1786

De traiectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis

Leonhard Euler

DE TRAIECTORIIS RECIPROCIS TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hoc de Traiectoriis reciprocis problema, quod olim summo studio inter Geometras fuit agitatum, qua occasione maxima incrementa in Analysin sunt inuecta, eiusmodi postulat lineas curuas E C F, circa axem A C B describendas, vt, ductis vtrinque ad aequalia internalla rectis M P et N Q axi parallelis, summa angulorum $\zeta + \eta$, quos curua cum binis hisce rectis constituit, vbique sit eadem. Hoc enim modo fiet, vt, si eadem curua circa axem inuertatur in situm E' M' N' F' et secundum axem motu sibi parallelo, sicque punctum N' vsque in M promoueatur, an- Tab I. Fig. 1.

gulus

gulus interfectionis fiat $= \zeta + \eta$. Quoniam autem eximia artificia, quae olim hac occasione sunt exogitata, has in dispersa reperiuntur, operam equidem non perdidisse videor, si, methodo vniformi vsus, omnia succincte ante oculos posuero: praecipue cum nonnulla plane noua adiicere contigerit.

Solutio
huius quaestionis in genere concepta.

§. 2. Quod si ergo angulum intersectionis propositum ponamus $= 2\alpha$, vt sit $\zeta + \eta = 2\alpha$; tum vero statuamus angulum $\zeta = \alpha - \omega$, fiet alter angulus $\eta = \alpha + \omega$. Vnde patet, angulum ω ita esse debere comparatum, vt, facto intervallo ab axe negatiuo, ille abeat in sui negatiuum, seu in $-\omega$. Quo nunc hanc conditionem facilius ad calculum reuocemus, ducatur ad axem recta directrix GAH, quae cum axe AB faciat angulum $BAG = 2\alpha$;
Tab. I Fig. 2. ac ipsa curua referatur ad hanc directionem per coordinatas obliquangulas $AP = x$ et $PM = y$; quo pacto pro puncto altero N abscissa AP abibit in sui negatiuum $-x$. Cum nunc sit $\zeta = \alpha - \omega$, manifestum est angulum ω esse debere functionem imparem ipsius x, ita vt, sumto x negatiuo, etiam angulus ω fiat negatiuus. Hoc modo iam id sumus lucrati, vt solum curuae punctum M considerasse sufficiat; quandoquidem hac ratione simul conditio alterius puncti N adimpletur.

§. 3. Consideretur nunc curuae elementum Mm, et ducta applicata proxima pm, directrici AG agatur parallela Mrs, eritque $Mr = Pp = dx$ et $rm = dy$; angulus

gulus vero $m r s = 2 \alpha$. Vnde cum ſit angulus $M m r = \zeta = \alpha - \omega$, erit angulus $m M r = \alpha + \omega$, vnde ex Trigonometria ſequitur fore

$$d x : d y = \text{ſin.}\,(\alpha - \omega) : \text{ſin.}\,(\alpha + \omega),\ \text{ideoque}$$
$$\frac{d y}{d x} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}.$$

§. 4. Ponamus nunc ad differentialia euitanda $d y = p\, d x$, ita vt indoles curuae etiam per aequationem inter x et p determinari poſſit. Hanc ob rem habebimus $p = \frac{d y}{d x} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}$; vnde patet, quantitatem p ita comparatam eſſe debere, vt, ſumto angulo ω negatiuo, ea abitura ſit in $\frac{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}$, qui valor prioris eſt reciprocus. At vero angulus ω fit negatiuus, quando abſciſſa x negatiua accipitur; vnde patet, quantitatem p talem eſſe debere functionem ipſius x, vt poſito $-x$ loco x ea abeat in $\frac{1}{p}$.

§. 5. Tota ergo ſolutio noſtri problematis huc redit, vt omnes functiones ipſius x in genere inueſtigentur, quae, dum loco x ſcribatur $-x$, abeant in ſui negatiuas. Et, quod hoc loco imprimis eſt notandum, iſta proprietas ad omnes plane angulos obliquos extenditur, quippe quae conditio tantum inclinationem applicatarum ad abſciſſas afficit; ita vt, quaecunque aequatio inter x et y inuenta problemati ſatisfecerit, eadem pro omnibus angulis interſectionum aeque valeat; dummodo obliquitas coordinatarum ipſi angulo interſectionis aequalis ſtatuatur. Ita, dummodo problema pro angulo interſectionis recto fuerit ſolutum, eadem ſolutio facillime ad omnes interſectionis angulos obliquos transferri poterit. Et quoniam tantum obliquitatem coordinatarum immutari opus eſt, ſi lineae inuen-

tae

tae fuerint algebraicae, eae hac tranſlatione perpetuo ad eundem ordinem pertinebunt.

§. 6. Quia igitur inuentio functionum reciprocarum vniuerſam huius quaeſtionis ſolutionem in ſe complectitur, facili negotio innumerabiles huiusmodi functiones exhibere licet. Inter quas primum occurrit formula $p = e^{nx}$: ſumto enim x negatiuo, haec formula abit in hanc: $\frac{1}{p} = e^{-nx}$. Hinc cum ſit $p = \frac{dy}{dx}$, fiet $dy = e^{nx}\,dx$ ideoque $y = \frac{1}{n} e^{nx}$, ſiue $l\,n\,y = n\,x$, quae eſt aequatio pro logarithmica. Deinde etiam quaſi ſponte ſe offert haec formula: $p = \frac{a-x}{a+x}$, quippe quae, mutato ſigno ipſius x, abit in $\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{p}$. Hinc autem fiet

$$y = \int \frac{a-x}{a+x} dx = -x + 2\,a\,l(a+x), \text{ ſiue}$$

$$y + x = 2\,a\,l\,\frac{a+x}{a}$$

quae curua etiam per logarithmicam facile conſtrui poteſt. Praeterea etiam patet ſumi poſſe $p = \frac{aa - bx + xx}{aa + bx + xx}$; ſumto enim x negatiuo prodit $\frac{1}{p} = \frac{aa + bx + xx}{aa - bx + xx}$. Hocque modo innumerabiles alias ſimiles formulas excogitare licet praeſcriptae conditioni ſatisfacientes.

§. 7. Quo autem rem generalius expediamus, denotent litterae P, R et T functiones quaſcunque pares ipſius x, quae ſcilicet maneant eaedem, licet loco x ſcribatur $-x$. At vero Q, S et V denotent functiones impares ipſius x, quae ſcilicet abeant in ſui negatiuas, cum pro x ſcribitur $-x$; ac manifeſtum eſt, conditioni noſtrae ſatisfieri, ſi ſtatuatur $p = \frac{P-Q}{P+Q}$; atque adeo generalius

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m}.$$

Quin

Quin etiam tales formulae coniungi possunt, vt sit

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m} \cdot \frac{(R-S)^n}{(R+S)^n} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k}.$$

Perspicuum enim est hoc modo, si loco x scribatur $-x$, litteram p abituram esse in $\frac{1}{p}$. Haec ergo Solutio cum sit generalissima, nulla plane laborat difficultate, siquidem curuis transcendentibus contenti esse velimus.

De curuis algebraicis quaestioni satisfacientibus.

§. 8. Verum si lineae algebraicae desiderentur, haud ita facile patet, cuiusmodi functiones loco P, Q, R, S, etc. accipi oporteat, vt formula $\int p\,dx = y$ fiat integrabilis. Singularis quidem casus haud difficulter se offert sumendo $p = (x + \sqrt{1+xx})^n$, quippe quae functio etiam est reciproca: Scripto enim $-x$ loco x ea abit in

$$\frac{1}{p} = (-x + \sqrt{1+xx})^n = \frac{1}{(x+\sqrt{1+xx})^n}.$$

Notum autem est formulam hinc ortam

$$y = \int dx\,(x + \sqrt{1+xx})^n$$

semper esse integrabilem, solis casibus $n = 1$ et $n = -1$ exceptis. Quod si enim ponatur

$$x + \sqrt{(1+xx)} = v, \text{ fiet}$$

$$x = \frac{vv-1}{2v} \text{ et } dx = \frac{dv(vv+1)}{2vv},$$

vnde cum sit $y = \int v^n\,dx$, erit

$$y = \frac{v^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{v^{n-1}}{2(n-1)};$$

ex qua formula innumerae curuae algebraicae elici possunt, atque adeo ex singulis curuarum ordinibus, si modo ordo secun-

secundus et tertius excipiatur, dum scilicet loco n successiue scribantur non solum numeri integri 2, 3, 4, 5, 6 etc. sed etiam fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. Quin etiam reliquae fractiones pro n assumtae in plures ordines adhuc nouas curuas suppeditabunt, quemadmodum iam alio loco est ostensum.

§. 9. Aeque foecunda etiam est haec formula:

$$p = (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n,$$

ita vt hinc fiat

$$y = \int dx\,(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n:$$

euidens enim est, sumto valore x negatiuo etiam $x^{\frac{1}{3}}$ fieri negatiuum, at vero $x^{\frac{2}{3}}$ signum suum retinere. Ad hanc igitur formulam integrandam faciamus primo $x^{\frac{1}{3}} = z$, vt fiat $x = z^3$, hincque

$$y = \int 3zz\,dz\,(z + \sqrt{1 + zz})^n.$$

Nunc ponatur vt ante $z + \sqrt{(1 + zz)} = v$, eritque

$$z = \frac{vv - 1}{2v} \text{ es } dz = \frac{dv\,(1 + vv)}{2vv}.$$

Quare cum sit $y = 3\int zz\,dz \,.\, v^n$, erit

$$y = 3\int \frac{dv\,(vv-1)^2}{4vv}\,\frac{(1+vv)}{2vv}\,v^n = \frac{3}{8}\int \frac{dv}{v^4}\,(vv-1)^2\,(vv+1)\,v^n,$$

quae aequatio euoluta et integrata praebet

$$y = \frac{3}{8}\left(\frac{v^{n+3}}{n+3} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^{n-1}}{n-1} + \frac{v^{n-3}}{n-3}\right),$$

vbi est $v = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1+x)}^{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, etiam poni posse

$$p = (x^{\frac{1}{5}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{5}}})^n;$$

tum

tum vero etiam

$$p = (x^{\frac{1}{7}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{7}}})^n,$$

$$p = (x^{\frac{1}{9}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{9}}})^n,$$

quibus assumtis perpetuo integratio succedet.

Alia methodus
curvas algebraicas quaestioni satisfacientes inuestigandi.

§. 10. Alium autem fontem multo vberiorem aperiemus ad curuas algebraicas perueniendi. Introducatur scilicet noua variabilis z, cuius x sit functio impar, ita vt sumto z negatiuo etiam x abeat in $-x$; tum vero sit P functio quaecunque par ipsius z, at Q eiusdem functio impar quaecunque; ac manifestum est etiam hanc formam: $p = \frac{P - Q}{P + Q}$ satisfacere. Vbi notasse iuuabit, hanc formam aeque late patere ac potestates eius quascunque; quandoquidem quaelibet euolutae continent vel functiones pares vel impares, vbi pares seorsim sumtae, ac denique impares ad hanc ipsam formam reducuntur. Hinc ergo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}$, vnde statui poterit

$$dx = M\, dz\, (P + Q) \text{ et } dy = M\, dz\, (P - Q),$$

vbi autem quantitas M ita debet esse comparata, vt prodeat x functioni impari ipsius z aequalis. Quod quo facilius impetrari possit sumamus $M = R\, (P - Q)$, existente R functione pari ipsius z; sic enim fiet

$$dx = R\, dz\, (PP - QQ) \text{ et } dy = R\, dz\, (PP - 2PQ + QQ),$$

 vbi

vbi cum sit $PP - QQ$ functio par ipsius z, valor pro x sponte euadet functio impar. Obtinebitur igitur:

$$x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz.$$

Facillime autem nunc pro P, Q, R eiusmodi functiones assignare licebit, vt singulae hae formulae fiant integrabiles. Veluti si earum loco potestates ipsius z accipiantur, vel etiam formulae rationales integrae quaecunque.

De parabola cubicali secunda

tanquam simplicissima curua Problemati satisfaciente.

§. 11. Simplicissimus casus hinc deducetur si sumatur $P = a$ et $Q = -z$, vnde fit

$$x = \int aaR\,dz - \int zzR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int aaR\,dz + 2\int azR\,dz + \int zzR\,dz.$$

Nunc porro sumamus $R = \frac{1}{bb}$, et integrando prodibit

$$bbx = aaz - \tfrac{1}{3}z^3 \text{ et } bby = aaz + azz + \tfrac{1}{3}z^3.$$

Vbi tantum opus est quantitatem z eliminare, vt aequatio inter coordinatas x et y obtineatur, id quod per sequentes operationes commodissime expedietur.

§. 12. Addantur duae aequationes inuentae, vt prodeat haec:

$$bb(x + y) = 2aaz + azz, \text{ vnde fit}$$

$$zz + 2az = \tfrac{bb}{a}(x + y),$$

ideoque

ideoque (addendo vtrinque aa) prodibit

$$(z+a)^2 = aa + \frac{bb}{a}(x+y).$$

Ponatur breuitatis gratia

$$aa + \frac{bb}{a}(x+y) = \frac{bbv}{a},$$

ita vt fit $v = x + y + \frac{a^3}{bb}$, eritque $z = b\frac{\sqrt{v}}{a} - a$.

Cum igitur fit

$$bbx = \frac{z}{3}(3aa - zz), \text{ fiue}$$

$$3bbx = z(3aa - zz) = -2a^3 - \frac{b^3 v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} + 3bvv$$

erit

$$b^3\frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = -2a^3 + 3bb(v-x) = a^3 + 3bby.$$

§. 13. Ponatur breuitatis gratia $\frac{a^3}{bb} = 3c$, fiue $a^3 = 3bbc$, et noftra aequatio tranfibit in hanc:

$$b\frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = 3(c+y)$$

et quia $bb = \frac{a^3}{3c}$, erit $b = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3c}}$; quo valore fubftituto aequatio noftra erit

$$v\sqrt{\frac{v}{3c}} = 3(c+y).$$

Vnde patet, hanc curvam ad parabolam cubicalem fecundam quodammodo referri poffe.

§. 14. Ad hoc clarius oftendendum fit AB nofter axis et M punctum quodcunque in curua, vnde ad axem AB ducatur recta MU, ita vt fit angulus MUB $= 2\alpha$, eritque AU = PM $= y$ et UM = AP $= x$. Iam cum fit $v = x + y + 3c$, prolongetur recta BAD ita, vt fit AD $= 3c$ ideoque DU $= y + 3c$. Nunc ex D ducatur recta DT, ita vt, MU producta in T, fiat UT = UD, Tab. I Fig. 3.

ideoque

ideoque $TM = x + y + 3c = v$. Quia igitur triangulum DUT est isosceles, erunt anguli UTD et UDT aequales $= 90^\circ - \alpha$. Hinc ergo erit

$$DU : DT = \operatorname{cos.} \alpha : \operatorname{sin.} 2\alpha = 1 : 2 \operatorname{sin.} \alpha,$$

vnde cum sit $AU = y$, capiatur $AE = \frac{1}{3} AD$, eritque

$$DE = EF = 2c \text{ et } EU = y + c.$$

Nunc ex E ipsi UT agatur parallela EF, eritque

$$EU : FT = 1 : 2 \operatorname{sin.} \alpha;$$

quare si vocemus rectam $FT = t$; erit $y + c : t = 1 : 2 \operatorname{sin.} \alpha$, vnde colligitur $y + c = \frac{t}{2 \operatorname{sin.} \alpha}$.

§. 15. His praemissis punctum curuae M referamus ad has duas coordinatas: $FT = t$ et $TM = v$, eritque aequatio nostra $\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{3c}} = \frac{3t}{2 \operatorname{sin.} \alpha}$, siue aequatio inter t et v nunc erit $\frac{v^3}{3c} = \frac{9tt}{4 \operatorname{sin.} \alpha^2}$, siue $v^3 = \frac{27ctt}{4 \operatorname{sin.} \alpha^2}$. Vnde patet, hanc curuam recte vocari parabolam cubicalem secundam, si modo applicatae MT ad abscissas FT inclinentur angulo $FTM = 90^\circ - \alpha$, cui etiam aequalis est angulus DFE. Atque ex hac aequatione facile erit curuam quaesitam describere.

Tab. I. Fig. 4. §. 16. Producamus rectam FE in infinitum, quam instar axis spectemus, ad eamque ex quouis puncto curvae M ducamus rectam MV ipsi FT parallelam, vt angulus FVM sit $90^\circ - \alpha$, eritque nunc abscissa $FV = v$ et applicata $VM = t$, quae per abscissam ita definitur, vt sit $t = 2v \operatorname{sin.} \alpha . \sqrt{\frac{v}{27c}}$. Vnde patet singulis abscissis FV geminam respondere applicatam $VM = t$ et $VM = -t$;

curua

curua igitur duobus conſtabit ramis in puncto T cuſpidem conſtituentibus, vbi recta F V vtrumque ramum tangit. Ambo autem rami in infinitum excurrent, dum ſcilicet abſciſſae FV in infinitum augentur.

§. 17. Deſcripta igitur tali curua ex aequatione $v^3 = \frac{27\,c\,t\,t}{4\,\sin.\alpha^2}$, eius parametrum vocemus more ſolito $= f$, vt ſit $v^3 = f\,t\,t$, eritque $\frac{27\,c}{4\,\sin.\alpha^2} = f$, ideoque $c = \frac{4\,f\,\sin.\alpha^2}{27}$, ita vt ex cognita parametro f vna cum angulo $90° - \alpha$, ſub quo applicata V M ad abſciſſam F V inclinatur, innoteſcat valor ipſius c. Quo notato capiatur a puncto F interuallum $\text{F E} = 2\,c = \frac{8\,f\,\sin.\alpha^2}{27}$, et ex hoc puncto E agatur recta E B, ita vt fiat angulus $\text{V E B} = 2\,\alpha$, eritque haec recta E B axis conuerſionis pro traiectoria, atque curua circa hunc axem conuerſa et ſecundum directionem axis promota ſe inuicem ſecabit vbique ſub angulo $= 2\,\alpha$, id quod non parum mirum videbitur, cum ad dextram exigua exiſtat portio curuae, quae inuerſa non toti arcui ad ſiniſtram ſito occurrere poſſe videtur.

§. 18. Vt huic dubio occurramus, ex M ducatur recta axi parallela MS, ita vt ſit angulus $\text{VSM} = 90° - \alpha$, erit angulus $\text{S M V} = 90° - \alpha$, ideoque $\text{M S} = \text{S V}$; vnde cum ſit $\text{V M} = t$, erit $\text{S V} = \text{S M} = \frac{t}{2\,\sin.\alpha}$. Hinc cum ſit $\text{F V} = v$, erit interuallum $\text{F S} = v - \frac{t}{2\,\sin.\alpha}$, vnde ob $t = \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$ erit hoc ſpatium $\text{F S} = v - \frac{v\sqrt{v}}{2\,\sin.\alpha\,.\,\sqrt{f}}$, quod, dum quantitas v continuo augetur, neutiquam in infinitum excreſci poteſt, ſed potius tandem accipiet ſitum negatiuum. Vnde patet, hoc interuallum non vltra certum terminum

 vsque

vsque excresci posse. Ad quem terminum inueniendum differentiale huius formulae nihilo aequetur, atque obtinebitur haec aequatio: $1 - \frac{3\sqrt{v}}{4\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f}} = 0$, vnde fit

$$\sqrt{v} = \tfrac{4}{3}\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f} \text{ et } v = \tfrac{16}{9} f\,\text{fin.}\,\alpha^2.$$

Hinc igitur maximum istud spatium reperietur $= \frac{16}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$. Cum igitur esset $FE = \frac{8}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$; patet, spatium hoc maximum FS praecise duplum esse spatii FE, ita vt fit ES = FE. Quia igitur curua FM non vltra hanc rectam SM porrigitur, necesse est vt curua in puncto M rectam SM tangat; vnde patet, totum ramum curvae EM a portione EF in situm inuersum translata in omnibus punctis secari posse; et quia ramus vlterior vltra M protensus continuo magis ad sinistram vergit, ex eo intelligitur, singulis punctis vtriusque rami respondere puncta correspondentia, siue in eodem ramo siue in altero, quae in intersectione conuenire queant. Haec igitur curua talem
Tab. I. Fig. 5. habebit formam, vti in hac figura repraesentatur, vbi plura puncta correspondentia pluribus litteris insigniuimus; scilicet punctum a, vbi curua per axem transit, sibi ipsi respondet; tum vero punctis b, c, d, etc. respondent puncta b', c', d', etc. Vnde patet, nullam huius curuae per ambos ramos in infinitum excurrentis portionem esse otiosam, vti olim Geometris erat visum, sed cuilibet puncto vbicunque accepto respondere punctum determinatum sibi socium.

§. 19. Haec igitur curua tertii ordinis sine dubio est simplicissima linea traiectoria reciproca algebraica: infinitas autem alias ex iisdem generalibus, quas dedimus, scilicet $x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz$ et

$y =$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz$$

eliciuntur, ſi modo loco P et Q functiones pares ipſius z accipiantur, loco Q autem functio impar; ita tamen, vt ſingulae hae formulae integrationem admittant; cui quidem conditioni facillime ſatisfieri poteſt. Vt caſus ſaltem ſimpliciores eruamus, denotent litterae m et n numeros pares, littera vero i imparem, et ſtatuamus $P = fz^m$, $Q = gz^i$ et $R = z^n$, ex quibus valoribus orientur ſequentes formulae pro x et y:

$$x = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1} \text{ et}$$

$$y = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{2fgz^{m+n+i+1}}{m+n+i+1} + \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}.$$

Hic autem imprimis eſt monendum, ſimulac pro litteris m, n et i maiuſculi numeri accipiantur, tum eliminando litteram z aequationem inter x et y ad plurimas dimenſiones exſurgere, atque adeo eliminationem nequidem expediri poſſe.

§. 20. Interim tamen, quicunque valores idonei functionibus P, Q, R tribuantur, vt curuae algebraicae reſultent: tamen omnes hae ſolutiones tantum pro particularibus ſunt habendae, cum ſine dubio innumerabiles aliae dentur curuae algebraicae quaeſtioni ſatisfacientes, quae tamen in his caſibus non contineantur. Quamobrem merito deſideratur eiusmodi methodus generalis, quae omnes plane curuas algebraicas in ſe complectatur; atque talem methodum iam ante plures annos communicaui, quam hic repetere ſuperfluum foret. Verum tamen eandem ex principiis maxime diuerſis, viaque longe ſimpliciori,

ciori, hic adiungam, quae ita eſt comparata, vt ad alia inſignia inuenta ducere poſſe videatur.

Methodus generalis

inueniendi traiectorias reciprocas algebraicas.

§. 21. Primum igitur obſeruo, formulam ſimplicem ipſo initio inuentam $p = \frac{P + Q}{P - Q}$, ita late patere, vt reliquas magis compoſitas, quas exhibuimus, in ſe complectatur, cum facta euolutione tam numerator quam denominator reducatur ſiue ad ſummam ſiue ad differentiam binarum formularum, quarum altera ſit functio par, altera vero impar ipſius z. Nunc igitur cum $\frac{Q}{P}$ ſit etiam functio impar, faciamus $Q = Pq$, fietque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + q}{1 - q}$, vbi q denotat functionem imparem ipſius z. Neceſſe igitur eſt vt etiam x fiat functio impar ipſius q, quamobrem hanc formulam ita exhibeamus: $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + q)^2}{1 - qq}$, vt denominator euadat functio par ipſius q.

§. 22. Cum igitur debeat eſſe

$$dx : dy = 1 - qq : (1 + q)^2,$$

ſtatuamus:

$$dx = dS(1 - qq) \text{ et } dy = dS(1 + q)^2,$$

eritque per notam formularum integralium reductionem:

$$x = S(1 - qq) + 2\int Sq\,dq \text{ et}$$
$$y = S(1 + q)^2 - 2\int S\,dq(1 + q),$$

vbi patet, functionem S eſſe debere imparem ipſius q, vt etiam x talis prodeat functio. Hoc igitur modo rem perduximus

duximus ad formulas integrales $\int S q\, dq$ et $\int S\, dq\, (1+q)$, quas integrabiles reddi oportet. Hunc in finem statuamus $S = \frac{dT}{dq}$, et nunc T esse oportet functionem parem; vnde eadem adhibita reductione fit

$$\int S q\, dq = \int q\, dT = qT - \int T\, dq \text{ et}$$
$$\int S\, dq\, (1+q) = T(1+q) - \int T\, dq;$$

sicque totum negotium huc est perductum, vt $\int T\, dq$ integrabilis reddatur. Ponatur igitur $T = \frac{dV}{dq}$, vbi patet, V esse debere functionem imparem ipsius q, sicque erit $\int T\, dq = V$. Hoc igitur modo omnia ad integrabilitatem sunt perducta.

§. 23. Tota ergo Solutio huc redit, vt pro V functionem quamcunque imparem ipsius q accipere liceat. Et cum posuerimus $T = \frac{dV}{dq}$, sumto elemento dq constante erit $dT = \frac{ddV}{dq}$, hincque $S = \frac{ddV}{dq^2}$; quibus valoribus substitutis ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \frac{ddV\,(1-qq)}{dq^2} + \frac{2q\,dV}{dq} - 2V \text{ et}$$
$$y = \frac{ddV\,(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2\,dV}{dq} + 2V.$$

Quin igitur in his formulis omnes plane curuae algebraicae contineantur dubitari nullo modo potest, quando quidem littera V omnes plane functiones impares ipsius q, siue rationales, siue vtcunque irrationales complectitur.

§. 24. Statuamus, vt exemplum facillimum afferamus, $V = q^n$, denotante n numerum quemcunque imparem, siue integrum siue fractum, puta $\frac{\mu}{\nu}$; vbi scilicet tam μ quam ν debent esse functiones impares. Erit igitur

 dV

$$\frac{dV}{dq} = n q^{n-1} \text{ et } \frac{ddV}{dq^2} = n(n-1) q^{n-2},$$

vnde coordinatae ita se habebunt:

$$x = n(n-1) q^{n-2} (1 - qq) + 2 n q^n - 2 q^n$$
$$= n(n-1) q^{n-2} - (n-1)(n-2) q^n,$$
$$y = n(n-1) q^{n-2} + 2n(n-2) q^{n-1} + (n-1)(n-2) q^n,$$

ac si sumsissemus $V = a q^n$, prodiisset

$$x = n(n-1) a q^{n-2} - (n-1)(n-2) a q^n \text{ et}$$
$$y = n(n-1) a q^{n-2} + 2n(n-2) a q^{n-1} + (n-1)(n-2) a q^n.$$

§. 25. Hinc igitur patet, si poneremus

$$V = a q^m + b q^n + c q^k, \text{ etc.}$$

exponentibus m, n, k existentibus numeris imparibus, tum prodituros fuisse hos valores:

$$x = m(m-1) a q^{m-2} - (m-1)(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} - (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} - (k-1)(k-2) c q^k.$$

$$y = m(m-1) a q^{m-2} + 2m(m-2) a q^{m-1} + (m-1 (m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} + 2n(n-2) b q^{n-1} + (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} + 2k(k-2) c q^{k-1} + (k-1)(k-2) c q^k.$$

§. 26. Hinc intelligitur, statim ac duae pluresue traiectoriae reciprocae fuerint inuentae, ex iis facile infinitas alias deriuari posse. Ita si fuerint X et Y tales functiones ipsius q, vt traiectoriam reciprocam exhibeant; similique modo etiam inuentae fuerint coordinatae X′ et Y′, tum vero etiam X″ et Y″, quae scilicet omnes referantur ad eandem quantitatem q, siue ad eandem quantitatem p, quo-

quoniam est $p = \frac{1+q}{1-q}$, id quod euenit quando applicatae ad suas curuas sub eodem angulo inclinantur; tum ex iis noua curua formari poterit, sumendo

$$x = a\,X + b\,X' + c\,X'' + \text{etc.}$$
$$y = a\,Y + b\,Y' + c\,Y'' + \text{etc.}$$

id quod infinitis modis fieri poterit. Hic autem semper assumimus, angulum intersectionis esse $= 2\alpha$, et applicatas ad abscissas sub pari angulo esse inclinatas.

Alia methodus
Formulas generales pro curuis algebraicis eruendi.

§. 27. Quanquam autem formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$, latissime patet, atque etiam formulas $\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n}$, quin etiam productum ex similibus formulis, veluti:

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n} \cdot \frac{(R+S)^m}{(R-S)^m} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k} \text{ etc.}$$

in se complectitur: tamen dubium oriri potest, num hoc etiam locum habeat, si exponentes m, n et k fuerint numeri fracti, quoniam tum euolutio fieri nequit nisi per seriem infinitam. Methodum igitur adiiciam, qua etiam negotium pro formulis irrationalibus expediri potest; quod casu simpliciori sum ostensurus. Sit igitur $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$: vbi semper tenendum est, abscissam x esse debere functionem imparem ipsius q, quod quo facilius impetrari possit, formulam hoc modo repraesentemus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{\sqrt{(1-q\,q)}},$$

ac ponamus vt ante $dx = dS\sqrt{(1-qq)}$ ac $dy = dS(1+q)$ vbi euidens eſt, pro S ſumi debere functionem imparem ipſius q, vt ſcilicet x prodeat functio impar, quoniam $\sqrt{(1-qq)}$ tanquam functio par ſpectari poteſt. Adhibita igitur reductione fiet

$$x = S\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{S\,q\,dq}{\sqrt{(1-qq)}} \quad \text{et} \quad y = S(1+q) - \int S\,dq.$$

§. 28. Poſtremae formulae facillime ſatisfit ponendo $S\,dq = dT$, vt fiat $\int S\,dq = T$; ac manifeſtum eſt T eſſe debere functionem parem ipſius q. Quia igitur eſt $S = \frac{dT}{dq}$, erit primo

$$y = \frac{dT}{dq}(1+q) - T \quad \text{et} \quad x = \frac{dT}{dq}\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{q\,dT}{\sqrt{(1-qq)}};$$

ſicque iam applicata y algebraica eſt facta: pro abſciſſa autem fiet

$$\int \frac{q\,dT}{\sqrt{1-qq}} = \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - \int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

Statuatur igitur $\int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} = V$, fietque $T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$;

vbi perſpicuum eſt, pro V ſumi debere functionem imparem ipſius q. Hoc igitur modo abſciſſa x etiam redditur algebraica; erit enim

$$x = \frac{dT}{dq}(1-qq)^{\frac{1}{2}} + \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - V.$$

§. 29. Ambas igitur expreſſiones pro x et y per per ſolam functionem V exhibeamus; et cum ſit

$$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}, \text{ erit}$$

$$\frac{dT}{dq} = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3q\,dV}{dq}\sqrt{(1-qq)},$$

his

his valoribus ſubſtitutis habebimus:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{3qdV}{dq}(1-qq) + \frac{qdV}{dq}(1-qq) - V,$$

ſiue

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2qdV}{dq}(1-qq) - V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(+1q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq}(1+q)\sqrt{(1-qq)}$$

ſeu

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - (1+q)(1+2q)\frac{dV}{dq}\sqrt{(1-qq)}.$$

In his ergo formulis quoque infinities infinitae curuae algebraicae continentur, quoniam pro V functiones quascunque impares accipere licet.

§. 30. Vt rem exemplo illuſtremus, ſumamus $V = q$, eritque $\frac{dV}{dq} = 1$ et $\frac{ddV}{dq^2} = 0$, vnde fit

$$x = -2q(1-qq) - q = -3q + 2q^3 \text{ et}$$

$$y = -(1+q)(1+2q)\sqrt{(1-qq)}.$$

Ex hoc autem exemplo clarum eſt, hanc ſolutionem ex praecedente nullo modo deduci potuiſſe. Si enim ibi pro V aſſumeretur functio rationalis, tum etiam y prodiret rationalis: ſin autem pro V aſſumeretur functio irrationalis, ambae litterae x et y prodirent irrationales, cum tamen hoc caſu x ſit quantitas rationalis.

§. 31. Nunc igitur certi ſumus facti, priorem ſolutionem, etſi maxime generalis videbatur, tamen non omnes plane ſolutiones in ſe complecti; neque vero haec altera ſolutio pro generaliſſima eſt habenda, quia priorem non in ſe complectitur. Quamobrem adhuc generaliorem

ſolu-

solutionem hic subiungamus, quae quantitates irrationales quascunque in se comprehendat.

Methodus generalior traiectorias reciprocas algebraicas inueniendi.

§. 32. Denotet λ fractionem quamcunque, quae quidem sit rationalis, siquidem potestates, quarum exponentes sunt irrationales, non inter quantitates *algebraicas* referri, sed *interscendentes* appellari solent, ac proposita sit haec formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^\lambda}{(1-q)^\lambda}$, quam statim in hanc transformemus $\frac{dy}{dx} = r^\lambda$, statuendo scil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, eritque propterea $y = \int r^\lambda dx = r^\lambda x - \int r^{\lambda-1} x dr$, quam ergo postremam formulam integrabilem reddi oportet, ita tamen, vt x fiat impar ipsius q.

§. 33. Hunc in finem statuamus $\int r^{\lambda-1} x dr = \mathrm{T} r^\lambda$, sicque fiet $y = r^\lambda (x - \lambda \mathrm{T})$; ac vero facta differentiatione $r^{\lambda-1} x dr = r^\lambda d\mathrm{T}\, r^{\lambda-1} dr$, vnde colligitur

$$x = \frac{r\, d\mathrm{T}}{dr} + \lambda \mathrm{T}, \text{ ideoque } y = \frac{r^{\lambda+1} d\mathrm{T}}{dr}.$$

Hoc modo iam ambae coordinatae x et y redditae sunt algebraicae, ac problema foret solutum, si modo constaret, qualem functionem pro T accipi conueniat: eam autem ita comparatam esse oportet, vt inde prodeat $x =$ functioni pari ipsius q.

§. 34. Restituamus ergo loco r valorem assumtum $\frac{1+q}{1-q}$, ex quo erit $l\,r = l\,(1+q) - l\,(1-q)$, ideoque

$$\frac{d\,r}{r} = \frac{d\,q}{1+q} + \frac{d\,q}{1-q} = \frac{2\,d\,q}{1-q\,q} \text{ et } \frac{r}{d\,r} = \frac{1-q\,q}{2\,d\,q},$$

vnde fit

$$x = \left(\frac{1-q\,q}{2\,d\,q}\right) d\,T + \lambda\,T \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} \left(\frac{1-q\,q}{2\,d\,q}\right) d\,T.$$

Vbi cum x per duo membra exprimatur, notetur, si alterum fuerit functio par ipsius q, alterum fore functionem imparem. Unde patet loco T neque functionem parem neque imparem accipi posse, sed quantitatem ex duabus partibus constari debere; quarum altera sit functio par, altera impar.

§. 35. Statuamus $T = R + S$, vbi R denotet functionem parem, S vero imparem; et nunc habebimus

$$x = \frac{d\,R\,(1-q\,q)}{2\,d\,q} + \frac{d\,S\,(1-q\,q)}{2\,d\,q} + \lambda\,R + \lambda\,S,$$

quarum quatuor partium prima et quarta est impar, secunda vero ac tertia par; vnde partes secundam et tertiam nihilo aequari oportet, vt fiat

$$x = \frac{d\,R\,(1-q\,q)}{2\,d\,q} + \lambda\,S.$$

At vero posito

$$\frac{d\,S\,(1-q\,q)}{2\,d\,q} + \lambda\,R = 0$$

sponte fit $R = -\frac{d\,S\,(1-q\,q)}{2\lambda\,d\,q}$, ideoque functio par, vti requiritur; vnde cum sumto elemento $d\,q$ constante fit

$$d\,R = -\frac{d\,d\,S\,(1-q\,q)}{2\lambda\,d\,q} + \frac{q\,d\,S}{\lambda}, \text{ erit}$$

$$x = -\frac{d\,d\,S\,(1-q\,q)^2}{4\lambda\,d\,q^2} + \frac{q\,d\,S\,(1-q\,q)}{2\lambda\,d\,q} + \lambda\,S,$$

et

et quia eſt $T = R + S$, erit

$$dT = dR + dS = -\frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{dS(q+\lambda)}{\lambda},$$

quam ob rem habebimus

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{(1-qq)^2}{4\lambda dq^2}\, ddS - \frac{dS(q+\lambda)(1-qq)}{2\lambda dq}\right).$$

Dummodo ergo pro S capiatur functio impar ipſius q, hae formulae ſemper praebebunt trajectoriam reciprocam algebraicam.

§. 36. Hae autem formulae pluribus modis transformari poſſunt, dum ſcilicet loco S aliae functiones impares accipiuntur. Sumatur igitur $S = \frac{cV}{1-qq}$, exiſtente V functione impari, eritque

$$dS = \frac{cdV}{1-qq} + \frac{2cVqdq}{(1-qq)^2} \text{ et}$$

$$ddS = \frac{cddV}{1-qq} + \frac{4cqdqdV}{(1-qq)^2} + \frac{2cVdq^2}{(1-qq)^2} + \frac{8cVqqdq^2}{(1-qq)^3}$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperietur

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4\lambda dq^2} - \frac{cqdV}{2\lambda dq} + \frac{cV(2\lambda\lambda-1-qq)}{2\lambda(1-qq)} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{c(1-qq)}{4\lambda dq^2}\, ddV - \frac{c(\lambda-q)}{2\lambda dq}\, dV + \frac{c(qq-2\lambda q+1)}{2\lambda(1-qq)} V\right).$$

§. 37. Operae igitur pretium erit hinc caſum deducere quo $\lambda = 1$, quandoquidem haec ſolutio conuenire debet cum ea, quam ſupra (§. 23.) dedimus. Facto autem $\lambda = 1$ fiet

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4dq^2} - \frac{cqdV}{2dq} + \frac{cV}{2} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\left(\frac{c(1-qq)ddV}{4dq^2} - \frac{c(1-q)dV}{2dq} + \frac{cV(q-1)^2}{2(1-qq)}\right) \text{ ſiue}$$

$$y = -\frac{cddV(1+q)^2}{4dq^2} + \frac{cdV(1+q)}{2dq} - \frac{cV}{2},$$

quam-

quamobrem ſi ſumamus $c = -4$, reſultant hae formulae:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2qdV}{dq} - 2V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1+q)}{dq} + 2V$$

quae cum ſupra datis perfecte congruunt.

§. 38. Quo has formulas commodiores reddamus, faciamus $c = -4\lambda$, et ſumta pro V functione quacunque impari ipſius q, coordinatae traiectoriae ita ſatis ſuccincte exprimentur:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq) + \frac{2dV}{dq}.q - \frac{2V(2\lambda\lambda-1-qq)}{1-qq} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddV}{dq^2}(1-qq) - \frac{2dV}{dq}(\lambda-q) + \frac{2V(qq-2\lambda q+1)}{1-qq}\right).$$

Quin etiam formulis primo inuentis commodius vti licebit, ſi per -4λ multiplicentur. Ita denotante S functione quacunque impari ipſius q, coordinatae erunt:

$$x = \frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}q(1-qq) - 4\lambda\lambda S \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right).$$

§. 39. Quaecunque igitur functio idonea pro S accipiatur, ſemper fieri oportet $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$. Quod quomodo eueniat, et quemadmodum littera S penitus e calculo egrediatur, perſcrutari operae pretium erit. Differentiemus igitur primo valorem ipſius x, vt obtineamus

$$dx = \frac{d^3S}{dq^2}(1-qq) - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq).$$

Deinde quia y exprimitur producto, cuius prior factor eſt $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = r^\lambda$, poſito ſcil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, erit $d.r^\lambda = \lambda r^\lambda . \frac{dr}{r}$. Supra autem vidimus eſſe $\frac{dr}{r} = \frac{2dq}{1-qq}$, vnde pro hoc factore habebimus

$$d.\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} = 2\lambda\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\tfrac{dq}{1-qq},$$

quo notato nanciſcimur

$$dy = 2\lambda\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\tfrac{dq}{1-qq}\left(\tfrac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \tfrac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right)$$
$$+\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left[\tfrac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \tfrac{2ddS}{dq}(3q+\lambda)(1-qq)\right.$$
$$\left. - 2dS(1-2\lambda q-3qq)\right]$$

quae duae partes contractae praebent

$$dy = \left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left[\tfrac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \tfrac{6ddSq(1-qq)}{dq} - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq)\right]$$

vnde manifeſto fit $dy = \left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}dx$, vti conditio praeſcripta poſtulat.

§. 40. Hic igitur caſus omni attentione dignus ſe offert formulae huius differentialis tertii gradus:

$$\tfrac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \tfrac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq),$$

quae non ſolum ipſa per ſe eſt integrabilis, quandoquidem eius integrale dat valorem ipſius x, ſed etiam per formulam $\left(\tfrac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}$ multiplicata etiamnunc manet integrabilis, ſiquidem eius integrale praebet valorem ipſius y; vnde quaeſtio maximi momenti in analyſi naſcitur: *Quomodo formulae differentiales cuiuscunque gradus comparatae eſſe debeant, vt non ſolum ipſae ſint integrabiles, ſed etiam quando per quampiam functionem datam multiplicantur*; cuius quidem quaeſtionis ſolutio per methodum ante adhibitam eſt facillima.

§. 41. Vt has formulas exemplo ſimpliciſſimo illuſtremus, ſumamus $S = q$ et coordinatae noſtrae traiectoriae erunt

$$x = -2(1+2\lambda\lambda)q + 2q^3 \text{ et}$$

$y =$

$$y = -2 \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda (q+\lambda)(1-qq);$$

siue per -2 diuidendo erit

$$x = (1+2\lambda\lambda)q - q^3 \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda (q+\lambda)(1-qq).$$

Facile autem apparet, quaecunque fractio pro exponente λ accipiatur, eliminationem quantitatis q ad aequationem altissimi gradus perducere. Sin autem sumatur $\lambda = 0$, manifesto prodit $x = q - q^3$ et $y = q(1-qq)$, ideoque $y = x$; quae est aequatio pro linea recta; quod autem non solum hoc casu valet, sed etiam formulae generales posito $\lambda = 0$ semper praebent $y = x$. Methodus igitur hoc articulo tradita omnes plane traiectorias algebraicas in se continere est censenda, quatenus scilicet pro λ fractionem quamcunque accipere licet.

Singularis constructio
traiectoriarum reciprocarum, ope rectificationis curuarum.

§. 42. Constituto axe conuersionis A B, circa quem traiectoria conuersa et iuxta directionem axis promota se ipsam vbique sub dato angulo $= 2\alpha$ intersecet, ipsi in puncto quocunque A iungatur recta E F ad angulum E A B $= 2\alpha$ inclinata, in qua capiantur abscissae A P $= x$, quibus respondeant applicatae axi parallelae P M $= y$; ac posito $dy = p\,dx$, vidimus, totum negotium huc redire, vt fiat p functio reciproca abscissae x. Viciſſim igitur abscissa x talis esse debet functio ipsius p, vt, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, valor ipsius x euadat sui negatiuus, seu abeat in $-x$; cuiusmodi functiones facile innumeras excogitare licet, qua- Tab. I. Fig. 6.

rum

rum simplicissima est talis: $x = \frac{a(pp-1)}{p}$, quippe quae formula, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, fit $\frac{a(1-pp)}{p} = -x$.

§. 43. Haec autem formula generalior reddi potest introducendo nouam variabilem t, quae sit functio quaecunque impar ipsius x. Tum enim si statuatur $t = \frac{a(pp-1)}{p}$, quoniam, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, quantitas t abit in $-t$, etiam abscissa x abit in $-x$. Quo notato ponamus pro nostro instituto $t = \frac{pp-1}{2p}$, vnde fit $p = t + \sqrt{(tt+1)}$. Quia igitur est $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dy = t\,dx + dx\sqrt{(tt+1)}$ ideoque $y = \int t\,dx \int dx \sqrt{(tt+1)}$. Hic autem euidens est, si denotet $\int t\,dx$ applicatam curuae obthogonalem abscissae x respondentem, tum $\int dx\sqrt{(tt+1)}$ exprimere arcum eiusdem curuae.

§. 44. Sit igitur E T C t F talis curua super recta E F per coordinatas orthogonales P T descripta, cuius ergo punctum C immineat initio abscissarum A, atque abscissae A P $= x$ respondeat applicata orthogonalis P T $= \int t\,dx$, eritque arcus C T $= \int dx\sqrt{(tt+1)}$; quocirca pro traiectoria hinc construenda tantum capi debet eius applicata obliquangula P M $= y =$ P T $+$ C T, et punctum M erit in traiectoria, si modo t fuerit functio impar ipsius x. Vnde patet, hanc nouam curuam E T C t F non penitus arbitrio nostro relinquere. Quomodo autem ea debeat esse comparata haud difficulter definietur.

§. 45. Quoniam enim t est functio impar ipsius x, euidens est, formulam integralem $\int t\,dx$ fore functionem parem

parem ipsius x; ita vt in eadem curua abscissae negatiuae $AP = -x$ respondeat applicata $pt = PT$ pariter in eandem plagam directa. Vnde patet, curuam hanc $ETCtF$ ita comparatam esse debere, vt recta AC eius sit diameter orthogonalis, eiusque portiones CTE et CtF inter se sint perfecte aequales et similes. Quo obseruato omnes plane curuae huius indolis ad nostrum institutum erunt accommodatae. Ex qualibet enim huiusmodi curua traiectoria pro quouis intersectionis angulo $= 2\alpha$ facillime construi poterit: dummodo obseruetur, si arcus CT pro positiuo habeatur, ita vt capiatur $PM = PT + CT$, tum arcus ad alteram partem cadentes Ct pro negatiuis esse habendos, ita vt ibi applicata traiectoriae pm sumi debeat $= pt - Ct$. Atque haec est constructio illa elegantissima, quam olim Celeberr. *Ioannes Bernoullius* primus inuenerat.

§. 46. Huius constructionis ope etiam eiusmodi traiectoriae describi possunt, quae pluribus axibus conuersionis, atque adeo pro eodem intersectionis angulo sunt praeditae. Tantum enim opus est pro curua ECF eiusmodi figuram accipi, quae plures habeat diametros AC, $A'C'$; ac; etc. ac huiusmodi curua est cyclois: eique innumerabiles aliae similes exhiberi possunt. Tum enim, si modo descripto ex tali curua traiectoria construatur, eius non solum recta AB, sed etiam omnes rectae $A'B'$, ab, quarum quidem numerus est infinitus, pariter erunt axes conuersionis. Tab. I. Fig. 7.

De aliis formulis,
ex quibus pariter innumeras traiectorias reciprocas elicere licet.

§. 47. Ex praecedente constructione manifestum est, si curua in subsidium vocata E C F non solum fuerit algebraica, sed etiam rectificationem admittat; tum traiectorias inde descriptas quoque fore algebraicas. At vero formula principalis, vnde has constructiones deduximus, quae erat $x = \frac{a(pp-1)}{p}$ ita tractari potest, vt etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibeat.

§. 48. Cum enim etiam talis formula generalior $x = \frac{a(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}}$ pariter praescripta proprietate sit praedita, vt, posito $\frac{1}{p}$ loco p, abscissa x abeat in sui negatiuum, quoniam est

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp, \text{ erit}$$

$$y = px - a\int \frac{dp(p^{2\lambda}-1)}{p^{\lambda}} = px - \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda},$$

quae expressio etiam est algebraica, dum ne sit vel $\lambda = 1$ vel $\lambda = -1$, quippe quibus casibus integratio inuolueret logarithmos.

§. 49. Sumto igitur pro λ numero quocunque, exceptis casibus $\lambda = \pm 1$, constructio traiectoriae ita se habebit, vt sumta abscissa $x = ap^{\lambda} - ap^{-\lambda}$ fiat applicata

$$y = \frac{\lambda}{\lambda+1}ap^{\lambda+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}ap^{1-\lambda}.$$

Neque

Neque vero hinc difficile erit variabilem p eliminare, vt obtineatur aequatio algebraica inter x et y. Posito enim commodi ergo $a = \frac{b}{2}$, vt fiat $p^{2\lambda} = \frac{2xp^\lambda}{b} + 1$, inde fit

$p^\lambda = \frac{x \pm \sqrt{(xx + bb)}}{b}$, ideoque

$$p = \left(\frac{x \pm \sqrt{xx + bb}}{b}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Vbi, si loco $\frac{1}{\lambda}$ scribatur n et loco p iste valor substituatur, eaedem prodeunt formulae supra (§. 8.) erutae.

§. 50. Non solum autem abscissa x vnicae tali formulae $\frac{a(p^{2\lambda} - 1)}{p^\lambda}$ aequalis poni potest, sed etiam pluribus talibus formulis simul sumtis: veluti

$$x = a(p^\lambda - p^{-\lambda}) + b(p^\mu - p^{-\mu}) + c(p^\nu - p^{-\nu}) \text{ etc.}$$

Perspicuum enim est, si in hac expressione loco p scribatur $\frac{1}{p}$, loco x proditurum esse $-x$. Hinc autem colligetur

$$\int x\,dp = \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{bp^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{cp^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{cp^{1-\nu}}{1-\nu}.$$

Et cum sit $y = px - \int x\,dp$, erit simili modo vt supra est factum

$$y = \frac{\lambda a}{\lambda+1}p^{\lambda+1} + \frac{\lambda a}{1-\lambda}p^{1-\lambda} + \frac{\mu a}{\mu+1}p^{\mu+1} + \frac{\mu a}{1-\mu}p^{1-\mu} + \frac{\nu a}{\nu+1}p^{\nu+1} + \frac{\nu a}{1-\nu}p^{1-\nu}.$$

Atque has formulas pro lubitu multiplicare licebit, ex iisque quouis casu satis commode traiectoriae describi poterunt, dum pro quouis valore litterae p tributo valores vtriusque coordinatae x et y computari possunt. At vero multo

multo difficilius erit, ipſam litteram p ex calculo elidere, vt pateat, ad quemnam ordinem linearum curua ſit referenda.

§. 51. Quin etiam has formulas adhuc generaliores reddere licet. Si enim litterae i, m, n denotent numeros impares, poni poterit

$$x = a\,(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} + b\,(p^{\mu} - p^{-\mu})^{m} + c\,(p^{\nu} - p^{-\nu})^{n}.$$

Manifeſtum enim eſt, ſingula haec membra, dum loco p ſcribitur $\frac{1}{p}$, in valores negatiuos conuerti, propterea quod exponentes i, m, n ſunt impares. Tum vero quia hic exponentes ſupponuntur numeri integri, ſi ſingula membra euoluantur, integrale formulae $\int x\,dp$ facile exhiberi poterit, id quod pro vnico membro oſtendiſſe ſufficiet. Cum enim ſit

$$(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} = p^{i\lambda} - \tfrac{i}{1} p^{(i-2)\lambda} + \tfrac{i(i-1)}{1.\,2} p^{(i-4)\lambda} - \tfrac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3} p^{(i-6)\lambda} \text{ etc.}$$

erit

$$\int x\,dp = \tfrac{a}{i\lambda+1} p^{i\lambda+1} - \tfrac{i\,a}{1\,(i-2)\lambda+1} p^{(i-2)\lambda+1} + \tfrac{i(i-1)\,a}{1.\,2\,(i-4)\lambda+1} p^{(i-4)\lambda+1}.$$

Hincque cum ſit $y = p\,x - \int x\,dp$, deſcriptio curuae in promptu erit, id quod etiam perinde ſe habet, ſi plura huiusmodi membra fuerint accepta.

§. 52. Atque hoc modo fere omnia ſatis ſuccincte ſumus complexi, quae olim circa traiectorias reciprocas fuſius reperiuntur expoſita et inuenta. Methodus autem, qua hic vſus ſum, tam plana et aequabilis videtur, vt maior ſimplicitas deſiderari nequeat. Vbi imprimis notari

tari meretur, quod omnes ſolutiones, quas dedimus, ad omnes plane traiectorias tam rectangulas quam obliquangulas aequo ſucceſſu applicari poſſint. Praeterea vero formulae generales pro curuis algebraicis hic prorſus de nouo adiectae ſunt cenſendae: cum illo quidem tempore, quo hoc argumentum eſt tractatum, nemo de talibus formulis generalibus cogitauerit. Quamobrem neminem poenituiſſe confido, qui hoc argumentum, nunc fere penitus oblitum, denuo perluſtrauerit.