprilis* 1775.

§. 1.

Hic mihi propositum est in motus globi heterogenei, cuius centrum grauitatis a centro figurae distat, inquirere; quod cum generalissime ob summas calculi difficultates expediri nequeat, motum huiusmodi globorum tantum ad planum horizontale restringam. Praeterea vero etiam motum tantum rectilineum sum contemplaturus; vnde omnes motus gyratorios hinc excludi oportebit, praeter eos, qui fiant circa axem horizontalem ad motus progressiui directionem normalem; quandoquidem analysis nondum eo vsque est promota, vt alios motus circa axes obliquos euoluere liceret.

§. 2.

Tab. VII. Fig. 1. §. 2. Sit ergo in plano horizontali I O recta, fuper qua globus progrediatur, quam initio in puncto I tetigerit, elapfo autem tempore t tangat in puncto S, ponaturque fpatium percurfum $IS = s$; tum vero globi centrum fit in C, eiusque radius $CS = CA = a$, et circulus S A B referat fectionem globi verticalem ad motus directionem I O factam, in qua reperiatur centrum globi grauitatis G, diftans ab ipfo centro C interuallo $CG = c$; ita vt fi globus habeat motum gyratorium, is femper fiat circa axem horizontalem per centrum grauitatis G tranfeuntem et ad fectionem S A B normalem; huiusque axis refpectu ponatur momentum globi inertiae $= Pkk$, denotante P pondus feu maffam globi. Iam demiffo ex G in rectam I O perpendiculo G P, vocentur coordinatae locum centri grauitatis praefentem determinantes $IP = x$ et $PG = y$, ita vt formula $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem horizontalem centri grauitatis G, et $\frac{\partial y}{\partial t}$ eius celeritatem verticalem, qua fcilicet hoc tempore furfum mouetur. Praeterea vero vocetur angulus $AGP = ACS = \Phi$, quem angulum in fenfum S A B augeri affumamus, ita vt $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ exprimat celeritatem angularem globi in eundem fenfum; vbi meminiffe oportet, mihi tempus perpetuo in minutis fecundis exhiberi, celeritates vero per fpatia quae vno minuto percurrerentur; quem in finem littera g in calculum introducetur, denotans altitudinem lapfus vno minuto fecundo peracti.

§. 3. His pofitis binae coordinatae x et y per ambas variabiles $IS = s$ et angulum $ACS = \Phi$ facile exprimi poterunt; ducta enim horizontali G Q, ob $GQ = c\,\text{fin.}\,\Phi$ et $CQ = c\,\text{cof.}\,\Phi$, erit $x = s - c\,\text{fin.}\,\Phi$ et $y = a - c\,\text{cof.}\,\Phi$, vnde fiet

$$\partial x = \partial s - c\,\partial\Phi\,\text{cof.}\,\Phi \text{ et } \partial y = c\,\partial\Phi\,\text{fin.}\,\Phi,$$

et

et porro

$$\partial \partial x = \partial \partial s - c \partial \partial \Phi \operatorname{cos.} \Phi + c \partial \Phi^2 \operatorname{sin.} \Phi \text{ et}$$

$$\partial \partial y = + c \partial \partial \Phi \operatorname{sin.} \Phi + c \partial \Phi^2 \operatorname{cos.} \Phi,$$

quibus formulis vti oportet ad motum determinandum. Quod ſi autem in hoc negotio etiam frictionis rationem habere velimus, ante omnia videndum eſt, quomodo punctum globi S ſuper recta I O promoueatur; ac primo quidem euidens eſt, ſi nullus adeſſet motus gyratorius, celeritatem huius puncti verſus S O fore $= \frac{\partial s}{\partial t}$; at vero ob motum gyratorium, quo angulus A C S $= \Phi$ ſuo differentiali $\partial \Phi$ augetur, idem punctum S retropelletur celeritate $= \frac{a \partial \Phi}{\partial t}$; vnde intelligitur, ſi fuerit $\partial s = a \partial \Phi$, tum prouolutionem globi fore perfectam, ſin autem fuerit $\partial s > a \partial \Phi$, globus radet planum horizontale verſus S O, hocque caſu frictio vim ſuam exeret in directionem contrariam S I; contra vero ſi fuerit $a \partial \Phi > \partial s$, attritus fiet ſecundum S I, et vis frictionis ſeſe exeret ſecundum directionem S O.

§. 4. Nunc conſideremus ipſas vires, quibus iſte globus ſollicitatur; ac primo quidem occurrit ipſum globi pondus, vnde naſcitur vis centrum grauitatis G deorſum ſecundum G P vrgens $= P$; deinde quia globus plano incumbit in S, hic certam preſſionem exercebit, ideoque per reactionem a plano pari vi in directione S C repelletur, quae vis cum etiamnunc ſit incognita, charactere Π deſignetur. Denique ſi admittatur frictio, ea ſemper huic ipſi preſſioni Π erit proportionalis, quam ergo repraeſentemus per $\lambda \Pi$, quae, prout fuerit vel $\partial s > a \partial \Phi$ vel $\partial s < a \partial \Phi$, effectum exeret vel ſecundum directionem S I vel ſecundum directionem S O, vti iam notauimus. Supponamus autem his caſibus quibus attritus verus datur eſſe $\lambda = \frac{1}{3}$, prouti vulgo aſſumi ſolet, cuius autem loco

 facile

facile quamlibet aliam fractionem substituere licebit. Pro casu autem quo $\partial s = a \partial \Phi$, vbi nullus datur attritus, imprimis notandum est, vel fore $\lambda = 0$, vel certum quendam valorem $< \frac{1}{7}$ esse habiturum, quantum scilicet opus fuerit ad attritum impediendum.

§. 5. Quo igitur hinc ipsum globi motum determinemus, ex principiis mechanicis meminisse oportet, primo motum progressiuum centri grauitatis per vires sollicitantes ita affici, quasi tota massa in hoc puncto esset collecta, simulque omnes vires eidem puncto essent applicatae; deinde vero pro motu gyratorio centrum grauitatis G tanquam immotum spectari posse, vnde virium sollicitantium momenta respectu axis gyrationis per ipsum punctum G transeuntis computari debent, vt ex iis acceleratio motus gyratorii definiatur.

§. 6. Concipiamus igitur omnes vires sollicitantes ipsi centro grauitatis G applicatas, quod ergo sustinebit primo vim P in directione GP, tum vero vim in directione contraria $= \Pi$. Praeterea vero secundum directionem horizontalem sollicitabitur vi frictionis $= \lambda \Pi$, vel versus PI vel PO, vti ante explicauimus; vbi quidem ad omnem ambiguitatem euitandam assumamus hanc vim $\lambda \Pi$ retro secundum PI vrgere, siquidem pro aliis casibus signum facile mutatur. Quod si iam ipsum motum centri grauitatis secundum easdem directiones IP et PG resoluamus, principia mechanica sequentes suppeditant aequationes:

$$\text{I. } \frac{P \partial \partial x}{2g \partial t^2} = -\lambda \Pi; \text{ II. } \frac{P \partial \partial y}{2g \partial t^2} = \Pi - P;$$

in quibus elementum temporis ∂t sumtum est constans.

§. 7.

§. 7. Pro motu autem gyratorio vis grauitatis P nullum praebet momentum respectu axis G, quia per ipsum transit. Verum ex vi Π in directione SC agente respectu puncti G nascetur momentum $= \Pi . GQ = \Pi c$ sin. ϕ, quo momento motus gyratorius retardatur. Tertio vero etiam vis frictionis $\lambda \Pi$ secundum directionem PI agens producet momentum $\lambda \Pi . PG = \lambda \Pi . (a - c \text{ cos.} \phi)$, hocque momento motus gyratorius acceleratur; pro quo determinando principia motus hanc suppeditant aequationem:

$$\text{III. } \frac{P k k \partial \partial \phi}{2 g \partial t^2} = \lambda \Pi (a - c \text{ cos.} \phi) - \Pi c \text{ sin.} \phi.$$

Sicque omnino tres nacti sumus aequationes, ex quibus totum globi motum determinari oportet; tot vero aequationibus vtique est opus, quandoquidem tres habemus incognitas ad quodvis tempus definiendas, scilicet spatium s cum angulo ϕ, atque insuper ipsam pressionem Π.

§. 8. Primo igitur ex nostris aequationibus pressionem Π elidamus, cuius valor, cum ex secunda aequatione sit $= P + \frac{P \partial \partial y}{2 g \partial t^2}$, in binis reliquis substitutus praebebit sequentes duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = -\lambda - \frac{\lambda \partial \partial y}{2 g \partial t^2} \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{k k \partial \partial \phi}{2 g \partial t^2} = (a \lambda - \lambda c \text{ cos.} \phi - c \text{ sin.} \phi)\left(1 + \frac{\partial \partial y}{2 g \partial t^2}\right),$$

in quibus si loco x et y valores supra dati substituantur, eae ad sequentes formas reducentur:

$$\text{I. } \frac{\partial \partial s - c \partial \partial \phi \text{ cos.} \phi + c \partial \phi^2 \text{ sin.} \phi + \lambda c \partial \partial \phi \text{ sin.} \phi + \lambda c \partial \phi^2 \text{ cos.} \phi}{2 g \partial t^2} = -\lambda \text{ et}$$

$$\text{II. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \partial \phi (k k - \lambda a c \text{ sin.} \phi + \lambda c c \text{ sin.} \phi \text{ cos.} \phi + c c \text{ sin.} \phi^2)}{2 g \partial t^2} \\ + \partial \phi^2 \frac{(\lambda c c \text{ cos.} \phi^2 + c c \text{ sin.} \phi \text{ cos.} \phi - \lambda a c \text{ cos.} \phi)}{2 g \partial t^2} \end{array} \right\}$$

$$= \lambda a - \lambda c \text{ cos.} \phi - c \text{ sin.} \phi,$$

vbi igitur tantum duae variabiles s et ϕ praeter tempus t insunt,

ſunt. Verum hinc praeterea nihil plane concludere licet, niſi ex ipſis motus circumſtantiis iam ante conſtet, quonam valore pro littera λ vti oporteat.

§. 9. Interim tamen ſi ex his duabus aequationibus littera λ penitus eliminaretur, vtique reſultaret vna aequatio, quae ad omnes plane caſus aequaliter eſſet adcommodata; atvero iſta eliminatio multo commodius in ipſis tribus aequationibus principalibus ſequenti modo inſtitui poteſt. Multiplicetur prima aequatio per $y = a - c$ coſ. Φ, ſecunda per c ſin. Φ, et ambo producta ad tertiam addantur: tum enim ambae litterae λ et Π ſimul ex calculo excludentur. Hoc autem pacto prodibit ſequens aequatio:

$$\frac{y \partial \partial x + c \partial \partial y \,\text{ſin.}\, \Phi + k k \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - c \,\text{ſin.}\, \Phi.$$

Quod ſi ergo hic loco x et y valores ſupra datos ſcribamus, iſta prodit aequatio:

$$\partial \partial s (a - c \,\text{coſ.}\, \Phi) + \partial \partial \Phi (c c - a c \,\text{coſ.}\, \Phi + k k)$$
$$+ a c \partial \Phi^2 \,\text{ſin.}\, \Phi = - 2 g c \partial t^2 \,\text{ſin.}\, \Phi.$$

Quoniam hic autem tres adhuc inſunt variabiles, nihil prorſus pro noſtro ſcopo concludi poteſt; quamobrem pleniorem ſolutionem pro caſibus particularibus tentemus.

I. De motu noſtri globi remota omni frictione.

§. 10. Cum igitur hic vbique ſit $\lambda = 0$, prima aequatio initio inuenta ſtatim dat $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = 0$, vnde integrando fit $\frac{\partial x}{\partial t} = C$, quae formula declarat, centrum grauitatis globi G vniformiter ſecundum directionem horizontalem promoueri, cuius ergo celeritas ſi initio fuerit $= f$, habebitur $\frac{\partial x}{\partial t} = f$, ideoque $x = f t$, ſiquidem aſſumimus initio fuiſſe $x = 0$, id quod

euenit

euenit si etiam angulus Φ initio euanuerit, ita vt recta CGA fuerit verticalis; hinc ergo habebimus $s = ft + c \sin.\Phi$. Deinde cum ex secunda aequatione fiat $\Pi = P + \frac{P \partial \partial y}{2g \partial t^2}$, ex tertia vero aequatione fit $\frac{\Pi kk \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = -\Pi c \sin.\Phi$, resultabit ista aequatio:

$$\frac{kk \partial \partial \Phi}{2g \partial t^2} = -c \sin.\Phi \left(1 + \frac{\partial \partial y}{2g \partial t^2}\right) \text{ siue}$$

$$kk \partial \partial \Phi + c \partial \partial y \sin.\Phi = -2gc \partial t^2 \sin.\Phi,$$

quae, loco $\partial \partial y$ restituto valore, abit in hanc:

$$kk\partial\partial\Phi + cc\partial\partial\Phi \sin.\Phi^2 + cc\partial\Phi^2 \sin.\Phi \cos.\Phi = -2gc\partial t^2 \sin.\Phi,$$

quae aequatio duas tantum continet variabiles, scilicet angulum Φ cum tempore t.

§. 11. In hac aequatione autem commode vsu venit, vt per $2\partial\Phi$ multiplicata integrabilis reddatur; reperietur autem eius integrale

$$kk\partial\Phi^2 + cc\partial\Phi^2 \sin.\Phi^2 = 4g\partial t^2 (c \cos.\Phi + \Gamma),$$

vnde colligimus $\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4g(c \cos.\Phi + \Gamma)}{kk + cc \sin.\Phi^2}$; quae ergo formula exprimit quadratum celeritatis angularis. Quod si ergo celeritas angularis globo initio in sensum SAB impressa ponatur $= \zeta$, quoniam sumimus initio fuisse $\Phi = 0$, pro constante Γ definienda habebimus $\zeta\zeta = \frac{4g(c + \Gamma)}{kk}$, vnde fit $4g\Gamma = \zeta\zeta kk - 4gc$, quo valore substituto nostra aequatio erit

$$\frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4gc \cos.\Phi + \zeta\zeta kk - 4gc}{kk + cc \sin.\Phi^2}.$$

§. 12. Consideremus nunc vim viuam quam noster globus in S habebit, cuius pars ex motu gyratorio oriunda est

$$\frac{Pkk\partial\Phi^2}{\partial t^2} = \frac{Pkk(4gc \cos.\Phi + \zeta\zeta kk + 4gc)}{kk + cc \sin.\Phi^2};$$

pars vero ex motu progressiuo centri grauitatis oriunda est

$P\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}+\frac{\partial y^2}{\partial t^2}\right)$. Vidimus autem esse $\frac{\partial x}{\partial t}=f$, et ob $\partial y=c\,\partial\,\phi\,\text{fin.}\,\phi$ erit

$$\frac{\partial y^2}{\partial t^2}=\frac{\partial\phi^2}{\partial t^2}\,c\,c\,\text{fin.}\,\phi^2=\frac{(4g\,c\,\text{cof.}\,\phi+\zeta\zeta\,k\,k-4g\,c)\,c\,c\,\text{fin.}\,\phi^2}{k\,k+c\,c\,\text{fin.}\,\phi^2}.$$

Hinc igitur tota vis viua erit

$$P\left(ff+\frac{\partial\phi^2}{\partial t^2}\,k\,k+c\,c\,\text{fin.}\,\phi^2\right)$$
$$=P\,(ff+4g\,c\,\text{cof.}\,\phi+\zeta\,\zeta\,k\,k-4g\,c);$$

quae ergo ita exprimi potest

$$P\,(ff+\zeta\,\zeta\,k\,k-4g\,c\,(1-\text{cof.}\,\phi)),$$

vbi $P\,(ff+\zeta\,\zeta\,k\,k)$ exprimit vim viuam globo initio impressam, quae ergo deinceps diminuitur, prouti centrum grauitatis G ascendit. Est enim $c\,(1-\text{cof.}\,\phi)$ spatium, per quod centrum grauitatis hactenus ascendit, quandoquidem initio centrum grauitatis infimum locum tenuisse assumimus.

§. 13. Ad totum autem huius globi motum cognoscendum requiritur, vt aequatio differentialis eruta denuo integretur. Cum igitur fuisset

$$\frac{\partial\phi^2}{\partial t^2}\,(kk+cc\,\text{fin.}\,\phi^2)=\zeta\zeta kk-4gc\,(1-\text{cof.}\,\phi),$$

radice quadrata hinc extracta colligitur

$$\partial t=\frac{\partial\,\phi\,\sqrt{(k\,k+c\,c\,\text{fin.}\,\phi^2)}}{\sqrt{(\zeta\,\zeta\,k\,k-4\,g\,c\,(1-\text{cof.}\,\phi))}},$$

haec autem formula ita est comparata, vt in genere neutiquam integrationem admittat, neque aliter nisi per approximationes inueniri queat, cuius tamen resolutio facillima esset, si foret $c=0$, quippe quo casu centrum grauitatis in ipsum globi centrum incideret; tum enim foret $\partial\,t=\frac{\partial\,\phi}{\zeta}$, siue $\partial\,\phi=\zeta\,\partial t$ et $\phi=\zeta\,t$, vnde manifestum est, globi motum fore aequabilem tam ratione motus progressiui quam gyratorii.

Casus

Casus I.

§. 14. Pro nostro autem casu vnica datur conditio, qua postremam formulam more solito tractare licet, scilicet, quando motus impressus ita est comparatus, vt angulus Φ perpetuo quam minimus maneat, ad quod necesse est, vt etiam celeritas angularis initialis sit infinite quasi parua. Quoniam igitur tum erit sin. $\Phi = \Phi$ et cos. $\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, postrema nostra aequatio induet hanc formam: $\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(kk + cc\Phi\Phi)}}{\sqrt{\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi)}}$, vbi in numeratore particula $cc\Phi\Phi$ prae kk negligi tuto potest, ita vt fit $\partial t = \frac{k\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi)}}$, quae, posito $2gc = nnkk$, praebet $\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\Phi\Phi)}}$, cuius integrale est $t = \frac{1}{n}$ A sin. $\frac{n\Phi}{\zeta}$, vnde conuertendo fit $\frac{n\Phi}{\zeta} =$ sin. nt, siue $\frac{\Phi\sqrt{2gc}}{\zeta k} =$ sin. $t\frac{\sqrt{2gc}}{k}$, ideoque $\Phi = \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$ sin. $t\frac{\sqrt{2gc}}{k}$.

§. 15. Hoc scilicet integrale ita est sumtum, vt initio quo erat $t = 0$, etiam angulus Φ euanescat; hoc igitur casu patet, quoniam sinus angulorum non vltra ± 1 increscere possunt, angulum nostrum Φ ad summum euadere posse $\pm \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$, vnde cum ζ per hypothesin sit quasi infinite parua, globus vltro citroque circa situm initialem excursiones quam minimas absoluet, quem motum olim vacillatorium vocaui eumque determinaui. Ex praesenti autem formula cum initio fuisset $\Phi = 0$, ad eundem valorem reuertetur quoties fuerit sin. $\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 0$. Quod si ergo statuamus $\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 180° = \pi$, fiet $t = \frac{k\pi}{\sqrt{2gc}}$, hocque tempore singulae oscillationes seu vacillationes absoluentur; neque vero hic motus progressiuus, quo centrum grauitatis G moueri assumsimus, aliquid turbat in isto motu vacillatorio.

Casus

Casus II.

§. 16. Praeterea vero datur adhuc alius casus, quo calculum euoluere licet, qui locum habet, si interuallum C fuerit quam minimum, siue centrum grauitatis G valde parum a centro globi C distet; tum enim loco formulae $\sqrt{(kk + cc \sin. \Phi^2)}$ scribere licebit $k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2$, ita vt habeamus

$$\partial t = \frac{\partial \Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos. \Phi))}} \left(k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2\right).$$

Iam vt etiam denominator tractabilis reddatur, sumatur ζ ita, vt sit $\zeta\zeta kk = 8gc$, ideoque $\zeta = \frac{\sqrt{8gc}}{k}$, quae est celeritas angularis globo initio impressa, tum igitur fiet

$$\sqrt{(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \cos. \Phi))} = \sqrt{(4gc(1 + \cos. \Phi))} = \cos. \tfrac{1}{2}\Phi \sqrt{8gc}.$$

Hoc igitur modo habebimus hanc aequationem:

$$\partial t \sqrt{8gc} = \frac{\partial \Phi}{\cos. \frac{1}{2}\Phi} \left(k + \frac{cc}{2k} \sin. \Phi^2\right),$$

quae iam ab omni irrationalitate est liberata.

§. 17. Ad hanc aequationem commodius tractandam statuatur $\frac{1}{2}\Phi = 90° - \omega$, vt sit $\Phi = 180° - 2\omega$ et

$$\sin. \Phi = \sin. 2\omega = 2 \sin. \omega \cos. \omega,$$

hincque nanciscemur hanc formulam integrandam:

$$\partial t \sqrt{8gc} = -\frac{2\partial\omega}{\sin. \omega} \left(k + \frac{2cc}{k} \sin. \omega^2 \cos. \omega^2\right), \text{ siue}$$

$$\partial t \sqrt{2gc} = -\frac{k\partial\omega}{\sin. \omega} - \frac{2cc}{k} \partial\omega \sin. \omega^2 \cos. \omega^2,$$

cuius integrale colligitur:

$$t\sqrt{2gc} = C - k\, l \tan g. \tfrac{1}{2}\omega + \frac{2cc}{3k} \cos. \omega^3;$$

vbi ad constantem determinandam meminisse necesse est, initio quo $t = 0$, fuisse etiam $\Phi = 0$, ideoque $\omega = 90°$, vnde $C = 0$, ita vt nostra aequatio finalis sit

$t\sqrt{2gc}$

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2cc}{3kk}\operatorname{cos}.\omega^3 - kl\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}\omega,$$

vnde pro quouis angulo $\omega = 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$ tempus t facile assignare poterimus, quo elapso globus sese per hunc angulum Φ conuertit.

§. 18. Hinc autem patet, angulum ω nunquam tantum fieri posse, vt tangens eius semissis euadat negatiua, quia alioquin tota expressio prodiret imaginaria; quare cum initio fuerit $\Phi = 0$ et $\omega = 90^\circ$, deinde vero angulus Φ crescere supponatur, angulus ω continuo decrescet. Ponamus igitur fieri $\omega = 0$, siue $\Phi = 180^\circ$, tempus ad hoc requisitum euadit infinitum, ex quo discimus, angulum Φ nunquam vsque ad 180° augeri posse, siue globus nunquam eo vsque se conuertet, vt centrum grauitatis G supra centrum globi C verticaliter immineat: continuo autem propius ad hunc terminum elevabitur. Quaeramus v. g. tempus, quo centrum grauitatis G per angulum rectum ascendit, vt sit $\Phi = 90^\circ$, ideoque $\omega = 45^\circ$ et $\frac{1}{2}\omega = 22^\circ.30'$ cuius tangens $= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} - 1$, hinc igitur fiet

$$t\sqrt{2gc} = \frac{cc}{3kk\sqrt{2}} - kl(1+\sqrt{2}),$$

ex qua formula tempus t in minutis secundis expressum innotescet.

§. 19. Hic igitur casus prorsus singularis sub his conditionibus locum habere potest. 1°) Si interuallum $CG = c$ fuerit tam exiguum, vt cc prae kk quasi euanescat. 2°) Si celeritas angularis globo initio impressa, vbi recta CGA erat verticalis, fuerit $\frac{\sqrt{8gc}}{k} = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$; tum enim si elapso tempore $= t$, angulus motu gyratorio confectus $ACS = \Phi$, ob $\omega = 90^\circ - \frac{1}{2}\Phi$, habebitur ista aequatio:

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2cc}{3kk}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^3 - kl\,\text{tang.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{4}\Phi) \text{ fiue}$$

$$t\sqrt{2gc} = kl\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{4}\Phi) + \frac{2cc}{3kk}\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^3);$$

quo ergo motu angulus Φ quidem continuo augetur, fed demum poft tempus infinitum vsque ad 180° excrefcere poteft. Interea autem dum globus hoc motu gyratorio cietur, fimul motu quocunque progreffiuo ferri poteft, quo fcilicet centrum C vniformiter fecundum directionem horizontalem progrediatur, quandoquidem inuenimus $\frac{\partial x}{\partial t} = f$. Neque vero idcirco ipfum centrum grauitatis G in linea recta mouebitur, fed ob motum gyratorium continuo magis afcendit; nunquam autem ad altitudinem $a + c$ pertinget.

§. 20. In hoc cafu affumfimus, celeritatem angularem initio fuiffe $\zeta = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$, ideoque fatis paruam ob c quam minimum prae k. At fi ifta celeritas multo maior accipiatur, vt quantitas $4gc$ prae $\zeta\zeta kk$ quafi euanefcat, tum etiam refolutio analytica fuccedet.

Cafus III.

§. 21. Sit igitur $\zeta\zeta kk = nn \cdot 4gc$ ita vt n fit numerus praegrandis; ac denominator noftrae formulae principalis euadet $\sqrt{\zeta\zeta kk - 4gc\,(1 - \text{cof.}\,\Phi)}$

$$= 2\sqrt{gc\,(nn - (1 - \text{cof.}\,\Phi))} = 2\sqrt{gc\,(nn - 2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)},$$

vbi notetur effe $\zeta = \frac{2n}{k}\sqrt{gc}$. Hinc igitur noftra aequatio erit

$$2\partial t\sqrt{gc} = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(nn - 2\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)}}\left(k + \frac{cc}{2k}\,\text{fin.}\,\Phi^2\right):$$

adhuc enim fupponimus effe cc prae kk infinite paruum, vbi, quia n eft numerus praegrandis, erit fatis exacte

$\frac{1}{\sqrt{(nn - 2\,\text{fin.}\frac{1}{2}\Phi^2)}} = \frac{1}{n} + \frac{\text{fin.}\frac{1}{2}\Phi^2}{n^3}$, quo valore adhibito erit

$$2n\,\partial t\sqrt{gc} = \partial\Phi\left(k + \frac{cc}{2k}\,\text{fin.}\,\Phi^2\right)\left(1 + \frac{\text{fin.}\frac{1}{2}\Phi^2}{nn}\right)$$
$$= \partial\Phi\left(k + \tfrac{cc}{2k}\,\text{fin.}\,\Phi^2 + \tfrac{k}{nn}\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2\right),$$

neglecto fcilicet termino $\frac{cc}{2nnk}$ fin. $\frac{1}{2}\Phi^2$ fin. Φ^2 ob duplicem paruitatem.

§. 22. Poftquam igitur formulam noftram ita euoluimus, integratio nulla amplius laborat difficultate; quoniam nouimus effe

$$\int\partial\Phi\,\text{fin.}\Phi^2 = \int\tfrac{\partial\Phi}{2}(1 - \text{cof.}\,2\Phi) = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{4}\,\text{fin.}\,2\,\Phi,$$

fimilique modo

$$\int\partial\Phi\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2 = \int\tfrac{\partial\Phi}{2}(1 - \text{cof.}\,\Phi) = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\,\Phi,$$

obtinebimus integrando

$$2nt\sqrt{gc} = k\Phi + \tfrac{cc}{2k}\left(\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{4}\,\text{fin.}\,2\Phi\right) + \tfrac{k}{nn}\left(\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{fin.}\Phi\right)$$
$$= \Phi\left(k + \tfrac{cc}{4k} + \tfrac{k}{2nn}\right) - \tfrac{cc}{8k}\,\text{fin.}\,2\Phi - \tfrac{k}{2nn}\,\text{fin.}\Phi,$$

ex qua aequatione pro quouis angulo Φ tempus refpondens t facile definitur. At fi ad quoduis tempus t angulus Φ defideretur, ea reductione eft vtendum, qua in theoria planetarum anomalia vera ex media definiri folet. Hic igitur patet globum quotcunque reuolutiones integras abfoluere poffe, quoniam nihil impedit quominus angulus Φ in infinitum augeatur, fimul vero femper cum hoc motu iunctus effe poterit motus horizontalis quicunque vniformis. Ita fi tempus defideremus, quo vna reuolutio integra abfoluitur, ftatuatur $\Phi = 360° = 2\pi$, atque reperietur $t = \frac{\pi}{n\sqrt{gc}}\left(k + \frac{cc}{4k} + \frac{k}{2nn}\right)$, at-

 que

que adeo femiffe huius temporis dimidias reuolutiones abfoluet, quia pofito $\Phi = \pi$, etiam ambo pofteriores termini euanefcent.

§. 23. Quanquam centrum globi C eandem femper a plano horizontali feruat diftantiam, et in linea recta progreditur, eius tamen motus non erit vniformis, quoniam celeritas horizontalis centri grauitatis perpetuo manet eadem; interea autem centrum grauitatis G circa C fimili fere modo reuoluetur, quo planetae circa folem in orbitis fuis circumferuntur; in quo motu profundiffimus fitus puncti G perihelio, altiffimus vero aphelio refpondet. Primum enim membrum formulae noftrae pro tempore t inuentae angulum Φ continens motum medium repraefentabit, ambo vero membra fequentia inaequalitates continent, et quafi excentricitatem inuoluunt. Hinc etiam cafus praecedens, quo tempus vnius reuolutionis erat infinitum, motui cometae in Parabola fimilis erit cenfendus.

II. De prouolutione perfecta noftri globi accedente frictione.

§. 24. Supra iam vidimus ad prouolutionem perfectam requiri, vt perpetuo fit $\partial s = a \partial \Phi$; quam ob caufam in noftris aequationibus ftatim ftatuamus $\partial s = a \partial \Phi$, atque eliminata preffione Π videndum eft, quantum valorem littera λ fit adeptura; quamdiu enim ifte valor non fuperabit $\frac{1}{5}$, tamdiu prouolutio perfecta locum habere poterit. Commodiffime autem ifte valor λ colligetur, fi aequatio tertia per primam diuidatur, tum enim prodibit

$$\frac{k k \partial \partial \Phi}{\partial \partial x} = -a + c \operatorname{cof.} \Phi + \frac{c}{\lambda} \operatorname{fin.} \Phi,$$

vbi fi loco $\partial \partial x$ eius valor fupra affignatus fubftituatur, propter $\partial \partial s = a \partial \partial \Phi$, habebimus:

$k k$

$$\frac{kk\,\partial\partial\Phi}{a\partial\partial\Phi - c\partial\partial\Phi\,\mathrm{cos}.\Phi + c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi} = -a + c\,\mathrm{cof}.\Phi + \frac{c}{\lambda}\,\mathrm{fin}.\Phi,$$

ex qua aequatione facillime iudicium circa litteram λ petetur.

§. 25. Pro motu autem ipſo determinando vtamur ea aequatione, quam ſupra, vbi ambas quantitates Π et λ ſimul exterminauimus, ſumus adepti, quae ponendo $\partial\partial s = a\partial\partial\Phi$ erat

$$a\,\partial\partial\Phi\,(a - c\,\mathrm{cof}.\Phi) + \partial\partial\Phi\,(cc - ac\,\mathrm{cof}.\Phi + kk) + ac\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi = -2cg\,\partial t^2\,\mathrm{fin}.\Phi,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(aa + cc + kk)\,\partial\partial\Phi - 2ac\,\partial\partial\Phi\,\mathrm{cof}.\Phi + ac\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi = -2cg\,\partial t^2\,\mathrm{fin}.\Phi,$$

quae per $2\partial\Phi$ multiplicata ſponte fit integrabilis, integrale enim erit

$$(aa+cc+kk)\,\partial\Phi^2 - 2ac\,\partial\Phi^2\,\mathrm{cof}.\Phi = 4g\,\partial t^2\,(C + c\,\mathrm{cof}.\Phi),$$

vbi conſtantem C ex circumſtantiis quas conſideratio frictionis ſuppeditabit, determinari conueniet.

§. 26. Nunc igitur iudicium circa litteram λ inſtituamus, vbi ante omnia loco $\partial\partial\Phi$ eius valorem per differentialia primi gradus ſubſtituamus, qui ex praecedenti aequatione prodit

$$\partial\partial\Phi = \frac{-(2gc\,\partial t^2 + ac\,\partial\Phi^2)\,\mathrm{fin}.\Phi}{aa + cc + kk - 2ac\,\mathrm{cof}.\Phi},$$

vbi ſi loco $2g\,\partial t^2$ ſcribatur valor ex aequatione integrata, reperiemus:

$$\partial\partial\Phi = \frac{-c\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi}{2(C + c\,\mathrm{cof}.\Phi)} - \frac{ac\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi}{aa + cc + kk - 2ac\,\mathrm{cof}.\Phi},$$ vnde fit

$$a\,\partial\partial\Phi - c\,\partial\partial\Phi\,\mathrm{cof}.\Phi + c\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi = \frac{c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi\,(2C + 3c\,\mathrm{cof}.\Phi - a)}{2C + 2c\,\mathrm{cof}.\Phi} - \frac{ac\,(a - c\,\mathrm{cof}.\Phi)\,\partial\Phi^2\,\mathrm{fin}.\Phi}{ac + cc - kk - 2ac\,\mathrm{cof}.\Phi};$$

hinc pro aequatione §. 24. allata membrum ad ſiniſtram partem ſequentem induet formam

$$\frac{-\dfrac{ckk\,\text{ſin.}\,\Phi}{a(C+c\,\text{coſ.}\,\Phi)}-\dfrac{ackk\,\text{ſin.}\,\Phi}{aa+cc+kk-2ac\,\text{coſ.}\,\Phi}}{\dfrac{c\,\text{ſin.}\,\Phi(2C+3c\,\text{coſ.}\,\Phi-a)}{2C+2c\,\text{coſ.}\,\Phi}-\dfrac{ac(a-c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}{aa+cc+kk-2ac\,\text{coſ.}\,\Phi}}\ \text{ſiue}$$

$$-\frac{ckk\,\text{ſin.}\,\Phi(aa+cc+kk-2ac\,\text{coſ.}\,\Phi)-2(C+c\,\text{coſ.}\,\Phi)ackk\,\text{ſin.}\,\Phi}{c\,\text{ſin.}\,\Phi(2C+3c\,\text{coſ.}\,\Phi-a)(aa+cc+kk-2ac\,\text{coſ.}\,\Phi)-(2C+2c\,\text{coſ.}\,\Phi)ac(a-c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

cui ergo fractioni aequari debet membrum ad dextram poſitum $-a+c\,\text{coſ.}\,\Phi+\frac{c}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\Phi$; fractio autem illa reducitur ad hanc commodiorem:

$$-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(3c\,\text{coſ.}\,\Phi+2C-a)+2Cc(c-a\,\text{coſ.}\,\Phi)-a^3+3aac\,\text{coſ.}\,\Phi-acc(1+4\,\text{coſ.}\,\Phi^2)+3c^3\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 27. Ponamus breuitatis gratia hanc fractionem $=S$, et aequatio pro diiudicando valore λ erit $S+a-c\,\text{coſ.}\,\Phi=\frac{c}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\Phi$, vnde fit $\lambda=\frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{S+a-c\,\text{coſ.}\,\Phi}$; ex quo patet, ſi fiat vel $\Phi=0$ vel $\Phi=180°$, fore $\lambda=0$, quibus ergo caſibus nullum eſt periculum, quin frictio ſufficiat attritui impediendo. Examinari igitur conuenit caſus, quibus fit vel $\Phi=90°$ vel $\Phi=270°$; ſit igitur $\Phi=90°$ vt ſit $\text{coſ.}\,\Phi=0$, erit

$$S=-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(2C-a)+2Ccc-a^3-acc}\ \text{hincque}\ \lambda=\frac{c}{S+a};$$

altero vero caſu quo $\Phi=270°$ et $\text{ſin.}\,\Phi=-1$, fiet

$$S=-\frac{kk(aa+cc+kk+2aC)}{kk(2C-a)+2Ccc-a^3-acc}\ \text{et}\ \lambda=-\frac{c}{S+a}.$$

Dummodo ergo conſtans C fuerit ita comparata, vt iſta formula $S+a$ maior euadat quam $3c$, prouolutio perfecta ſubſiſtere poterit. Quoniam vero vix alios caſus euoluere licet, niſi in quibus interuallum c prae a et k fuerit quam minimum, neglectis altioribus ipſius c poteſtatibus, habebimus pro poſtremis caſibus

$$S=-\frac{kk(aa+kk+2aC)}{kk(2C-a)-a^3},$$

hinc-

hincque $S+a=\frac{(aa+kk)^2}{a^3-kk(2c-a)}$; quae formula si ponatur $=mc$, vt sit $m>3$, habebimus

$$C=\frac{mca^3+mackk-(aa+kk)^2}{2mckk}$$

vel etiam commode vti licebit hac formula $\lambda=\frac{c(a^3+akk-2ckk)}{(aa+kk)^2}$, ex qua intelligitur nisi constans C praemagnam habeat quantitatem, hunc valorem nunquam terminum $\frac{1}{3}$ esse superaturum, propterea quod c supponitur quam minimum.

§. 28. Quod si ergo frictio sufficit ad prouolutionem perfectam producendam, relatio inter angulum Φ et tempus t hac exprimetur aequatione

$$\partial\Phi^2(aa+cc+kk)-2ac\partial\Phi^2\cos.\Phi=4g\partial t^2(c\cos.\Phi+C),$$

vnde fit

$$2\partial t\sqrt{g}=\frac{\partial\Phi\sqrt{(aa+cc+kk-2ac\cos.\Phi)}}{\sqrt{(C+c\cos.\Phi)}},$$

quae penitus diuersa est ab ea, quam pro casu vbi nulla adest frictio inuenimus, vnde patet a frictione, etsi quam minima, naturam motus penitus immutari. Neque tamen hanc aequationem resoluere licet praeter eos casus quos in sectione praecedente tractauimus.

§. 29. Quo igitur hos duos casus facilius inter se comparare queamus, ponamus hic vt supra fecimus, primo motus initio, vbi erat $t=0$, fuisse etiam $\Phi=0$; tum vero celeritatem angularem $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\zeta$, vnde, cum prouolutio perfecta postulet vt sit $\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{a\partial\Phi}{\partial t}$, necesse est vt initio fuerit $\frac{\partial s}{\partial t}=\zeta a$. Hinc igitur ad constantem C definiendam faciamus $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\zeta$ et $\Phi=0$, vnde nostra aequatio dabit:

$$\zeta\zeta(aa+cc+kk-2ac)=\zeta\zeta((a-c)^2+kk)=4g(c+C)$$

vn-

vnde fit,

$$4gC = \zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4gc;$$

quo valore fubftituto erit in genere

$$\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}(aa + cc + kk - 2ac\,\text{cof.}\Phi)$$
$$= \zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4gc(1 - \text{cof.}\Phi)$$

vnde elicimus

$$\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(aa + cc + kk - 2ac\,\text{cof.}\Phi)}}{\sqrt{[\zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4gc(1 - \text{cof.}\Phi)]}},$$

vbi notetur effe $a - c =$ diftantiae centri grauitatis a fuperficie globi.

De motu vacillatorio.

§. 30. Ex hac aequatione primo deducamus motum vacillationis feu librationis, quo globus fuper plano horizontali rotabit, poftquam ipfi minima inclinatio fuerit impreffa, ita vt initio celeritas angularis ζ fuerit quam minima et angulus Φ etiam quam minimus, hincque $\text{cof.}\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$. Quo autem noftram formulam magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $(a-c)^2 + kk = bb$, eritque $aa + cc + kk = bb + 2ac$, quo facto noftra aequatio induet hanc formam:

$$\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(bb + ac\Phi\Phi)}}{\sqrt{(\zeta\zeta bb - 2gc\Phi\Phi)}}.$$

Reiiciamus igitur in numeratore terminum $ac\Phi\Phi$, et in denominatore ftatuamus $2gc = nnbb$, vt obtineamus $\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\Phi\Phi)}}$, cuius integrale eft

$$t = \frac{1}{n}\,\text{A fin.}\,\frac{n\Phi}{\zeta} = \frac{b}{\sqrt{2gc}}\,\text{A fin.}\,\frac{\Phi\sqrt{2gc}}{\zeta b},$$

ideoque $\Phi = \frac{\zeta b}{\sqrt{2gc}}\,\text{fin.}\,\frac{t\sqrt{2gc}}{b}$; hinc igitur intelligimus globum fuper plano horizontali omnino fimili modo librationes peragere, quo pendula ofcillari folent; vbi tempus vnius librationis reperietur ponendo angulum $\frac{t\sqrt{2gc}}{b} = \pi$, vnde fit tempus

cuius-

cuiusque librationis $= \frac{\pi b}{\sqrt{2gc}}$. Cum igitur tempus vnius oscillationis penduli simplicis, cuius longitudo $= l$, sit $= \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$, longitudo penduli simplicis isochroni cum nostris oscillationibus erit $\frac{bb}{c}$, ideoque $l = \frac{(a-c)^2 + kk}{c}$. Supra autem, remota frictione, prodiisset longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{kk}{c}$.

§. 31. Ex hac ergo comparatione manifestum est, ob frictionem motum libratorium non mediocriter minui, idque in ratione $k : \sqrt{((a-c)^2 + kk)}$. Nisi ergo fuerit $a - c = 0$, quo casu centrum grauitatis in superficiem incideret, ob frictionem motus libratorius semper retardatur. Praeterea vero vtroque casu oscillationes eo erunt lentiores, quo propius centrum grauitatis G ad centrum globi C accesserit; si enim fiat interuallum $CG = c = 0$, vtroque casu longitudo penduli simplicis fit infinita.

§. 32. Istae autem determinationes non solum ad globos adstringuntur, sed etiam ad omnis generis corpora, quae super plano horizontali motum vacillatorium recipere valent, extendi possunt. Sit enim PRQ corpus quodcunque, quod super plano horizontali IO instar cunarum motum reciprocum recipere valeat, ob basin suam in puncto contactus R incuruatam; sitque centrum huius curuaturae in C, ac ponatur altitudo $CR = a$; tum vero sit G centrum grauitatis totius corporis, dum in statu quietis versatur, ac ponatur interuallum $CG = c$, vt sit $GR = a - c$. Praeterea vero posito huius corporis pondere $= P$, sit eius momentum inertiae respectu axis per G transeuntis $= Pkk$, quippe circa quem axem corpus inter nutandum gyrari est censendum. Quibus positis, si nulla plane adesset frictio, tempus cuiusque vacillationis foret $= \frac{\pi k}{\sqrt{2gc}}$ sec.; accedente autem frictione vel minima, hoc

Tab. VII. Fig. 2.

tempus subito fiet $= \frac{\pi \sqrt{((a-c)^2+kk)}}{\sqrt{2gc}}$, atque hinc ea quae olim de talibus motibus sum commentatus, necessariam illustrationem adipiscuntur; vbi imprimis obseruari oportet, ipsam frictionis quantitatem hic non in computum ingredi, atque eundem effectum esse proditurum, dummodo frictio non plane euanescat.

§. 33. Quod porro ad eos binos casus attinet, quos supra remota omni frictione euoluimus, vbi interuallum c quam minimum fuit assumtum, omnia motus phaenomena etiam accedente frictione simili quoque modo definientur; formulae enim huc pertinentes a superioribus in hoc potissimum discrepabunt, quod hic loco quantitatis k scribi oporteat $b = \sqrt{((a-c)^2+kk)}$; quamobrem etiam isti motus lentiores erunt quam casu supra tractato. Haec igitur fere sunt omnia quae circa huiusmodi motus globi heterogenei per calculum definire licet.

§. 34. Coronidis loco adiungam Theorema memoratu dignum circa triplicem motum oscillatorium, quo corpora, qualia in §. 32. sunt descripta, agitari possunt.

Theorema.

Si habeatur corpus quodcunque P R Q, basi circulari seu sphaerica in R praeditum, cuius centrum sit in C, et centrum grauitatis in G, eius vero massa seu pondus fuerit $= P$; in eo triplex motus oscillatorius considerari potest: I°. Si hoc corpus circa axem horizontalem per C transeuntem more penduli libere oscilletur; tum pendulum simplex isochronum reperietur, si momentum inertiae huius corporis respectu axis C sumtum diuidatur per productum P. C G. II°. Si idem corpus plano politissimo horizontali I O in R incumbens, vacillationes mi-

minimas peragat, ita vt nullam plane ſentiat frictionem; tum pendulum ſimplex iſochronum reperietur, ſi momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per ipſum centrum grauitatis G tranſeuntis diuidatur per idem productum P. C G. III°. Si idem corpus plano horizontali I O vtcunque aſpero in R incumbens vacillationes abſoluat; tum longitudo penduli ſimplicis iſochroni reperietur, ſi momentum inertiae reſpectu puncti contactus R ſumtum per productum P in C G diuidatur.

Veritas huius Theorematis pro parte prima ex motu pendulorum eſt manifeſta: ſi enim ponatur interuallum C G $= c$, et momentum inertiae reſpectu centri grauitatis $= P\,k\,k$, tum vero radius curuaturae C R $= a$, notum eſt fore longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $l = \frac{cc + kk}{c}$; at pro caſu ſecundo ex ſupra traditis elucet fore $l = \frac{kk}{c}$; et pro caſu tertio $l = \frac{(a - c)^2 + kk}{c}$.

Nova Acta Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. I. Tab. VII.

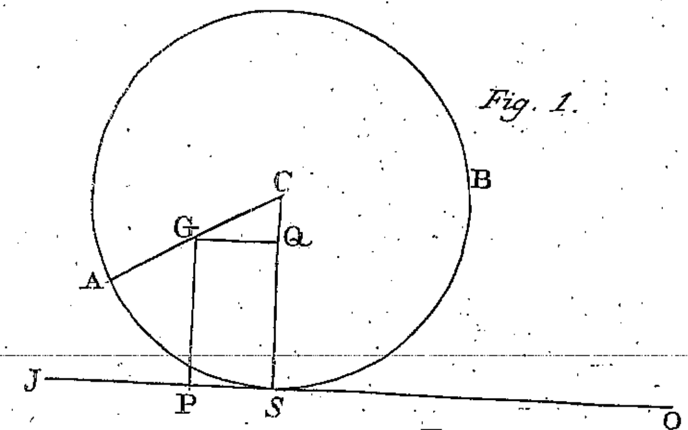

Fig. 1.

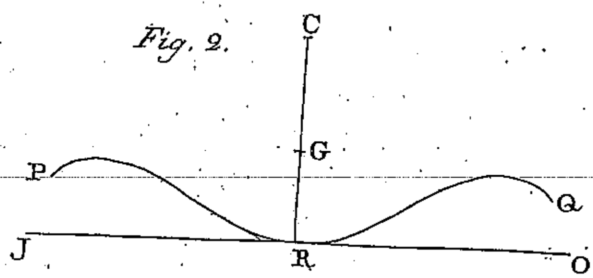

Fig. 2.

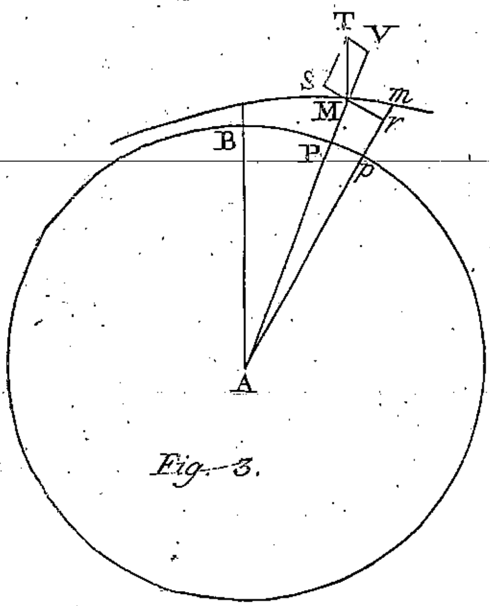

Fig. 3.

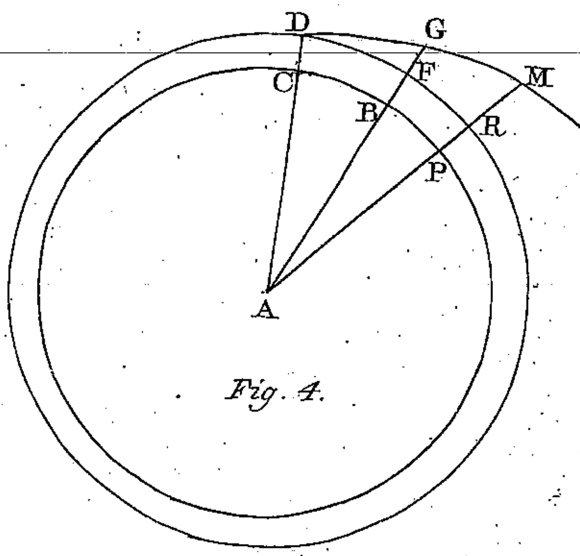

Fig. 4.

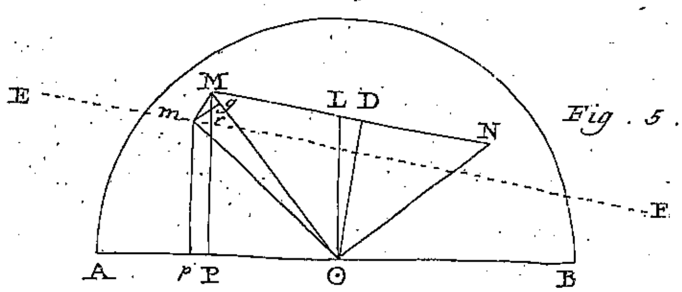

Fig. 5.