



1786

Accuratio evolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inventarum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Accuratio evolutio formularum pro filorum flexibilium aequilibrio et motu inventarum" (1786). *Euler Archive - All Works*. 608.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/608>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

ACCURATIOR EVOLVTIO
 FORMVLARVM
 PRO
 FILORVM FLEXIBILIVM
 AEQVILIBRIO ET MOTV INVENTARVM.

Auctore
 L. EYLERO.

§. 1.

Tab. IV. Fig. 6. **P**ropositum fit filum quodcunque flexile $E'ZzF$, siue elasticitate praeditum siue destitutum, quod fixum teneat in figura repraesentatum, quem, quatenus non in eodem plano continetur, referamus more solito ad ternos axes fixos OA, OB, OC inter se normales. Tum pro quouis fili puncto Z constitutis ternis coordinatis OX, XY, YZ , vocemus $OX = x, XY = y, YZ = z$; tum vero ipsa portio fili $E'Z$ vocetur $= s$, ut fit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Praeterea vero consideretur crassities fili utcunque variabilis atque elementi $Zz = ds$ statuatur massula $= S ds$; ita ut S fit functio quaecunque data ipsius s . His positis fili elementum $Zz = ds$ sollicitetur a tribus viribus secundum directiones axibus parallelas, quae sint: $ZP = P, ZQ = Q, ZR = R$, elasticitas autem absoluta in loco Z designetur littera G , quae pro indole fili poterit esse vel constans vel utcunque variabilis ab arcu s pendens.

§. 2.

§. 2. Quodsi iam istud filum fuerit in aequilibrio, tres sequentes aequationes sunt erutae:

$$I. \int dy f P ds - \int dx f Q ds = \frac{G(dy ddx - dx ddy)}{ds^2},$$

$$II. \int dz f Q ds - \int dy f R ds = \frac{G(dz ddy - dy ddz)}{ds^2},$$

$$III. \int dx f R ds - \int dz f P ds = \frac{G(dx ddz - dz dx)}{ds^2}.$$

Haec autem tres aequationes ita a se inuicem pendent, ut binae iam tertiam in se inuoluant, ita ut sufficiat binas earum tantum resoluisse, quippe quibus totus status aequilibrii iam perfecte determinatur.

§. 3. Praeterea vero si tensio fili in puncto Z ponatur = T, pro eius determinatione inuenta est haec formula:

$$T = -\frac{dx}{ds} \int P ds - \frac{dy}{ds} \int Q ds - \frac{dz}{ds} \int R ds.$$

Tensio autem ista T exprimet eam vim, qua punctum Z secundum tangentem versus E trahi deberet ad aequilibrium conseruandam, si portio antecedens fuisset rescissa.

§. 4. Sin autem filum in motu versetur atque elapso tempore t, quod semper in minutis secundis exprimi assumimus, situm habeat in figura repraesentatum, tum ternae coordinatae x, y, z tanquam functiones binarum variabilium, scilicet arcus EZ = s et temporis t spectari debent. Tum autem denotante g altitudinem ex qua gravia vno minuto secundo delabuntur, ex viribus sollicitantibus P, Q, R quaerantur sequentes valores deriuati:

$$P' = P - \frac{S}{2g} \left(\frac{d^2 dx}{dt^2} \right);$$

$$Q' = Q - \frac{S}{2g} \left(\frac{d^2 dy}{dt^2} \right);$$

$$R' = R - \frac{S}{2g} \left(\frac{d^2 dz}{dt^2} \right);$$

T 3

vbi

vbi formulae $(\frac{d dx}{d t^2})$, $(\frac{d dy}{d t^2})$, $(\frac{d dz}{d t^2})$, tantum ex variabilitate temporis t sunt determinandae, arcu s pro constante habito. Quo facto isti valores P' , Q' , R' denuo vt functiones tantum ipsius s spectentur et in superioribus formulis loco P , Q , R scribantur, vt prodeant sequentes aequationes:

$$\text{I. } \int dy \int P ds - \int dx \int Q ds - \frac{1}{2g} \int dy \int S ds (\frac{d dx}{d t^2}) + \frac{1}{2g} \int dx \int S ds (\frac{d dy}{d t^2}) = \frac{C(dy d dx - dx d dy)}{d s^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q ds - \int dy \int R ds - \frac{1}{2g} \int dz \int S ds (\frac{d dy}{d t^2}) + \frac{1}{2g} \int dy \int S ds (\frac{d dz}{d t^2}) = \frac{C(dz d dy - dy d dz)}{d s^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R ds - \int dz \int P ds - \frac{1}{2g} \int dx \int S ds (\frac{d dz}{d t^2}) + \frac{1}{2g} \int dz \int S ds (\frac{d dx}{d t^2}) = \frac{C(dx d dz - dz d dx)}{d s^3}.$$

Iidem vero valores loco P , Q , R in formula pro tensione T data substituti praebunt tensionem durante motu, quae ergo erit

$$T = -\frac{d x}{d s} \int P ds - \frac{d y}{d s} \int Q ds - \frac{d z}{d s} \int R ds + \frac{d x}{2g ds} \int S ds (\frac{d dx}{d t^2}) + \frac{d y}{2g ds} \int S ds (\frac{d dy}{d t^2}) + \frac{d z}{2g ds} \int S ds (\frac{d dz}{d t^2}).$$

§. 5. Quanquam autem in his formulis omnes plane motus, qui huiusmodi filis a viribus quibuscunque induci possunt continentur: tamen maxime dolendum est, ob defectum analyseos vix vllum fructum ex iis adhuc percipi potuisse. Quicquid enim mihi quidem inde elicere licuit ad motus reciprocos et quasi infinite paruos restringitur, cuiusmodi sunt motus chordarum, laminarum elasticarum et oscillationes funium libere suspensorum, vnde etiamnunc superfluum foret istas formulas diligentius euolvere,

vere, praeterquam quod tam arcto nexu cum formulis pro aequilibrio cohaerent, vt non difficile fit, quicquid de his reperietur, etiam ad illas transferre.

§. 6. Deinde vero etiam hoc loco elasticitatem fili seponam et tantum statum aequilibrii filorum perfecte flexibilium plenius sum inuestigaturus, quo facilius formulae inuentae ad omnes plane casus accommodari queant. Hoc modo tantum habebimus tres aequationes sequentes:

$$I. \int dy fP ds = \int dx fQ ds;$$

$$II. \int dz fQ ds = \int dy fR ds;$$

$$III. \int dx fR ds = \int dz fP ds;$$

quibuscum coniungamus formulam pro tensione datam:

$$T = -\frac{dx}{ds} fP ds - \frac{dy}{ds} fQ ds - \frac{dz}{ds} fR ds.$$

Illae igitur aequationes differentiatiae praebent istae:

$$I. dy fP ds = dx fQ ds,$$

$$II. dz fQ ds = dy fR ds,$$

$$III. dx fR ds = dz fP ds.$$

§. 7. Quod si harum trium aequationum prima ducatur in dz , secunda in dx , ac tertia in dy , eae inuicem additae producent aequationem $0 = 0$, quae, cum sit identica, declarat in binis aequationibus tertiam iam contineri, quaemadmodum iam supra monuimus. Hinc autem trium formularum integralium $\int P ds$, $\int Q ds$, $\int R ds$ binae quaelibet per tertiam definiri possunt, atque hinc habebimus

$$\int Q ds = \frac{dy}{dx} \int P ds \text{ et } \int R ds = \frac{dz}{dx} \int P ds.$$

Simi-

Simili modo per formulam $\int Q ds$ erit

$$\int P ds = \frac{d^2 x}{d^2 y} \int Q ds \quad \text{et} \quad \int R ds = \frac{d^2 z}{d^2 y} \int Q ds.$$

Porro vero per $\int R ds$ fiet

$$\int P ds = \frac{d^2 x}{d^2 z} \int R ds \quad \text{et} \quad \int Q ds = \frac{d^2 y}{d^2 z} \int R ds.$$

§. 8. Hinc igitur tensionem T per quamlibet harum formularum integralium, exclusis binis reliquis, exprimere poterimus. Primo enim erit per formulam $\int P ds$:

$$T = -\frac{d^2 x}{d^2 s} \int P ds - \frac{d^2 y^2}{d^2 s d^2 x} \int P ds - \frac{d^2 z^2}{d^2 s d^2 x} \int P ds = -\frac{d^2 s}{d^2 x} \int P ds,$$

propter $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Eodem modo per formulam $\int Q ds$ reperiemus quoque $T = -\frac{d^2 s}{d^2 y} \int Q ds$ et per formulam $\int R ds$, $T = -\frac{d^2 s}{d^2 z} \int R ds$.

§. 9. Quod si ergo tensionem T tanquam datam spectemus, nostrae formulae integrales ita definientur ut fit

$$\int P ds = -\frac{T dx}{ds},$$

$$\int Q ds = -\frac{T dy}{ds},$$

$$\int R ds = -\frac{T dz}{ds},$$

ex quarum differentiatione, si elementum ds constans capiamus, ipsas vires sollicitantes $P ds$, $Q ds$ et $R ds$, ex tensione T definire licebit hoc modo:

$$P ds = -\frac{dT dx - T d^2 x}{ds};$$

$$Q ds = -\frac{dT dy - T d^2 y}{ds};$$

$$R ds = -\frac{dT dz - T d^2 z}{ds};$$

atque hinc porro concludimus fore:

$P ds$

$$P dx = -\frac{dT dx^2}{ds^2} - \frac{T dx ddx}{ds^2};$$

$$Q dy = -\frac{dT dy^2}{ds^2} - \frac{T dy ddy}{ds^2};$$

$$R dz = -\frac{dT dz^2}{ds^2} - \frac{T dz d dz}{ds^2};$$

quae tres formulae coniunctae, cum fit $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, hincque $dx ddx + dy ddy + dz d dz = 0$, ob ds constans, fient $P dx + Q dy + R dz = dT$.

§. 10. Evidens autem est hanc formulam $P dx + Q dy + R dz$, exprimere vim tangentialem, qua elementum ds secundum ipsam directionem Zz a ternis viribus $P ds$, $Q ds$, $R ds$ sollicitatur. Quod si ergo hanc vim tangentialem designemus per $\ominus ds$, ut $\ominus ds = P dx + Q dy + R dz$, erit utique $dT = -\ominus ds$, ideoque $T = C - \int \ominus ds$, quemadmodum ex natura rei constat, quandoquidem tensio semper aequatur summae omnium virium tangentialem; sicque vicissim ex vi tangentiali $\ominus ds$ et tensione T innotescunt ternae vires sollicitantes

$$P ds = +\ominus dx - \frac{T d dx}{ds};$$

$$Q ds = +\ominus dy - \frac{T d dy}{ds};$$

$$R ds = +\ominus dz - \frac{T d dz}{ds};$$

§. 11. Quod si iam praeter vim tangentialem $\ominus ds$ etiam vim normalem in calculum introducere velimus, eamque ponamus $= \Pi ds$, cuius directio non solum ad elementum Zz normalis est intelligenda, sed etiam ad planum, in quo duo elementa contigua sunt sita, ita ut omnes vires sollicitantes iunctim sumitae ad has duas vires $\ominus ds$ et Πds reuocentur: quoniam vis tribus viribus sollicitantibus $P ds$, $Q ds$ et $R ds$ aequalens est

$ds\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$, at vero vires normalis et tangentialis Πds et Θds reducuntur ad hanc univ. $ds\sqrt{(\Pi^2 + \Theta^2)}$; necesse est ut fiat $\sqrt{(\Pi^2 + \Theta^2)} = \sqrt{P^2 + R^2 + Q^2}$ ideoque $\Pi^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - \Theta^2$, siue

$$\Pi \Pi ds^2 = (PP + QQ + RR) ds^2 - \Theta \Theta ds^2.$$

§. 12. Supra autem vidimus esse

$$\Theta ds = P dx + Q dy + R dz,$$

vnde fit

$$\Theta \Theta ds^2 = PP dx^2 + QQ dy^2 + RR dz^2 + 2PQ dx dy + 2PR dx dz + QR dy dz.$$

Tum vero loco ds^2 valorem suum $dx^2 + dy^2 + dz^2$ substituendo erit

$$(PP + QQ + RR) ds^2 = \begin{cases} + (PP + QQ + RR) dx^2 \\ + (PP + QQ + RR) dy^2 \\ + (PP + QQ + RR) dz^2, \end{cases}$$

vnde si subtrahatur $\Theta^2 ds^2$, remanebit

$$\Pi \Pi ds^2 = (QQ + RR) dx^2 + (PP + RR) dy^2 + (PP + QQ) dz^2 - 2PQ dx dy - 2PR dx dz - 2QR dy dz,$$

quae expressio manifesto reducitur ad summam trium sequentium quadratorum:

$$\Pi \Pi ds^2 = (Pdy - Qdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2 + (Rdx - Pdz)^2.$$

§. 13. Cum igitur supra inuenerimus

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Theta dx}{ds} - \frac{T ddx}{ds^2}; \\ Q &= \frac{\Theta dy}{ds} - \frac{T ddy}{ds^2}; \\ R &= \frac{\Theta dz}{ds} - \frac{T ddz}{ds^2}, \text{ erit} \end{aligned}$$

Pdy

$$\begin{aligned} P dy - Q dx &= -\frac{T(dy ddx - dx ddy)}{ds^2}, \\ Q dz - R dy &= -\frac{T(dz ddy - dy ddz)}{ds^2}, \\ R dx - P dz &= -\frac{T(dx ddz - dz ddx)}{ds^2}, \end{aligned}$$

quarum formularum quadrata inuicem addita praebebunt:

$$\Pi \Pi ds^2 = \frac{T T}{ds^2} \left\{ \begin{aligned} &+ (dy ddx - dx ddy)^2 \\ &+ (dz ddy - dy ddz)^2 \\ &+ (dx ddz - dz ddx)^2 \end{aligned} \right\}.$$

§. 14. Quod si autem radius osculi curuae in puncto Z dicatur r , qui cadit in planum duorum elementorum contiguorum, alia occasione ostensum est esse

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(dy ddx - dx ddy)^2 + (dz ddy - dy ddz)^2 + (dx ddz - dz ddx)^2}}$$

ergo radio osculi introducto erit $\Pi \Pi ds^2 = \frac{T T ds^2}{r r}$, ideoque $\Pi = \frac{T}{r}$, ita vt hoc modo simplicissime vis normalis ex sola tensione et radio osculi definiatur, dum vis tangentialis, vti ante inuenimus, est $\Theta = -\frac{dT}{ds}$.

§. 15. Quando ergo agitur de aequilibrio fili perfecte flexilis, cui in singulis elementis ds applicatae sint binae vires, altera tangentialis $= \Theta ds$, altera normalis $= \Pi ds$, quarum quidem haec cadat in planum in quo filum hoc loco incuruatur, praeterea vero tensio in hoc loco ponatur $= T$; tum status aequilibrii his duabus aequationibus determinatur; 1^o. $T = \Pi r$ et 2^o. $dT = -\Theta ds$. Quare cum ex priore sit $dT = \Pi dr + r d\Pi$, elisa tensione T pro aequilibrio habebitur haec vnica aequatio: $r d\Pi + \Pi dr + \Theta ds = 0$; vnde si ambae vires Π et Θ per elementa curuae fuerint datae, haec aequatio naturam curuae determinabit. Sin autem ipsa curua fuerit data

cum altera harum virium, inde altera reperietur. Veluti si data sit vis Π , erit

$$\Theta = - \frac{r d \Pi - \Pi dr}{ds} = - d \cdot \frac{\Pi r}{ds};$$

si autem altera Θ fuerit data, tum erit $\Pi = - \int \frac{\Theta ds}{r}$.

§. 16. Hinc iam facillime problema non ita pridem tractatum, quo quaerebatur status aequilibrii funis corpori cylindrico circumplicati et vtrinque a viribus tensi, multo generalius resolui poterit. Quando scilicet totus funis non in eodem plano versatur, atque etiam corpori cuiuscunque figurae fuerit circumuolutus, ita ut figura funis sit cognita; tum si frictio se habeat ad pressionem ut λ ad r , ita ut sit $\Theta = \lambda \Pi$, prior aequatio statim praebet $r d \Pi + \Pi dr + \lambda \Pi ds = 0$, unde fit

$$\frac{d \Pi}{\Pi} + \frac{dr}{r} + \frac{\lambda ds}{r} = 0,$$

vbi cum $\frac{ds}{r}$ denotet angulum elementarem, quo bina elementa proxima incurvantur, si ponamus $\int \frac{ds}{r} = \Phi$, habebimus integrando $\Pi r e^{\lambda \Phi} = C$, ideoque $\Pi = \frac{C e^{-\lambda \Phi}}{r}$, hinc

$$\Theta = \frac{\lambda C e^{-\lambda \Phi}}{r} \text{ et ipsa funis tensio } T = C e^{\lambda - \Phi}.$$

Quod si ergo in altero termino, vbi $\Phi = 0$, vis tendens fuerit $= M$, in altero autem termino, vbi $\Phi = \theta$, vis tendens $= N$: habebimus $M = C$, deinde $N = C e^{-\lambda \theta}$; unde patet constantem C esse debere $= M$, ita ut $N = M e^{-\lambda \theta}$. Haec ergo solutio non solum conuenit cum ea quae nuper est inventa, sed etiam multo patet latius.

§. 17. Quando autem funis corpori cuiuscunque figuræ circumplicatur, cuius quidem superficies sit laevigata, funis tensus super ea ad aliam figuram se componere nequit, nisi quæ sit brevissima inter suos terminos. Ne igitur opus sit hanc limitationem adiungere, res ita concipi potest, quasi funis per canalem in superficie excavatum circumduceretur, cui proinde figuram quamcunque tribuere licebit. Praeterea vero si totus funis in eodem plano esset applicatus, tum $\int \frac{ds}{r} = \Phi$ designaret amplitudinem curvae a fune formatae. At si funis non in eodem plano applicetur, idea amplitudinis quodammodo cessat: interim tamen Φ denotabit summam omnium angulorum elementarium $\frac{ds}{r}$, etiam si non in idem planum cadant. Caeterum hinc patet ut ante, si λH totum effectum frictionis denotet pressioni Π respondentem, tum aequilibrium tam diu subsistere posse, quamdiu vis tendens maior M non maior fuerit quam $N e^{\lambda \Phi}$.

§. 18. Solutio autem tum tantum tam simplex evadit, quando vires sollicitantes sunt vel tangentiales vel normales. Quando autem hae vires secundum directiones ternorum axium OA, OB, OC agunt, quas litteris P, Q, R indicavimus, ita ut eae sint functiones ternarum coordinatarum x, y, z ; tum inuestigatio curvae, quam hae vires filo flexili inducent, multo maiori laborat difficultate, quoniam aequationes primo inventas a formulis integralibus liberari oportet. Interim tamen adhibendis ferit, ubi quidem etiam nunc mentem ab elasticitate abstrahimus.

§. 19. Hic scilicet statim in calculum introduce-
mus sequentes formulas analyticas:

$$\frac{dyddx - dxddy}{ds^3} = r,$$

$$\frac{dzddy - dyddz}{ds^3} = p,$$

$$\frac{dxd dz - dzddx}{ds^3} = q,$$

quae litterae cum supra adhibitis non sunt confundendae.
Hinc igitur statim radius osculi curvae in puncto Z euadet
 $\frac{1}{\sqrt{pp+qq+rr}}$; deinde vero habebimus vt sequitur:

$$\begin{aligned} \text{I. } d. \frac{dy}{dz} &= - \frac{r ds^2}{dx^2}; & \text{II. } d. \frac{dx}{dy} &= + \frac{r ds^2}{dy^2}; \\ \text{III. } d. \frac{dz}{dy} &= - \frac{p ds^2}{dy^2}; & \text{IV. } d. \frac{dy}{dz} &= + \frac{p ds^2}{dz^2}; \\ \text{V. } d. \frac{dx}{dz} &= - \frac{q ds^2}{dz^2}; & \text{VI. } d. \frac{dz}{dx} &= + \frac{q ds^2}{dx^2}. \end{aligned}$$

Caeterum hae tres quantitates p, q, r a se inuicem ita
pendent, vt fit $p dx + q dy + r dz = 0$.

§. 20. His constitutis cum prima aequatio fuerit
 $dy \int P ds = dx \int Q ds$, erit $\frac{dy}{dx} \int P ds = \int Q ds$ et differen-
tando

$$- \frac{r ds^2}{dx^2} \int P ds + \frac{dy}{dx} P ds = Q ds,$$

vnde colligimus

$$\int P ds = \frac{-Q dx^2 + P dx dy}{r ds^2}.$$

Simili vero modo si aequationem $\int P ds = \frac{dx}{dy} \int Q ds$ diffe-
rentiemus, prodibit

$$P ds = \frac{r ds^2}{dy^2} \int Q ds + \frac{Q dx ds}{dy};$$

vnde nanciscimur

$$\int Q ds = \frac{P dy^2 - Q dx dy}{r ds^2},$$

simili modo ex reliquis aequationibus deducemus

$$\int Q ds = - \frac{R dy^2 + Q dy dz}{p ds^2}; \quad \int R ds = \frac{Q dz^2 - R dy dz}{p ds^2};$$

$$\int R ds = - \frac{p dz^2 + R dz dx}{q ds^2}; \quad \int P ds = \frac{R dx^2 - P dx dz}{q ds^2}.$$

§. 21.

§. 21. Quoniam igitur pro qualibet formula integrali geminos adepti sumus valores, iis inter se aequatis impetrabimus sequentes aequationes:

$$\frac{Pdy - Qdx}{r} = \frac{Rdx - Pdz}{q};$$

$$\frac{Qdx - Pdy}{r} = \frac{Rdy - Qdz}{p};$$

$$\frac{Rdy - Qdz}{p} = \frac{Pdiz - Rdx}{q}.$$

quae omnes tres, ob $pdx + qdy + rdz = 0$, reuocantur ad hanc unam: $Pp + Qq + Rr = 0$. In hac ergo aequatione iam insignis status aequilibrii continetur proprietas; neque tamen ea status aequilibrii penitus exhauritur, sed insuper alia aequatione est opus ad solutionem completam perficiendam.

§. 22. Hunc in finem accipiatur pro lubitu unus valor cuiuspiam formulae integralis, ac prima quidem erat $\int P ds = \frac{dx(Pdy - Qdx)}{rds^2}$, quae denuo differentiata sumto elemento ds constante praebet

$$P ds = \frac{d dx (Pdy - Qdx)}{rds^2} + \frac{dx (Pddy - Qddx)}{rds^2}$$

$$+ \frac{dx (dPdy - dQdx)}{rds^2} - \frac{dx dr (Pdy - Qdx)}{rds^2},$$

quae per $rrds^2$ multiplicata ac omnibus terminis ad eandem partem translatis abit in hanc formam:

$$0 = -Prrds^2 + rddx(Pdy - Qdx) + rdx(Pddy - Qddx)$$

$$+ rdx(dPdy - dQdx) - drdx(Pdy - Qdx).$$

In ista aequatione littera P ducitur in hanc formulam:

$$-rrds^2 + r(dyddx + dxddy) - drdx dy,$$

quae loco rds^2 substituto valore fit $2rdxddy - drdx dy$; at vero littera Q ducitur in $drdx^2 - 2rdx ddx$, vnde tota haec aequatio per dx diuisa erit

$$P(2r$$

$P(2rddy - drdy) - Q(2rddx - drdx) + r(dPdy - dQdx) = 0$
 ex qua colligitur

$$\frac{dr}{r} = \frac{2Qddx - 2Pddy - dPdy + dQdx}{Qdx - Pdy},$$

siue commodius

$$\frac{dr}{r} = \frac{2Qddx + dQdx - 2Pddy - dPdy}{Qdx - Pdy},$$

quae eadem aequatio etiam ex secunda formula $\int Q ds$ elicitor. Eodem igitur modo ex reliquis obtinebitur

$$\frac{dp}{p} = \frac{2Rddy + dRdy - 2Qddz - dQdz}{Rdy - Qdz},$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{2Pddz + dPdz - 2Rddx - dRdx}{Pdz - Rdx}.$$

Quoniam autem vnica tantum aequatio, praeter inuentam $Pp + Qq + Rr = 0$, ad aequilibrium determinandum requiritur, necesse est has tres aequationes modo inuentas ad vnicam reduci posse, si quidem in subsidium vocetur formula $pdx + qdy + rdz = 0$.

§. 23. Quo haec clarius perspiciantur in calculum introducamus tensionem fili T , quandoquidem per eam ternas nostras formulas integrales concinne expressas inuenimus: erat autem

$$\int P ds = -\frac{Tdx}{ds}; \quad \int Q ds = -\frac{Tdy}{ds}; \quad \int R ds = -\frac{Tdz}{ds};$$

vnde differentiando elicimus

$$P = -\frac{dTdx - Tddx}{ds^2}; \quad Q = -\frac{dTdy - Tddy}{ds^2}; \quad R = -\frac{dTdz - Tddz}{ds^2};$$

vnde colligimus pro prima nostra aequatione

$$Qdx - Pdy = Trds \quad \text{et} \quad Qddx - Pddy = -2rdsdt;$$

deinde vero hinc erit porro

$$dP = -\frac{ddTdx - 2dTddx - Td^3x}{ds^2} \quad \text{et} \quad dQ = -\frac{ddTdy - 2dTddy - Td^3y}{ds^2};$$

vnde

vnde fit

$$dQ dx - dP dy = 2r ds dT + \frac{T(dy d^2x - dx d^2y)}{ds^2},$$

quibus valoribus substitutis prima aequatio fiet $\frac{dr}{r} - \frac{(dy d^2x - dx d^2y)}{r ds^2}$,
 et cum fit $dy ddx - dx ddy = r ds^2$, hinc fiet differen-
 tiando $dy d^2x - dx d^2y = dr ds^2$; vnde patet aequationem
 nostram fieri identicam, id quod mirum non est, cum in-
 troducta tensione T ipsae aequationes primitivae

$$dy fP ds = dx fQ ds,$$

$$dz fQ ds = dy fR ds,$$

$$dx fR ds = dz fP ds,$$

iam sint identicae. Interim tamen quaelibet trium aequa-
 tionum inuentarum continet vnam determinationem neces-
 sariam pro statu aequilibrii.

§. 24. Optime autem haec perspicientur, si quae-
 stionem ad casum quendam particularem accommodemus.
 Consideremus igitur filum cylindro circulari ita circumuo-
 lutum, vt in eius superficie lineam breuissimam exhibeat,
 quam ergo figuram tanquam datam spectemus, et quaera-
 mus vires P, Q, R, quae filo in singulis elementis appli-
 catae ipsi hanc ipsam figuram inducere valeant. Sit radius
 istius cylindri = r, et notum est pro quavis fili portione s
 coordinatas ita determinari, vt sit $x = a \cos. s$, $y = a \sin. s$
 et $z = ns$, existente $a = \sqrt{r^2 - nn}$ ideoque n fractione
 vnitate minore. Hinc ergo sumto elemento ds constante
 erit

$$dx = -a ds \sin. s; \quad dy = a ds \cos. s; \quad dz = n ds;$$

tum vero porro

$$d^2dx = -a ds^2 \cos. s; \quad d^2dy = -a ds^2 \sin. s; \quad d^2dz = 0;$$

vnde pro p, q, r sequentes nanciscimur valores:

$$p = -\alpha n \sin. s; \quad q = \alpha n \cos. s; \quad r = -\alpha \alpha;$$

ex quibus valoribus vtique erit $p dx + q dy + r dz = 0$.
 Tum vero pro statu aequilibrii aequatio primo inuenta praebet hanc determinationem: $Pp + Qq + Rr = 0$, quae ergo fit $-\alpha n P \sin. s + \alpha n Q \cos. s - \alpha \alpha R = 0$. Altera vero conditio petatur ex aequatione nostra prima $\frac{dr}{r}$, vnde fiet

$$0 = \frac{2Q ds \cos. s + dQ \sin. s - 2P ds \sin. s + dP \cos. s}{Q \sin. s + P \cos. s},$$

at vero duae reliquae aequationes dabunt

$$\frac{ds \cos. s}{\sin. s} = -\frac{2\alpha R ds \sin. s + \alpha dR \cos. s - n dQ}{\alpha R \cos. s - n Q},$$

$$-\frac{ds \sin. s}{\cos. s} = \frac{2\alpha R ds \cos. s + \alpha dR \sin. s + n dP}{n P + \alpha R \sin. s}.$$

§. 25. Hae autem tres postremae aequationes vnicam continent determinationem, ad quod ostendendum eas primo ad formam simplicissimam reuocemus, eritque:

$$\text{I. } 0 = 2Q ds \cos. s + dQ \sin. s - 2P ds \sin. s + dP \cos. s;$$

$$\text{II. } \alpha R ds \cos. s^2 - n Q ds \cos. s = -2\alpha R ds \sin. s^2 + \alpha dR \sin. s \cos. s - n dQ \sin. s,$$

sive

$$\text{II. } 0 = -\alpha R ds (1 + \sin. s^2) + n Q ds \cos. s + \alpha dR \sin. s \cos. s - n dQ \sin. s$$

$$\text{III. } -n P ds \sin. s - \alpha R ds \sin. s^2 = 2\alpha R ds \cos. s^2 + \alpha dR \sin. s \cos. s + n dP \cos. s,$$

sive

$$\text{III. } 0 = \alpha R ds (1 + \cos. s^2) + n P ds \sin. s + \alpha dR \sin. s \cos. s + n dP \cos. s;$$

et

et quoniam prima conditio dedit

$$R = \frac{n Q \cos. s - n P \sin. s}{\alpha}, \text{ erit}$$

$$dR = \frac{n dQ \cos. s - n Q d s \sin. s - n dP \sin. s - n P d s \cos. s}{\alpha}$$

Iam hi valores in secunda et tertia aequatione substituti perducent ad ipsam aequationem primam; vnde patet has tres aequationes vnicae tantum aequivalere.

§. 26. Sufficit igitur primam euoluiffe, quae est

$$0 = 2 Q d s \cos. s + d Q \sin. s - 2 P d s \sin. s + d P \cos. s,$$

vnde patet alteram quantitatum P et Q pro libitu accipi posse. Spectemus ergo quantitatem P tanquam cognitam et alteram Q quaeramus ex hac aequatione:

$$d Q \sin. s + 2 Q d s \cos. s = 2 P d s \sin. s - d P \cos. s,$$

quae per $\sin. s$ multiplicata integretur, vnde prodit

$$Q \sin. s^2 = 2 \int P d s \sin. s^2 - \int d P \sin. s \cos. s,$$

est autem per reductionem notissimam:

$$\int d P \sin. s \cos. s = P \sin. s \cos. s - \int P d s (\cos. s^2 - \sin. s^2),$$

vnde erit

$$Q \sin. s^2 = - P \sin. s \cos. s + \int P d s (\cos. s^2 + \sin. s^2) \\ = - P \sin. s \cos. s + \int P d s,$$

ita vt fit $Q = -\frac{P \cos. s}{\sin. s} + \frac{\int P d s}{\sin. s^2}$, hincque porro

$$R = -\frac{n P}{\alpha \sin. s} + n \cos. s \frac{\int P d s}{\alpha \sin. s^2},$$

sicque ex assumta quantitate P binae reliquae Q et R determinantur; vnde patet filum infinitis modis in hoc situ in aequilibrio consistere posse.

§. 27. Quando autem vna trium virium P, Q et R vt cognita spectatur, binae reliquae multo facilius ex ea

definire possunt per geminos valores quos ante pro formulis $\int P ds$, $\int Q ds$ et $\int R ds$ invenimus; neque opus est ad ulteriorem differentiationem descendere. Ita si vis P fuerit data, tum gemini valores pro $\int P ds$ dati hoc casu euadent

$$\int P ds = Q \sin. s^2 + P \sin. s \cos. s = \frac{\alpha R \sin. s^2 + n P \sin. s}{n \cos. s},$$

vnde colligimus vt ante

$$Q = \frac{\int P ds - P \sin. s \cos. s}{\sin. s^2} = \frac{\int P ds}{\sin. s^2} - \frac{P \cos. s}{\sin. s} \text{ et}$$

$$R = \frac{n \cos. s \int P ds - n P}{\alpha \sin. s^2},$$

Simili modo si vim R pro data accipiamus, bini valores pro $\int R ds$ dati fient

$$\int R ds = \frac{-n Q}{\alpha \sin. s} + \frac{R \cos. s}{\sin. s} = \frac{-n P}{\alpha \cos. s} - \frac{R \sin. s}{\cos. s},$$

vnde reperitur:

$$P = \frac{\alpha R \sin. s}{n} - \frac{\alpha \cos. s}{n} \int R ds \text{ et } Q = \frac{\alpha R \cos. s}{n} - \frac{\alpha \sin. s}{n} \int R ds,$$

vnde si fuerit, $R=1$, quod euenit si axis cylindri fit verticalis et singula funis elementa a gravitate vrgeantur, tum binae reliquae vires requisitae ad aequilibrium erunt

$$P = \frac{\alpha \sin. s}{n} - \frac{\alpha (s+a) \cos. s}{n} \text{ et } Q = \frac{\alpha \cos. s}{n} - \frac{\alpha (s+a) \sin. s}{n}.$$

Ex quo patet, quaestionem etiamnunc esse indeterminatam, quoniam constantem a pro lubitu accipere licet.

§. 28. Quin etiam tensionem funis in singulis punctis pro arbitrio sumere licet; tum enim pro nostro casu, quem hic tractamus, formulae supra (§. 9.) exhibitae erunt

$$\int P ds = \alpha T \sin. s; \int Q ds = -\alpha T \cos. s; \int R ds = -n T,$$

vnde ipsae vires erunt

$$P =$$

$$P = \alpha \frac{dT}{ds} \sin. s + \alpha T \cos. s;$$

$$Q = -\alpha \frac{dT}{ds} \cos. s + \alpha T \sin. s;$$

$$R = -\frac{ndT}{ds},$$

quo ergo casu omnes tres vires perfecte determinantur; unde si tensio vbique debeat esse constans, siue $T=D$, nostrae vires erunt $P = \alpha D \cos. s$; $Q = \alpha D \sin. s$; $R = 0$, atque hinc manifestum est quemadmodum omnes huiusmodi quaestiones tractari conveniat.

De aequilibrio filorum elasticorum a viribus quibuscunque sollicitatorum.

§. 29. Formulae generales pro filis elasticis datae multo commodiores reddentur introductione litterarum p , q , r , quarum valores erant positi

$$p = \frac{dzddy - dyddz}{ds^3}; \quad q = \frac{dxddz - dzddx}{ds^3}; \quad r = \frac{dyddx - dxddy}{ds^3};$$

circa quas formulas iam supra notauimus fore $p dx + q dy + r dz = 0$. Praeterea vero quoque evidens est fore $p ddx + q ddy + r ddz = 0$; unde ex differentiatione prioris aequalitatis oritur $dp dx + dq dy + dr dz = 0$, id quod etiam inde patet, quod sumto elemento ds constante sit

$$dp = \frac{d^2z d^2y - d^2y d^2z}{ds^5};$$

$$dq = \frac{d^2x d^2z - d^2z d^2x}{ds^5};$$

$$dr = \frac{d^2y d^2x - d^2x d^2y}{ds^5};$$

hinc autem insuper sequitur fore

$$dp d^2x + dq d^2y + dr d^2z = 0.$$

Has igitur insignes relationes inter quantitates p , q , r probe notasse iuuabit.

§. 30. Praeterea vero etiam formula irrationalis $\sqrt{pp + qq + rr}$ memorabilem reductionem suppeditat: fiet enim

$$ds^2(pp + qq + rr) = (dy^2 + dz^2)ddx^2 + (dx^2 + dz^2)ddy^2 + (dx^2 + dy^2)ddz^2 - 2dx dy ddx ddy - 2dx dz ddx dds - 2dy dz ddy dds,$$

cum igitur $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, haec formula transformabitur in sequentem:

$$pp + qq + rr = \frac{ddx^2 + ddy^2 + dds^2}{ds^4} - \frac{dx^2 ddx^2 - dy^2 ddy^2 - dz^2 dds^2}{ds^6} - \frac{2dx dy ddx ddy - 2dx dz ddx dds - 2dy dz ddy dds}{ds^8},$$

vbi membra negativa manifesto continent quadratum formulae $dx ddx + dy ddy + dz dds$. Est vero

$$dx ddx + dy ddy + dz dds = ds dds,$$

nullo scilicet elemento pro constante assumpto, hoc ergo valore substituto nascetur haec expressio satis concinna:

$$pp + qq + rr = \frac{ddx^2 + ddy^2 + dds^2 - ds^2}{ds^4};$$

quamobrem radius osculi curvae ad Z generalissime erit $\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + dds^2 - ds^2)}}$, vbi quodlibet elementum pro lubitu vt constans accipi poterit, ita vt valor expressionis hinc neutiquam pendeat, quandoquidem quouis casu differentialia secundi gradus sponte se mutuo tollunt. Veluti in casu ante tractato, vbi erat

$$dx = -a ds \sin. s; \quad dy = a ds \cos. s; \quad dz = n ds;$$

existente $\alpha = \sqrt{1 - nn}$, etiam elemento ds variabili sumpto, fiet

$$ddx = -a dds \sin. s - a ds^2 \cos. s;$$

$$ddy = a dds \cos. s - a ds^2 \sin. s;$$

$$dds = n dds,$$

quibus valoribus substitutis reperietur:

dds

$ddx^2 + ddy^2 + ddz^2 - dds^2 = aads^4;$
 sicque radius osculi erit $\frac{1}{a}$.

§. 31. His praenotatis, si G exprimat elasticitatem absolutam fili in singulis punctis, quam hic tanquam constantem assumemus, ita vt filum vbique vniformiter crassum sit concipiendum; tum aequationes pro aequilibrio erunt

- I. $\int dy fP ds - \int dx fQ ds = Gr.$
- II. $\int dz fQ ds - \int dy fR ds = Gp.$
- III. $\int dx fR ds - \int dz fP ds = Gq,$

quae differentiatiae praebent

$$\begin{aligned} dy fP ds - dx fQ ds &= G dr, \\ dz fQ ds - dy fR ds &= G dp, \\ dx fR ds - dz fP ds &= G dq. \end{aligned}$$

§. 32. Hinc primo tam $\int Q ds$ quam $\int R ds$ per $\int P ds$ exprimamus eritque

$$\int Q ds = \frac{dy}{dx} \int P ds - \frac{Gdr}{dx} \text{ et } \int R ds = \frac{dz}{dx} \int P ds + \frac{Gdq}{dx},$$

qui valores in formula pro tensione T data substituti praebent hanc expressionem:

$$T = -\frac{dx}{ds} \int P ds - \frac{dy^2}{dx ds} \int P ds - \frac{dz^2}{dx ds} \int P ds - \frac{Gdr dy}{dx ds} - \frac{Gdq dz}{dx ds},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$T = -\frac{ds}{dx} \int P ds + \frac{G(dr dy - dq dz)}{dx ds},$$

vnde colligimus:

$$\int P ds = \frac{G(dr dy - dq dz)}{ds^2} - \frac{T ds}{ds^2}.$$

Similique modo reperietur:

$$\int Q ds = \frac{G(dp dz - dr dx)}{ds^2} - \frac{T dy}{ds},$$

$$\int R ds = \frac{G(dq dx - dp dy)}{ds^2} - \frac{T dz}{ds}.$$

Hinc autem differentiando porro fiet

$$P = \frac{G(dr dy + dy dr - dq dz - dz dq)}{ds^3} - \frac{T dz - dT dz}{ds^2},$$

$$Q = \frac{G(dp dz + dz dp - dr dx - dx dr)}{ds^3} - \frac{T dy - dT dy}{ds^2},$$

$$R = \frac{G(dq dx + dx dq - dp dy - dy dp)}{ds^3} - \frac{T dz - dT dz}{ds^2}.$$

§. 33. Cum nunc sit vis tangentialis, ut supra vidimus $= P dx + Q dy + R dz$, quam per Θds designauimus, erit

$$\Theta ds = -G(p dp + q dq + r dr) - dT,$$

quare cum sit radius osculi curuae $= \frac{1}{\sqrt{pp + qq + rr}}$, si eum vocemus $= e$, erit $pp + qq + rr = \frac{1}{e^2}$, hincque

$$p dp + q dq + r dr = -\frac{d e}{e^3},$$

quo valore substituto fiet $\Theta ds = \frac{G d e}{e^3} - dT$.

Quod si porro vim normalem pro elemento ds statuamus $= H ds$, supra iam vidimus fore

$$H ds = \sqrt{(P dy - Q dx)^2 + (Q dz - R dy)^2 + (R dx - P dz)^2},$$

vbi si loco P, Q, R valores supra exhibitos substituere vellemus, in calculos inextricabiles delaberemur.

§. 34. Quoniam modo inuenimus

$$\int Q ds = \frac{dy}{dx} \int P ds - \frac{G dr}{dx},$$

erit differentiando

$$Q ds = -\frac{r ds^2}{dx^2} \int P ds + \frac{P ds dy}{dx} - \frac{G dr}{dx} + \frac{G dr dx}{dx^2},$$

unde colligitur

$\int P ds$

$$\int P ds = \frac{P dx dy}{r ds^2} - \frac{Q dx^2}{r ds^2} + \frac{G (dr ddz - dx ddr)}{r ds^3}, \text{ siue}$$

$$\int P ds = \frac{dx (P dy - Q dx)}{r ds^2} + \frac{G (dr ddz - dx ddr)}{r ds^3},$$

hinc autem porro erit

$$\int Q ds = \frac{dy (P dy - Q dx)}{r ds^2} - \frac{G (dy ddr - dr ddz)}{r ds^3},$$

ex quibus per analogiam concludimus:

$$\int Q ds = \frac{dy (Q dz - R dy)}{p ds^2} + \frac{G (dp ddy - dy ddp)}{p ds^3},$$

$$\int R ds = \frac{dz (Q dz - R dy)}{p ds^2} - \frac{G (dz ddp - dp ddz)}{p ds^3},$$

$$\int R ds = \frac{dz (R dz - P dx)}{q ds^2} + \frac{G (dq ddz - dz ddq)}{q ds^3},$$

$$\int P ds = \frac{px (R dz - P dx)}{q ds^2} - \frac{G (dx ddq - dq ddx)}{q ds^3},$$

hocque modo pro qualibet formula integrali binos nacti sumus valores, qui inter se aequati praebent aequationem a signo integrali liberam. Hinc igitur satis patet, determinationem aequilibrii pro filis elasticis, quae a viribus quibuscunque sollicitantur, ad calculos non parum molestos perducere, ita ut in genere vix quicquam ulterius praestare liceat quam hic est factum. Quamobrem pro quovis casu oblato ac determinato dispiciendum erit, quomodo ope formularum hinc traditarum commodissime ad solutionem perveniri queat. Ceterum iam observavimus motum huiusmodi filorum ne suscipi quidem posse, antequam insignia incrementa calculi fuerint detecta.