University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works Euler Archive

1786

De descensu baculi super hypomochlio cylindro fixo delabentis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation
Euler, Leonhard, "De descensu baculi super hypomochlio cylindro fixo delabentis" (1786). *Euler Archive - All Works*. 603.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/603

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE

DESCENSV BACVLI

SVPER HYPOMOCHLIO CYLINDRICO FIXO DELABENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Referat tabula planum verticale, in quo detur circulus $C c A$, sectionem circuli horizontalis fixi exhibens, super quo baculus $F f G g$ incumbens delabatur, qui elapso tempore t situm teneat in figura repraesentatum, vbi circulum tangat in puncto A, ita vt, ducta per centrum circuli C recta verticali $c C P$, baculus ab ea declinet angulo $c C A = \Phi$, ac ponatur radius huius circuli seu cylindri $C A = a$. Tum vero reperiatur baculi centrum grauitatis in M, vnde intra baculum secundum longitudinem ducatur recta $M B$, ita vt interuallum $A B$ referat semicrassitiem baculi, quae vocetur $A B = b$, at breuitatis gratia ponatur distantia $C B = a + b = c$. Praeterea vero vocetur distantia $M B = s$, ex Tab. I. Fig. 10.

qua

qua intelligitur, quovsque baculus labendo iam peruenerit; quandoquidem manifeſtum eſt, ſi tam angulus $cCA = \Phi$ quam iſtud interuallum $MB = s$ euaneſcerent, tum baculum in puncto c cylindro incumbere et in aequilibrio fore conſtitutum. Quibus poſitis quaeſtio huc redit, vt ad datum quoduis tempus t tam angulus Φ quam interuallum s aſſignari poſſit.

§. 2. Longitudinem baculi hic non in computum duco, quoniam per ſe euidens eſt, cum eius ſuperior terminus F cylindrum fuerit praetergreſſus, tum motum, cuius inueſtigatio hic nobis eſt propoſita, eſſe ceſſaturum, et baculum per ſolam grauitatem deorſum delapſurum. At vero in calculum potiſſimum ingreditur maſſa ſeu pondus totius baculi, quod littera M deſignetur, quo ergo centrum grauitatis M verticaliter deorſum nitetur. Praeter hanc vero vim baculus quoque ſuſtinet preſſionem, qua in puncto A ad cylindrum apprimitur, et qua cylindrus in baculum ſecundum directionem A B reagit, quae, quia non aliter niſi toto calculo abſoluto determinari poteſt, tantiſper littera Π indicetur, ita vt iam baculus a duabus viribus ſollicitari ſit cenſendus: altera ſcilicet, qua centrum grauitatis M deorſum vrgetur, quam poſuimus $= M$; altera vero, qua in puncto A ſecundum directionem A B ad baculum normalem repellitur, quamque poſuimus $= \Pi$. Inſuper autem, niſi tam cylindrus quam baculus habeat ſuperficiem perfectiſſime politam in A, vbi baculus ſuper cylindro prorepit, dabitur frictio certae parti preſſionis Π aequalis, quae ſtatuatur $= \lambda \Pi$, cuius directio erit recta A F. Denique ad motum gyratorium, quo baculus ciebitur, definiendum, ſit eius momenmentum inertiae respectu axis horizontalis per centrum grauitatis M transeuntis $= M k k$.

§. 3. Quo autem motus, quem istae vires in baculo generabunt, per principia mechanica determinari possit, eum ad binas directiones fixas reuocari oportet; quem in finem ad rectam verticalem c C P ex M normaliter ducatur recta horizontalis M P, ita vt situs puncti M determinetur per has duas coordinatas: $CP = x$ et $PM = y$, quibus scilicet opus est ad motum progressiuum centri grauitatis M inuestigandum. Pro motu autem gyratorio perspicuum est, praesentem baculi inclinationem ad horizontem aequalem esse ipsi angulo $cCA = \Phi$, qui, vti facile intelligitur, a viribus sollicitantibus continuo augetur.

§. 4. Hic autem primo videndum est, quomodo binae coordinatae x et y per binas variabiles stabilitas Φ et s determinentur. Vbi quidem facile patet, fore

$$CP = x = s \sin.\Phi - c \cos.\Phi \text{ et}$$
$$PM = y = s \cos.\Phi + c \sin.\Phi.$$

Deinde autem ad has duas directiones etiam vires sollicitantes reduci conuenit. Ac primo quidem vis grauitatis iam secundum ipsam directionem C P agit: at vis $AB = \Pi$ per resolutionem praebet vim sursum tendentem $\Pi \cos.\Phi$, et vim secundum P M agentem $= \Pi \sin.\Phi$; tertia vero vis frictionis $\lambda \Pi$ etiam vim praebet sursum vrgentem $= \lambda \Pi \sin.\Phi$ et vim horizontalem retro secundum M P agentem $= \lambda \Pi \cos.\Phi$, sicque pro motu progressiuo centri grauitatis determinando secundum directionem verticalem C P habebimus totam vim $= M - \Pi \cos.\Phi - \lambda \Pi \sin.\Phi$ et secundum directionem $PM = \Pi \sin.\Phi - \lambda \Pi \cos.\Phi$. Iam vero

vero ex his viribus deducuntur sequentes binae aequationes differentio-differentiales:

$$\text{I. } \frac{M\,ddx}{2g\,dt^2} = M - \Pi \operatorname{cos.}\Phi - \lambda \Pi \operatorname{sin.}\Phi;$$

$$\text{II. } \frac{M\,ddy}{2g\,dt^2} = \Pi \operatorname{sin.}\Phi - \lambda \Pi \operatorname{cos.}\Phi;$$

vbi elementum temporis dt sumtum est constans, et litera g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, siquidem tempora in minutis secundis exprimere velimus.

§. 5. Deinde vero pro motu gyratorio determinando colligi debent momenta virium sollicitantium respectu centri grauitatis M, vbi quidem ex pondere M nullum momentum oritur. Ex pressione autem Π secundum directionem MB agente momentum nascitur $= \Pi\, MB = \Pi s$, quo inclinatio ad horizontem augebitur. Ex frictione vero $\lambda\Pi$ secundum directionem AF vrgente nascetur momentum $\lambda \Pi\, Mm = \lambda \Pi b$, quo adhuc inclinatio augeri est censenda. Atque hinc secundum principia motus, habebitur sequens aequatio differentialis secundi gradus:

$$\text{III. } \frac{Mkk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = \Pi s + \lambda \Pi b.$$

§. 6. Ante omnia igitur ex duabus prioribus aequationibus elidi oportet binas coordinatas x et y; quare cum posuerimus

$x = s \operatorname{sin.}\Phi - c \operatorname{cos.}\Phi$, erit

$dx = ds \operatorname{sin.}\Phi + s\,d\Phi \operatorname{cos.}\Phi + c\,d\Phi \operatorname{sin.}\Phi$ et

$$ddx = dds \operatorname{sin.}\Phi + 2\,ds\,d\Phi \operatorname{cos.}\Phi + s\,dd\Phi \operatorname{cos.}\Phi - s\,d\Phi^2 \operatorname{sin.}\Phi + c\,dd\Phi \operatorname{sin.}\Phi + c\,d\Phi^2 \operatorname{cos.}\Phi.$$

Simili

Simili modo cum sit

$$y = s \operatorname{cos}.\Phi + c \operatorname{sin}.\Phi, \text{ erit}$$

$$dy = ds \operatorname{cos}.\Phi - s d\Phi \operatorname{sin}.\Phi + c d\Phi \operatorname{cos}.\Phi \text{ et}$$

$$ddy = dds \operatorname{cos}.\Phi - 2 ds d\Phi \operatorname{sin}.\Phi - s dd\Phi \operatorname{sin}.\Phi$$
$$- s d\Phi^2 \operatorname{cos}.\Phi + c dd\Phi \operatorname{cos}.\Phi - c d\Phi^2 \operatorname{sin}.\Phi.$$

Quia autem hae formulae nimis sunt complicatae, quam vt in aequationes nostras priores eas induci consultum esset, per certas combinationes hinc concinniores formulas deriuemus; ac primo quidem erit

$$ddx \operatorname{sin}.\Phi + ddy \operatorname{cos}.\Phi = dds - s d\Phi^2 + c dd\Phi,$$

similique modo altera combinatio dabit

$$ddx \operatorname{cos}.\Phi - ddy \operatorname{sin}.\Phi = 2 ds d\Phi + s dd\Phi + c d\Phi^2.$$

§. 7. Pari vero modo binae aequationes priores inter se combinentur, ac prior combinatio dabit

$$\frac{M(ddx \operatorname{sin}.\Phi + ddy \operatorname{cos}.\Phi)}{2g dt^2} = M \operatorname{sin}.\Phi - \lambda \Pi,$$

altera vero combinatio producet

$$M(ddx \operatorname{cos}.\Phi - ddy \operatorname{sin}.\Phi) = M \operatorname{cos}.\Phi - \Pi.$$

Quodsi ergo in his aequationibus valores ante inuentos substituamus, binae aequationes priores in formas abibunt sequentes:

$$\text{I. } \frac{M dds - M s d\Phi^2 + M c dd\Phi}{2g dt^2} = M \operatorname{sin}.\Phi - \lambda \Pi;$$

$$\text{II. } \frac{2M ds d\Phi + M s dd\Phi + M c d\Phi^2}{2g dt^2} = M \operatorname{cos}.\Phi - \Pi;$$

quibus adiungi opportet tertiam iam ante inuentam

$$\text{III. } \frac{Mkk dd\Phi}{2g dt^2} = \Pi s + \lambda \Pi b.$$

§. 8.

§. 8. Tres igitur adepti ſumus aequationes, ex quibus etiam tres incognitas, ſcilicet s, Φ et Π definiri oportet. Ac primo quidem preſſio Π commodiſſime ex tertia aequatione ita determinatur, vt ſit $\Pi = \frac{Mkkdd\Phi}{2gdt^2(s+\lambda b)}$, qui valor ſi in prioribus aequationibus ſubſtituatur, per M diuidi poterit et ambae aequationes ſequentes induent formas, poſtquam per $2gdt^2$ multiplicauerimus:

I. $dds - sd\Phi^2 + cdd\Phi = 2gdt^2 \text{ſin.}\, \Phi - \frac{\lambda kkdd\Phi}{s+\lambda b}$;

II. $2dsd\Phi + sdd\Phi + cd\Phi^2 = 2gdt^2 \text{coſ.}\, \Phi - \frac{kkdd\Phi}{s+\lambda b}$;

ſicque totum negotium huc eſt reductum, vt ex his duabus aequationibus binae noſtrae incognitae s et Φ eliciantur.

§. 9. Hic ſtatim apparet elementum temporis dt commode ex calculo extrudi poſſe. Prior enim aequatio per coſ. Φ et poſterior per $-$ ſin. Φ multiplicata iunctim praebent

$$dds \,\text{coſ.}\, \Phi - sd\Phi^2 \,\text{coſ}\, \Phi + cdd\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - 2dsd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi$$
$$- sdd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi - cd\Phi^2 \,\text{ſin.}\, \Phi = \frac{kkdd\Phi}{s+\lambda b}(\text{ſin.}\, \Phi - \lambda \,\text{coſ.}\, \Phi)$$

Verum etiamſi hinc tempus t eliminatum videtur: tamen adhuc eius ratio reuera ineſt, quia eius elementum dt conſtans eſt aſſumtum; quandoquidem ex hac demum conditione differentialia ſecunda dds et $dd\Phi$ valores determinatos adipiscuntur; et hanc ob rem haec aequatio nullum nobis vſum praeſtari prorſus poterit.

§. 10. Cum igitur reſolutio binarum aequationum inuentarum ſine dubio maxime abſtruſa ſit cenſenda, plurimum intererit ſtatum quaeſtionis ad maiorem ſimplicitatem reduci. Statuamus ergo ambas conſtantes b et c nihilo aequales; tum vero etiam a frictione mentem abſtrastrahamus, ita vt sit $\lambda = 0$; atque hoc casu binae aequationes resoluendae erunt

I. $dds - s\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2 \,\text{sin.}\,\Phi$;

II. $2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2 \,\text{cos.}\,\Phi - \frac{kkdd\Phi}{s}$.

§. 11. Attendenti autem mox patebit, si harum aequationum prior per $2\,ds$, posterior vero per $2\,s\,d\Phi$ multiplicetur, summam earum, quae erit

$$2\,ds\,dds + 2\,s\,ds\,d\Phi^2 + 2\,ss\,d\Phi\,dd\Phi$$
$$= 4g\,dt^2(ds\,\text{sin.}\,\Phi + s\,d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi) - 2kk\,d\Phi\,dd\Phi$$

fore integrabilem, quippe integrale erit

$$ds^2 + ss\,d\Phi^2 = 4g\,s\,dt^2\,\text{sin.}\,\Phi - kk\,d\Phi^2, \text{ siue}$$
$$ds^2 + (ss + kk)\,d\Phi^2 = 4g\,dt^2(s\,\text{sin.}\,\Phi + C)$$

in qua aequatione principium conseruationis virium viuarum continetur.

§. 12. Huic aequationi addatur prima in s ducta et summa erit

$$d.s\,ds + kk\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2(3\,s\,\text{sin.}\,\Phi + 2\,C),$$

quae ducatur in $2\,s\,ds$, vt prodeat haec forma:

$$d.ss\,ds^2 + 2kk\,s\,ds\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2(6\,s\,\text{sin.}\,\Phi + 4\,C)\,s\,ds.$$

At vero secunda aequatio ducta in s praebet

$$d.ss\,d\Phi + kk\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2\,s\,\text{cos.}\,\Phi,$$

haec porro ducatur in $2\,ss\,d\Phi$, vt prodeat

$$d.s^4\,d\Phi^2 + 2kk\,ss\,d\Phi\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2.\,2\,s^3\,d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi,$$

quae aequatio ad praecedentem adiecta praebet

$$d.ssds^2 + d.s^4 d\Phi^2 + kk\, d.ssd\Phi^2$$
$$= 2g\,dt^2 (2s^3 d\Phi \operatorname{cos}.\Phi + 6ssds \operatorname{sin}.\Phi + 4Csds)$$
$$= 2g\,dt^2 (d.2s^3 \operatorname{sin}.\Phi + d.2Css),$$

vnde manifesto deducitur hoc integrale:

$$ssds^2 + s^4 d\Phi^2 + kkssd\Phi^2 = 4g\,dt^2 (s^3 \operatorname{sin}.\Phi + Css + D)$$

sicque iam nacti sumus duas aequationes differentiales primi gradus, in quas introductae sunt duae constantes arbitrariae C et D.

§. 13. Quaeramus ex vtraque aequatione inuenta valorem $2g\,dt^2$, qui erit ex priore

$$4g\,dt^2 = \frac{ds^2 + (ss+kk)d\Phi^2}{s \operatorname{sin}.\Phi + C};$$

ex posteriore vero colligitur

$$4g\,dt^2 = \frac{ssds^2 + ss(ss+kk)d\Phi^2}{s^3 \operatorname{sin}.\Phi + Css + D},$$

qui valores inter se aequati producent hanc aequationem:

$$ds^2 (s^3 \operatorname{sin}.\Phi + Css + D) + (ss+kk)d\Phi^2 (s^3 \operatorname{sin}.\Phi + Css + D)$$
$$= ssds^2 (s \operatorname{sin}.\Phi + C) + ss(ss+kk)d\Phi^2 (s \operatorname{sin}.\Phi + C).$$

Transferantur nunc termini ita, vt ex altera parte tantum ds, ex altera vero $d\Phi$ tantum reperiantur, eritque

$$D(ss+kk)d\Phi^2 = D\,ds^2$$

quae aequatio consistere nequit nisi sit $D = 0$, hocque casu ambae aequationes a se inuicem non discrepant

§. 14. Talis autem aequatio integralis, principio virium viuarum innixa, nequidem generalius, admissa cylindri magnitudine et crassitie baculi erui potest, si scilicet etiam frictionis ratio habeatur. Verum, quamuis etiam alia combinatione integratio succederet: tamen hinc nihil plane

plane emolumenti redundaret ad problema propositum resoluendum, quandoquidem ad solutionem perfectam ad minimum duplex integratio requireretur. Cum autem talem solutionem hactenus frustra tentassem, mihi quidem nulla alia via superesse videtur ad hunc motum cognoscendum, nisi vt ex ipsis aequationibus differentio-differentialibus solutionem per approximationes elicere conemur.

Determinatio motus quaesiti sine subsidio integrationis.

§. 15. Quoniam hoc Problema duabus aequationibus differentialibus secundi gradus continetur, eae quatuor constantes arbitrarias inuoluunt; vnde intelligimus, ad Problema penitus determinandum quatuor requiri conditiones ab arbitrio nostro pendentes, id quod etiam ipsa quaestionis natura declarat. Cum enim status initialis tanquam cognitus spectari debeat, is vtique quatuor rebus determinari deprehenditur. Primo enim non solum interuallum $BM = s$ datum habuerit valorem necesse est, sed etiam eius motus, quo primum procedere inceperit. Scilicet si motus a quiete inceperit, tum erit $\frac{ds}{dt} = 0$; sin autem baculo initio iam certus motus fuerit impressus, hinc formula $\frac{ds}{dt}$ certum valorem nanciscetur. Deinde in ipso initio non solum angulum $cCA = \Phi$ certum valorem habuisse necesse est, sed etiam, ob motum impressum, celeritas angularis $\frac{d\Phi}{dt}$ datum quendam valorem accipiet: sicque valores initiales harum quatuor quantitatum: 1°.) s, 2°.) $\frac{ds}{dt}$, 3°.) Φ, 4°.) $\frac{d\Phi}{dt}$, determinationem Problematis exhaurient, quibus cognitis totum negotium huc redit, vt ad quoduis tempus sequens valores earundem quatuor quantitatum assignentur.

§. 16. Constituto igitur statu initiali continuationem motus successiue per gradus prosequi conueniet, quem in finem tempus in particulas satis exiguas diuisum concipiamus, quarum singulas charactere differentiali dt designare liceat, quas quidem tam paruas accipi oportet, vt variatio motus in singulis producta quasi infinite parua spectari possit. Cum igitur tempus in minutis secundis exprimi sumserimus, elementum dt certam quandam partem exiguam vnius minuti secundi denotet, cuiusmodi pars si vna decima sufficere videatur, perpetuo nobis erit $dt = \frac{1}{10}$; fortassin etiam sufficiet ipsi dt majorem fractionem tribui, nisi solutionem magis exactam desiderauerimus. Quo minus enim a veritate aberrare voluerimus, eo minores fractiones pro dt assumi debebunt. Hoc enim modo, si pro initio cuiusque talis exigui interualli temporis quatuor memoratae quantitates s, $\frac{ds}{dt}$, Φ, $\frac{d\Phi}{dt}$ fuerint cognitae, tum ex ipsis aequationibus differentialibus secundi gradus earundem quantitatum valores pro fine huius tempusculi colligere licebit, quorum ope deinceps sequentia tempuscula simili modo percurri poterunt.

§. 17. Quo autem haec operatio facilius institui liceat, ponamus $\frac{ds}{dt} = p$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \theta$, vt sit $ds = p\,dt$ et $d\Phi = \theta\,dt$; tum vero ad quoduis tempus t hos quatuor valores s, p, Φ, θ tanquam cognitos tractemus, et ad tempus $t + dt$ eos per s', p', Φ' et θ' indicemus, atque ex natura differentialium statim patet fore

$$s' = s + ds = s + p\,dt \text{ et } \Phi' = \Phi + \theta\,dt,$$

qui ergo iam erunt cogniti. At vero simili modo erit

$$p' = p + dp \text{ et } \theta' = \theta + d\theta$$

vbi

vbi haec duo differentialia dp et $d\theta$ ex aequationibus differentio-differentialibus elicere oportebit, ita vt hoc modo nulla plane integratione indigeamus. His autem valoribus inuentis eadem operatio facile pro sequentibus temporis particulis dt expediri poterit.

§. 18. Consideremus igitur nostras binas aequationes differentiales secundi gradus generalissimas, nulla plane adhibita restrictione, quae, posito $ds = p\,dt$, $d\Phi = \theta\,dt$, hincque

$$dds = dp\,dt = (p' - p)\,dt,$$

similique modo

$$dd\Phi = d\theta\,dt = (\theta' - \theta)\,dt,$$

ad sequentes formas redigentur:

$$\text{I. } \frac{(p'-p)}{dt} - s\theta\theta + \frac{c(\theta'-\theta)}{dt} = 2g\,\text{sin.}\,\Phi - \frac{\lambda kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

$$\text{II. } 2p\theta + \frac{s(\theta'-\theta)}{dt} + c\theta\theta = 2g\,\text{cos.}\,\Phi - \frac{kk(\theta'-\theta)}{dt(s+\lambda b)},$$

quae reducantur ad has:

$$\text{I. } \frac{p'-p}{dt} + \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(c + \frac{\lambda kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{sin.}\,\Phi + s\theta\theta,$$

$$\text{II. } \frac{\theta'-\theta}{dt}\left(s + \frac{kk}{s+\lambda b}\right) = 2g\,\text{cos.}\,\Phi - c\theta\theta - 2p\theta,$$

ex quarum posteriore statim habetur

$$\frac{\theta'-\theta}{dt} = \frac{2g\,\text{cos.}\Phi - c\theta\theta - 2p\theta}{s + \frac{kk}{s+\lambda b}} = \frac{(2g\,\text{cos.}\Phi - c\theta\theta - 2p\theta)(s+\lambda b)}{s(s+\lambda b) + kk},$$

vnde colligitur valor ipsius θ'. Tum vero si iste valor pro $\frac{\theta'-\theta}{dt}$ in priore aequatione substituatur, etiam quantitas p' per mera elementa cognita cognoscetur, ita vt pro tempusculo sequente habeamus iterum quaternas quantitates s', Φ', p' et θ', quae cum per meros numeros exprimantur, eas iterum simpliciter per litteras s, Φ, p et θ designare

signare licebit, ex quibus simili modo earum valores pro tempusculo insequente, siue ad tempus $t + 2dt$ definiri poterunt. Tales igitur operationes haud difficulter eo vsque continuare licebit, donec baculus a cylindro penitus fuerit delapsus.

§. 19. Hic autem duo occurrunt casus, quibus motus iste complicatus cessabit: alter locum habet si interuallum $BM = s$ toti portioni baculi MF euadit aequalis, quod si euenerit, baculus cylindrum deserens motum conceptum libere prosequetur, quatenus scilicet a sola grauitate sollicitabitur. At vero etiam euenire potest, si portio baculi MF fuerit longior, vt baculus etiam, antequam punctum F vsque ad A pertingat, cylindrum deserat, id quod continget, quando pressio in puncto A, quam posuimus $= \Pi$, euanescet; quare cum inuenerimus

$$\Pi = \frac{M k k d d \Phi}{2 g d t^2 (s + \lambda b)} = \frac{M k k (\theta' - \theta)}{2 g d t (s + \lambda b)},$$

hoc eueniet quando fiet $\theta' - \theta = 0$; motus igitur hoc casu eo vsque durabit, quoad fiat

$$(2 g \operatorname{cos.} \Phi - c \theta \theta - 2 p \theta)(s + \lambda b) = 0, \text{ siue}$$
$$2 g \operatorname{cos.} \Phi - c \theta \theta - 2 p \theta = 0, \text{ siue}$$
$$2 g \operatorname{cos.} \Phi = \theta (c \theta + 2 p),$$

quod, cum angulus Φ continuo crescat, ideoque $\operatorname{cos.} \Phi$ decrescat, ex altera vero parte tam θ quam p continuo crescant, mox euenire debebit, nisi forte iam ante terminus F supra A fuerit praeterlapsus.

§. 20. Cum hic sit $p = \frac{ds}{dt}$, littera p denotabit celeritatem progressiuam centri grauitatis baculi M, quatenus secun-

secundum longitudinem B M promouetur, quam, ob gra-
vitatem, continuo crescere manifestum est; tum vero
$\frac{dds}{dt^2} = \frac{(p'-p)}{dt}$ exprimet accelerationem huius motus; de-
inde vero littera $\theta = \frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem,
qua baculus circa centrum cylindri C quouis momento
gyratur siue supra horizontem eleuatur; tum vero formula
$\frac{\theta'-\theta}{dt}$ accelerationem huius motus gyratorii denotabit. Quan-
do ergo ista acceleratio cessabit, baculus non amplius cy-
lindro incumbet, sed motu gyratorio iam concepto cylin-
drum penitus deferet, totusque baculus a vi grauitatis prae-
cipitabitur, cuius motus determinatio nulla amplius laborat
difficultate.

§. 21. Denique etiam circa frictionem quaedam hic sunt animaduertenda, quoniam frictio eatenus tantum habet locum, quatenus baculus super puncto A prorepit; si enim tantum voluendo super cylindro procederet, nullam frictionem pateretur. Quamobrem hic necesse est in celeritatem inquirere, qua baculus super cylindro prorepit. Ad tempus igitur t tangat baculus cylindrum in A, sitque A $m = s$; elapso autem tempore dt fiat contactus in a, existente angulo A C $a = d\Phi$, sitque $a\,m' = s + ds$, eritque, ob radium cylindri C A $= a$ et arculum A $a = a\,d\Phi$, distantia A $m' = s + ds + a\,d\Phi$, vnde si auferatur distantia A $m = s = \alpha\,m'$, remanebit spatiolum $a\,\alpha$, per quod punctum baculi A interea processit; vnde patet, frictionem tum demum cessare, quando fuerit $a\,d\Phi + ds = 0$, quod igitur nunquam eueniet, nisi initio baculo motus contrarius fuerit impressus. Hoc enim casu excluso vtraque celeritas $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ positiuum habebit valorem. Tab. I. Fig. 9.

§. 22. Quod si iam haec calculi praecepta ad casus determinatos, quibus scilicet omnia elementa status initialis per numeros absolutos fuerint data, accommodare velimus, circa quantitates singulas, quae hic occurrunt, ratione vnitatum, ad quas referantur, quaedam sunt monenda. Ac primo quidem mensuram temporis iam stabiliuimus, quippe quam in minutis secundis exprimi assumimus. Deinde vero angulos Φ et θ in partibus radii, qui etiam vnitate designari solet, exprimi sumamus, quos ergo, dum eorum sinus et cosinus accipiuntur, ante ad mensuras solitas per gradus et minuta exprimi oportebit. Quantitates tandem longitudinales s et p, pariter ac altitudinem g, in mensuris consuetis, veluti pedibus, exhibere licebit; vbi quidem, in gratiam calculi, eiusmodi pedes assumi conueniet, quorum 16 praebeant altitudinem lapsus g. His igitur praenotatis aliquem casum specialem per calculum euoluamus, cuius fortasse tractatio sternere viam poterit ad solutionem completam nostri Problematis propositi.

Descriptio casus specialis

hac methodo euoluendi.

§. 23. Sit baculus, seu potius trabs, parallelepipedum 12 pedes longum, cuius dimidia crassities sit semipedis (latitudo enim non in computum ingreditur). Centrum grauitatis autem in medium cadat, ita vt eius distantia ab vtroque termino sit 6 pedum, cuius quadrati triens 12 dabit valorem ipsius kk, existente dimidia crassitie $b = 0,5$ pedis; tum vero sit etiam diameter cylindri horizontalis, super quo trabs delabitur, vnius pedis, eiusque radius $CA = 0,5$ et interuallum $BC = a + b = c = 1$ ped. existente

existente altitudine $g = 16$ pedum; tum vero trabs initio cylindro ita horizontaliter in puncto c imponatur, vt eius centrum grauitatis M ad dextram promineat, interuallo $= 0,5$ ped. ex quo situ dimissa, incipiat delabi, ita vt initio ipso fuerit $s = 0,5$; $p = 0$; $\Phi = 0$ et $\theta = 0$. Pro quouis ergo tempore elapso $= t$ habebuntur istae duae aequationes:

$$\text{I. } \frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{(32 \cos. \Phi - \theta\theta - 2p\theta)s}{ss + 12};$$

$$\text{II. } \frac{p' - p}{dt} = 32 \sin. \Phi + s\theta\theta - \left(\frac{\theta' - \theta}{dt}\right);$$

vbi frictionem calculi commodioris gratia penitus neglegimus.

§. 24. Incipiamus igitur ab ipso initio motus, quo fit tempus $t = 0$, et quia hoc momento habetur $s = 0,5$, $p = 0$ $\Phi = 0$ et $\theta = 0$, habebimus $\frac{\theta' - \theta}{dt} = \frac{64}{49} = 1,306$, hincque $\frac{p' - p}{dt} = -1,306$, sicque erit $p' = -1,306 \,.\, dt$ et $\theta' = +1,306 \,.\, dt$, tum vero erit $s' = 0,5$ et $\Phi' = 0$.

§. 25. Sumamus nunc primum temporis interuallum $dt = \frac{1}{10}$ sec. et quatuor elementa pro tempusculo sequente erunt

$$s = 0,5; \; p = -0,1306, \; \Phi = 0, \; \theta = 0,1306,$$

vnde colligetur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,3601, \; \frac{p' - p}{dt} = -1,2976,$$

hinc igitur fiet

$$s' = s + p\,dt = 0,5 - 0,1306 \,.\, dt;$$
$$p' = -0,1306 - 1,2976 \,.\, dt;$$
$$\Phi' = 0 + 0,1306 \,.\, dt;$$
$$\theta' = 0,1306 + 1,3061 \,.\, dt.$$

§. 26. Sumamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, atque ad tempus $t = \frac{1}{5}$ sec. elementa nostri calculi erunt

$s =$

$$s = 0,4869,\ p = -0,2603,\ \Phi = 0,0131,\ \theta = 0,2612,$$

ficque erit $\Phi = 45°$. Calculum igitur vt ante profequendo reperiemus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2759,\ \frac{p' - p}{dt} = -0,8235,$$

erit ergo

$$s' = 0,4869 - 0,2603 \,.\, dt;$$
$$p' = -0,2603 - 0,8235 \,.\, dt;$$
$$\Phi' = 0,0131 + 0,2612 \,.\, dt;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2759 \,.\, dt.$$

§. 27. Sumamus nunc denuo $dt = \frac{1}{10}$, et ad tempus $t = \frac{3''}{10}$ elementa calculi erunt

$$s = 0,4609,\ p = -0,3426,\ \Phi = 0,0392,\ \theta = 0,3888,$$

ficque erit $\Phi = 2°.\,15'$, quia portio $0,026$ refpondet $1°.\,30'$. Hinc igitur reperietur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,2111,\ \frac{p' - p}{dt} = 0,1149.$$

Hinc ergo erit

$$s' = 0,4609 - 0,3426 \,.\, dt;$$
$$p' = -0,3426 + 0,1149 \,.\, dt;$$
$$\Phi' = 2°.\,15 + 0,3888 \,.\, dt;$$
$$\theta' = 0,3888 + 1,2111 \,.\, dt.$$

§. 28. Statuamus denuo $dt = \frac{1}{10}$, vt tempus ab initio elapfum fit $\frac{2''}{5}$, et elementa noftra erunt

$$s = 0,4266,\ p = -0,3311,\ \Phi = 0,0781,\ \theta = 0,5099,$$

vnde calculo inftituto reperitur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,1199 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 1,4942, \text{ vnde fit}$$

$s' =$

$s' = 0,4266 - 0,3311 \cdot dt;$
$p' = -0,3311 + 1,4942 \cdot dt;$
$\Phi' = 4^\circ.\ 29' + 0,5099 \cdot dt;$
$\theta' = 05099 + 1,1199 \cdot dt.$

§. 29. Statuatur denuo $dt = \frac{1}{10}$, et elementa pro tempore $t = \frac{5''}{10}$ ita ſe habebunt:

$$s = 0,3935,\ p = -0,1817,\ \Phi = 7^\circ.\ 25',\ \theta = 0,6219,$$

quibus inuentis calculo conſueto inſtituto fiet

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0221 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 3,2608,$$

vnde fit

$s' = 0,3935 - 0,1817 \cdot dt$
$p' = -0,1817 + 3,2608 \cdot dt,$
$\Phi' = 7^\circ.\ 25' + 0,6219 \cdot dt,$
$\theta' = 0,6219 + 1,0221 \cdot dt.$

§. 30. Denuo ſtatuatur $dt = \frac{1}{10}$, et pro tempore $= \frac{6''}{10}$ elementa ita erunt comparata:

$$s = 0,3753,\ p = 0,1444,\ \Phi = 10^\circ.\ 59',\ \theta = 0,7241,$$

quibus inuentis calculo pro inueſtigandis nouis p' et θ' inſtituto habemus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9484 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 5,3451,$$

vnde colligitur

$s' = 0,3753 + 0,1444 \cdot dt,$
$p' = 0,1444 + 5,3451 \cdot dt,$
$\Phi' = 10^\circ.\ 59' + 0,7241 \cdot dt,$
$\theta' = 0,7241 + 0,9484 \cdot dt.$

§. 31. Sumatur iterum $dt = \frac{1}{10}$, vt pro temporis momento $\frac{7''}{10}$ elementa fiant

$$s = 0,3897, \; p = 0,6789, \; \Phi = 15^\circ.8' \text{ et } \theta = 0,8189.$$

Calculum ergo vt ante proſeqũendo elicimus

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9334, \; \frac{p' - p}{dt} = 7,6821,$$

vnde orietur

$$s' = 0,3897 + 0,6789 \, . \, dt,$$
$$p' = 0,6789 + 7,6821 \, . \, dt,$$
$$\Phi' = 15^\circ. 8' + 0,8189 \, . \, dt,$$
$$\theta' = 0,8189 + 0,9334 \, . \, dt.$$

§. 32. Quoniam motus iam regularior fieri incipit quam initio, nunc interuallum dt augere poterimus: ſumamus ergo $dt = \frac{1''}{5}$, atque elapſo tempore $\frac{9''}{10}$ erit

$$s = 0,5255, \; p = 2,2153, \; \Phi = 24^\circ.33', \; \theta = 1,0056,$$

vnde fit

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 1,0141 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 12,8129,$$

quocirca fiet

$$s' = 0,5255 + 2,2153 \, . \, dt,$$
$$\Phi' = 24^\circ. 33' + 1,0056 \, . \, dt,$$
$$p' = 2,2153 + 12,8129 \, . \, dt,$$
$$\theta' = 1,0056 + 1,0141 \, . \, dt.$$

§. 33. Sit iterum $dt = \frac{1''}{5}$, ita vt elapſo tempore $t = 1\frac{1}{10}$ elementa noſtra ſint

$$s = 0,9686, \; p = 4,7779, \; \Phi = 36^\circ.9', \; \theta = 1,2084,$$

quibus inuentis porro colligitur

$$\frac{\theta' - \theta}{dt} = 0,9606 \text{ et } \frac{p' - p}{dt} = 19,3306,$$

hinc porro nanciſcemur

$s' =$

$$s' = 0{,}9686 + 4{,}7779 \,.\, dt,$$
$$p' = 4{,}7779 + 19{,}3306 \,.\, dt,$$
$$\Phi' = 36^\circ.\, 9' + 1{,}2084 \,.\, dt,$$
$$\theta' = 1{,}2084 + 0{,}9606 \,.\, dt.$$

§. 34. Adhuc fumatur $dt = \frac{1}{5}''$, et elapfo tempore $1\frac{8}{10}''$ elementa noftra erunt

$$s = 1{,}9242,\ p = 8{,}6440,\ \Phi = 50^\circ.\, 8',\ \theta = 1{,}4005,$$

ex quibus, fi fecundum praecepta data computemus, formula

$$32 \cos. \Phi - \theta\,(\theta + 2p)$$

iam fit negatiua; vnde intelligitur, trabem iam ante hoc tempus $1\frac{8}{10}''$ cylindrum penitus deferuiffe et nunc motu libero per folam grauitatem delabi, pro motu quem centrum grauitatis hoc momento iam concepit; tum vero etiam motum gyratorium, quem hoc momento habuit, perpetuo conferuabit, cuius celeritas angularis cum fit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \theta = 1{,}4005,$$

fingulis minutis fecundis angulum conficiet hoc numero expreffum. Quamobrem fingulis minutis fecundis motu angulari per angulum $80^\circ.\, 12'$ gyrabitur.

§. 35. Haec quidem determinatio motus non mediocriter a veritate aberrabit, propterea quod temporis interualla nimis magna funt affumta, quandoquidem circa finem noftra elementa nimis magnas mutationes funt passa, quam vt motus vniformis per vnum interuallum pro aequabili haberi poffet. Interim tamen, neglectis minutiis, hinc fatis diftinctam nancifcimur ideam motus quo noftra trabs delabetur. Hinc enim difcimus, ftatim ab initio trabem tardiffime ad motum concitari, atque adeo, dum fuper

per

per cylindro inclinatur, in contactu A retro repere. Cum enim celeritas prorepens supra inuenta sit

$$\frac{ds}{dt} + \frac{\frac{1}{2} d\Phi}{dt} = p + \tfrac{1}{2}\theta,$$

ab initio per aliquod tempus haec quantitas, seu eius duplum $\theta + 2p$ mansit negatiuum, atque videmus elapso demum dimidio minuto secundo baculum antrorsum repere incipere, a quo tempore satis prompte descendendo prolabitur. Caussa huius phoenomeni in eo est sita: quod centrum grauitatis M circa initium alium motum concipere nequit, nisi verticalem, eumque adeo lentissimum; tum enim demum, quando trabs iam satis notabilem inclinationem est nacta, motum horizontalem recipere potest.

Emendatio Solutionis praecedentis.

§. 36. Quo autem aberratio istius methodi a veritate diminuatur, calculum sequenti modo instituti conueniet, vbi quidem eidem exemplo determinato insistemus. Ponamus ad tempus $= t$ ab initio elapsum iam hos valores esse inuentos: $p = e$, $s = f$, $\theta = \varepsilon$ et $\Phi = \zeta$, tum vero elapso insuper tempusculo $= \tau$ haec elementa abire in p', s', θ' et Φ', ad quorum valores inuestigandos statuamus $p' = e + A\tau + B\tau\tau$, vnde cum sit $s' = \int p' d\tau$, fiet

$$s = f + e\tau + \tfrac{1}{2} A\tau\tau + \tfrac{1}{3} B\tau^3.$$

Simili modo fit $\theta' = \varepsilon + \alpha\tau + \beta\tau\tau$, vnde colligitur

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3,$$

vbi quidem sumamus angulum ζ more solito in gradibus et minutis dari, partes autem adiectas $\varepsilon\tau + \frac{1}{2}\tau\tau + \frac{1}{3}\beta\tau^3$ in partibus radii exprimi, vt hinc fiat

sin.

$$\sin.\Phi' = \sin.\zeta \cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$+ \cos.\zeta \sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) \text{ et}$$
$$\cos.\Phi' = \cos.\zeta \cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3)$$
$$- \sin.\zeta \sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3).$$

§. 37. Quia autem in hac euolutione non vltra fecundam poteftatem ipfius τ afcendere conuenit, erit

$$\cos.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau \text{ et}$$
$$\sin.(\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau + \tfrac{1}{3}\beta\tau^3) = \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

ficque habebimus

$$\sin.\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\sin.\zeta + (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\cos.\zeta \text{ et}$$
$$\cos.\Phi' = (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon\tau\tau)\cos.\zeta - (\varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau)\sin.\zeta,$$

quibus fubftitutis in ambabus noftris aequationibus fupra exhibitis et ad hunc cafum accommodatis:

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\cos.\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))s'}{s's' + 12} \text{ et}$$
$$\frac{p' - p}{\tau} = 32\sin.\Phi' + s'\theta'\theta' - \frac{(\theta' - \theta)}{\tau},$$

habebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha + \beta\tau \text{ et } \frac{p' - p}{\tau} = A + B\tau.$$

§. 38. Incipiamus igitur a formula

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \frac{(32\cos.\Phi' - \theta'(\theta' + 2p'))s'}{s's' + 12},$$

vbi cum ad partem finiftram tempus τ non vltra primam dimenfionem affurgat, etiam in dextra parte altiores poteftates reiiciamus. Hinc cum fit

$$32\cos.\Phi' = 32\cos.\zeta - 32\varepsilon\tau\sin.\zeta \text{ et}$$
$$\theta' + 2p' = \varepsilon + 2e + (\alpha + 2A)\tau,$$

 duca-

ducatur postrema aequatio in $\theta' = \varepsilon$ prodibitque

$$\theta'(\theta' + 2p') = \varepsilon\varepsilon + 2e\varepsilon + \tau(2\alpha\varepsilon + 2A\varepsilon + 2\alpha e).$$

Quia vero etiam haec euolutio nimis fieret molesta, etiam primam potestatem τ reiiciamus, atque hinc obtinebimus

$$\frac{\theta' - \theta}{\tau} = \alpha = \frac{(32 \operatorname{cof.} \zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2e))f}{ff + 12}.$$

Ex priore vero aequatione eodem modo elicimus

$$p' - p = A = 32 \operatorname{fin.} \zeta + \varepsilon\varepsilon f - \alpha.$$

Inuentis autem his duobus valoribus α et A habebimus pro tempore $t + \tau$ ista elementa:

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}A\tau\tau;$$
$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$
$$p' = e + A\tau;$$
$$\theta' = \varepsilon + \alpha\tau.$$

§. 39. Hac ergo methodo praecedens solutio ita rectificatur, vt cum supra tantum sumsissemus $s' = s + p\,dt$, vbi s respondet ipsi f et dt ipsi τ, siue $s' = f + e\tau$: hic valore accuratiore vtamur, scilicet

$$s' = f + e\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau;$$

similique modo cum ante habuissemus $\Phi' = \Phi + \theta\,dt$, nunc habemus

$$\Phi' = \zeta + \varepsilon\tau + \tfrac{1}{2}\alpha\tau\tau,$$

vnde etiam sine errore interuallo temporis τ fortasse maiores valores tribuere licebit, id quod ex quantitate terminorum $\frac{1}{2}A\tau\tau$ et $\frac{1}{2}\alpha\tau\tau$ diiudicari poterit, vt scilicet altiores potestates sequentes sine errore negligi queant.

§. 40. Quod si ergo hac methodo correcta ipsum praecedentem casum euoluere velimus et ab ipso initio inchoemus, vbi erat $f = \frac{1}{2}$, $e = 0$, $\zeta = 0$ et $\varepsilon = 0$, ex nostris

ſtris formulis colligemus $\alpha = 1,3061$ et $A = -1,3061$, ſicque pro tempore τ habebimus:

$$s' = \tfrac{1}{2} - 0,6530 \,.\, \tau\tau;\; p' = -1,3061 \,.\, \tau,$$
$$\Phi' = 0,6530 \,.\, \tau\tau; \quad \theta' = 1,3061 \,.\, \tau.$$

§. 41. Hic igitur videtur ſtatim tuto aſſumi poſſe $\tau = \tfrac{1''}{5}$, vnde elementa pro tempore $t = \tfrac{1''}{5}$ erunt

$$f = 0,4739,\; e = -0,2612,\; \zeta = 0,0261 = 1^\circ.\,30',\; \varepsilon = 0,2612,$$

quibus inuentis colligitur

$$\alpha = 1,2427 \text{ et } A = -0,3728,$$

quocirca fit

$$s' = 0,4739 - 0,2612 \,.\, \tau - 0,1864 \,.\, \tau\tau;$$
$$p' = -0,2612 - 0,3728 \,.\, \tau;$$
$$\Phi' = 1^\circ.\,30' + 0,2612 \,.\, \tau + 0,6213 \,.\, \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,2612 + 1,2427 \,.\, \tau.$$

§. 42. Sumamus iterum $\tau = \tfrac{1}{5}$, et pro tempore ab initio elapſo $t = \tfrac{2''}{5}$ elementa noſtra ita ſe habebunt:

$$f = 0,4142,\; e = -0,3357,\; \zeta = 5^\circ.\,55' \text{ et } \varepsilon = 0,5097,$$

ex quibus erit

$$\alpha = 1,0860 \text{ et } A = 2,3202,$$

vnde fit

$$s' = 0,4142 - 0,3357 \,.\, \tau + 1,1601 \,.\, \tau\tau;$$
$$p' = -0,3357 + 2,3202 \,.\, \tau;$$
$$\Phi' = 5^\circ.\,55' + 0,5097 \,.\, \tau + 0,5430 \,.\, \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,5097 + 1,0860 \,.\, \tau.$$

§. 43. Statuatur denuo $\tau = \tfrac{1}{5}$, vnde pro tempore $t = \tfrac{3''}{5}$ ab initio elapſo elementa noſtra erunt

$$f = 0,3935,\ e = 0,1283,\ \zeta = 13^\circ.\ 1',\ \varepsilon = 0,7269,$$

quibus inuentis porro colligitur

$$\alpha' = 0,9862,\ A = 6,4292.$$

Sicque erit

$$s' = 0,3935 + 0,1283 . \tau + 3,2146 . \tau\tau;$$
$$p' = 0,1283 + 6,4292 . \tau;$$
$$\Phi' = 13^\circ.\ 1' + 0,7269 . \tau + 0,4931 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,7269 + 0,9862 . \tau.$$

§. 44. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$, ita vt elementa noſtra pro tempore $t = \frac{4}{5}$ fiant

$$f = 0,5477,\ e = 1,4141,\ \zeta = 22^\circ\ 31',\ \varepsilon = 0,9241.$$

Calculo igitur vt hactenus inſtituto reperietur

$$\alpha = 1,1619,\ A = 11,5603,$$

quocirca orietur

$$s' = 0,5477 + 1,4141 . \tau + 5,7801 . \tau\tau^2;$$
$$p' = 1,4141 + 11,5603 . \tau;$$
$$\Phi' = 22^\circ.\ 31' + 0,9241 . \tau + 0,5809 . \tau\tau;$$
$$\theta' = 0,9241 + 1,1619 . \tau.$$

§. 45. Sumamus adhuc $\tau = \frac{1}{5}$ et quatuor elementa noſtra ita ſe habebunt pro tempore $t = 1''$:

$$f = 1,0617,\ e = 3,7262,\ \zeta = 34^\circ.\ 31',\ \varepsilon = 1,1565,$$

calculo igitur vt ante proſecuto elicitur

$$\alpha = 1,3273 \text{ et } A = 18,2254,$$

vnde porro fit

$s' =$

$s' = 1,0617 + 3,7262.\tau + 9,1127.\tau\tau;$
$p' = 3,7262 + 18,2254.\tau;$
$\Phi' = 34^\circ.31' + 1,1565.\tau + 0,6636.\tau\tau;$
$\theta' = 1,1565 + 1,3273\,\tau.$

§. 46. Sit iterum $\tau = \frac{1}{5}$ et elapſo ab initio tempore $t = \frac{6''}{5}$, elementa erunt

$$f = 2,1714,\ e = 7,3713,\ \zeta = 49^\circ.28',\ \varepsilon = 1,4219,$$

ex quibus porro colligitur

$$32\ \text{coſ.}\ \zeta - \varepsilon(\varepsilon + 2e) = -2,1878$$

qui valor cum ſit negatiuus, ſequitur trabem iam cylindrum deſeruiſſe, quare ad momentum inueniendum, quo hoc contigit, ipſi τ valorem aliquanto minorem tribui oportet, quem ex praecedentibus formulis haud difficulter colligere licet. Quaeratur ſcilicet tempus τ, quo fit

$$32\ \text{coſ.}\ \Phi' = \theta'(\theta' + 2p),$$

quem ergo calculum expediamus.

§. 47. Cum ſit

$$\Phi' = 34^\circ.31' + 1,1565.\tau + 0,6661.\tau\tau,\ \text{erit}$$
$$\text{coſ.}\ \Phi' = \text{coſ.}\ 34^\circ.31'(1 - \tfrac{1}{2}(1,1565)^2.\tau\tau)$$
$$-\ \text{ſin.}\ 34^\circ.31'(1,1565.\tfrac{1}{2}(1,3273)^2\,\tau\tau$$

qui valor euolutus praebet

$$\text{coſ.}\ \Phi' = 0,82396 - 0,65533.\tau - 0,92795.\tau\tau,$$

ideoque

$$32\ \text{coſ.}\ \Phi' = 26,36672 - 20,97050.\tau - 29,66560.\tau\tau.$$

Pro altera autem parte quia eſt

$$\theta' = 1,1565 + 1,3273.\tau\ \text{et}$$

 $\theta' +$

$$\theta' + 2p' = 8,6089 + 37,7781.\tau,$$ erit

$$\theta'(\theta' + 2p') = 9,9562 + 55,1570.\tau + 50,1429.\tau\tau$$

vnde pro tempore τ definiendo haec habebitur aequatio:

$$16,4105 = 76,1276.\tau + 79,8085.\tau\tau.$$

§. 48. Quia iam nouimus incognitam τ paullo minorem esse quam $\frac{1}{5}$, ponamus

$$\tau = \tfrac{1}{5} - z, \text{ vt fit } \tau\tau = \tfrac{1}{25} - \tfrac{2}{5}z$$

quibus valoribus substitutis fiet

$$16,4105 = 18,4178 - 108,0508.z$$

vnde concluditur

$$z = \tfrac{2}{108} = 0,0185, \text{ ideoque } \tau = 0,1815,$$

ita vt tempus ab initio elapsum sit 1, 1815; tum vero erit

$$f = 2,0381,\ e = 7,0341,\ \zeta = 47^\circ.44',\ \varepsilon = 1,3974,$$

et quia hinc per hypothesin fit $\alpha = 0$, fiet $A = 27,6605$.

§. 49. His inuentis praecipua Phaenomena huius motus mirabilis clarius aspectui exponamus; atque vt iisdem elementis vtamur, quibus aequationes differentiales secundi gradus continentur, meminisse oportet, nos hic ad quoduis tempus posuisse $s = f$, deinde $\frac{ds}{dt} = p = e$, tum vero $\frac{dds}{dt^2} = \frac{p'-p}{dt} = A$. Pro angulo autem Φ nobis erat $\Phi = \zeta$, $\frac{d\Phi}{dt} = \theta = \varepsilon$, ac denique $\frac{dd\Phi}{dt^2} = \frac{\theta'-\theta}{dt} = \alpha$, quibus valoribus introductis phaenomena istius motus in sequente tabula sumus complexi.

Re-

Repraeſentatio motus, quo trabs §. 23. deſcripta ſuper axe cylindrico delabitur.

Temp. t	s	$\frac{ds}{dt}$	$\frac{dds}{dt^2}$	ϕ	$\frac{d\phi}{dt}$	$\frac{dd\phi}{dt^2}$
0,000	0,500	0,000	− 1,306			
0,200	0,474	− 0,261	− 0,373	0°. 0′	0,000	1,306
0,400	0,414	− 0,336	+ 2,320	1. 30	0,261	1,243
0,600	0,393	+ 0,128	+ 6,429	5. 55	0,509	1,086
0,800	0,548	+ 1,414	+ 11,560	13. 1	0,727	0,986
1,000	1,062	+ 3,726	+ 1[illegible],225	22. 31	0,924	1,162
1,181	2,038	+ 7,034	+ 27,660	34. 31	1,156	1,327
				47. 44	1,397	0,000

§. 50. Elapſo igitur tempore $t = 1,181$ trabs a cylindro penitus recedere incipiet et dehinc libere motu acquiſito delabetur; vbi quidem centrum grauitatis motum in parabola proſequetur, dum motus gyratorius, quem iam concepit, manebit vniformis, cuius ſcilicet celeritas angularis erit $= 1,397$, qua ergo ſingulis minutis ſecundis gyrabitur per angulum $80°. 10'$. At ſi pro hoc momento locus centri grauitatis M deſideretur, is binis coordinatis iſtis determinatur:

$$x = s \operatorname{ſin.} \phi - \operatorname{coſ.} \phi = 0,836 = CP \text{ et}$$

$$y = s \operatorname{coſ.} \phi + \operatorname{ſin.} \phi = 2,1108 = PM. \qquad \text{Tab. I. Fig. 10}$$

Quin etiam ipſe motus, quem centrum grauitatis M hoc modo acquiſierit, hinc aſſignari poteſt: erit enim celeritas verticalis

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \operatorname{ſin.} \phi + \frac{s\,d\phi}{dt} \operatorname{coſ.} \phi + \frac{d\phi}{dt} \operatorname{ſin.} \phi = 8,1550,$$

quae ergo celeritas deinceps vniformiter augebitur et ſingulis minutis ſecundis incrementum accipiet $= 32$ pedum. Celeritas denique horizontalis erit

dy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{s\,d\Phi}{dt}\,\text{fin.}\,\Phi + \frac{d\Phi}{dt}\,\text{cof.}\,\Phi = 7,7785$$

quam celeritatem deinceps conftanter inuariatam feruabit.

Confiderationes fuper quaeftione in genere propofita.

§. 51. Ex exemplo allato, quod euoluimus, fatis liquet, quo modo alios quoscunque huiusmodi cafus determinatos calculo expediri conueniat, vbi quidem inprimis eft tenendum, interualla temporis eo minora accipi debere, quo minus a veritate aberrare voluerimus. Tum vero etiam, fi frictionem negligere voluerimus, aequatio integralis, ex principio virium viuarum fluens, haud leue fubfidium afferre poterit; quam ob rem iftam aequationem integralem hic adhuc adiiciamus.

§. 52. Omiffa autem frictione ambae aequationes differentiales fecundi gradus, quibus folutio problematis continetur, ita erant comparatae:

$$\text{I. } dds - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi = 2\,g\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi,$$

$$\text{II. } 2\,ds\,d\Phi + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 = 2\,g\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{kk\,dd\Phi}{s}.$$

Iam ducatur prima in $2\,ds + 2\,c\,d\Phi$, altera vero in $2\,s\,d\Phi$ et in vnam fummam collectae dabunt

$$\begin{aligned} 2\,ds\,dds + 2\,s\,ds\,d\Phi^2 + 2\,ss\,d\Phi\,dd\Phi + 2(cc+kk)\,d\Phi\,dd\Phi \\ + 2\,c\,ds\,dd\Phi + 2\,c\,d\Phi\,dds \\ = 4\,g\,dt^2(ds\,\text{fin.}\,\Phi + c\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi + s\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi), \end{aligned}$$

cuius integrale fponte fe prodit

$$\begin{aligned} ds^2 + ss\,d\Phi^2 + (cc+kk)\,d\Phi^2 + 2\,c\,d\Phi\,ds \\ = 4\,g\,dt^2(s\,\text{fin.}\,\Phi - c\,\text{cof.}\,\Phi + C) \end{aligned}$$

vbi conftantem C ex ftatu initiali definiri oportet.

§. 53.

§. 53. Aequatio haec integralis concinnius hoc modo repraesentari poterit:

$$(ds+c\,d\Phi)^2+(kk+ss)\,d\Phi^2=4g\,dt^2(s\,\text{fin.}\,\Phi-c\,\text{cof.}\,\Phi+C)$$

quae, si vt supra faciamus $\frac{ds}{dt}=p$ et $\frac{d\Phi}{dt}=\theta$, accipiet hanc formam:

$$(p+c\theta)^2+(kk+ss)\theta\theta=4g(s\,\text{fin.}\,\Phi-c\,\text{cof.}\,\Phi+C)$$

ex qua aequatione pro quouis tempore, si iam innotuerit valor ipsius θ praeter variabiles principales s et Φ, valor litterae p commode assignari poterit, quo pacto calculus supra adhibitus ad maiorem certitudinem euehi poterit.

§. 54. Quod si vero etiam frictionis rationem habere lubuerit, vnice aequationibus differentialibus secundi gradus inhaerere cogimur, quae erant:

I. $dds-s\,d\Phi^2+c\,dd\Phi+\frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi$;

II. $2\,ds\,d\Phi+s\,dd\Phi+c\,d\Phi^2+\frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b}=2g\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi$;

vbi littera λ ex quantitate frictionis definiri oportet, cuius valor vulgo aestimari solet $=\frac{1}{3}$, qui autem, si superficies magis minusue fuerint politae, etiam siue minor siue maior accipi debebit. Hic autem valor tantum locum habet, quando reuera datur attritus. At si minor valor sufficiat ad attritum auertendum, tum etiam ipsi λ minor iste valor tribui debebit, hancque cautelam in singulis temporis interuallis sollicite obseruasse necesse est. Cum igitur sit celeritas attritus $=\frac{ds}{dt}+\frac{a\,d\Phi}{dt}$, valor huius formulae in tempore expressus nihilo aequetur, indeque eliciatur valor litterae λ, qui si minor prodeat quam $\frac{1}{3}$, is in calculum introducatur, eritque tum $\frac{ds}{dt}=-\frac{a\,d\Phi}{dt}$; sin autem maior pro-

 die-

dierit, tum ſumi oportet $\lambda = \frac{1}{3}$, quo caſu aderit attritus.

Inueſtigatio motus trabis, quamdiu ob frictionem attritus in contactu A auertitur.

§. 55. Si ſtatus initialis trabis ſuper cylindro ita fuerit comparatus, vt in contactu nullus detur attritus; tum vel minima frictio valebit attritum per aliquod tempus impedire, quamdiu ſcilicet ad hoc praeſtandum minor valor litterae λ ſufficit quam $\frac{1}{3}$, ſiquidem hanc fractionem $\frac{1}{3}$ pro maxima vi, quam frictio exerere valet, aſſumamus. Quamdiu autem nullus ad fuerit attritus, ſingulari prorſus commodo vſu venit, vt motus trabis, qui ſine frictione foret inperſcrutabilis, expediri poſſit, id quod vtique operae pretium erit luculentius oſtendiſſe.

§. 56. Cum celeritas attritus in contactu A ſit $= \frac{ds}{dt} + \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ponamus eam initio motus fuiſſe nullam, et videamus, per quantum temporis ſpatium ea euaneſcens ſit manſura. Hunc in finem in noſtris aequationibus ſtatim ponamus $ds = -a\,d\Phi$, hincque $dds = -a\,dd\Phi$ et $s = f - a\Phi$. His autem valoribus ſubſtitutis binae noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I.}\quad -a\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 + c\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \sin.\Phi = -\frac{\lambda kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

$$\text{II.}\quad -2a\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi + c\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \cos.\Phi = -\frac{kk\,dd\Phi}{s+\lambda b};$$

quarum prior per poſteriorem diuiſa ſtatim dat

$$\lambda = -\frac{(c-a)\,dd\Phi - s\,d\Phi^2 - 2g\,dt^2 \sin.\Phi}{(c-2a)\,d\Phi^2 + s\,dd\Phi - 2g\,dt^2 \cos.\Phi},$$

qui valor quamdiu minor fuerit quam $\frac{1}{3}$, motus quem inueſtigamus reuera locum habebit; ſimulac vero maiorem

obti-

obtinebit valorem, tum eius loco fractio $\frac{1}{3}$ scribi debebit, et resolutio aequationum prorsus alio modo erit instituenda; quandoquidem tum trabs super cylindro prorepere incipiet.

§. 57. Cum posuerimus $c = a + b$, valor ipsius λ hoc modo concinnius exprimetur:

$$\lambda = \frac{-b\,dd\,\Phi + s\,d\,\Phi^2 + 2\,g\,dt^2 \sin.\Phi}{(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,dd\,\Phi + 2\,g\,dt^2 \cos.\Phi},$$

vbi litteram s loco $f - a\,\Phi$ breuitatis gratia relinquimus. Hinc igitur colligimus

$$s + \lambda b = -\frac{(bb+ss)\,dd\,\Phi + a\,s\,d\,\Phi^2 + 2\,b\,g\,dt^2 \sin.\Phi + 2\,g\,s\,dt^2 \cos.\Phi}{(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,dd\,\Phi + 2\,g\,dt^2 \cos.\Phi}.$$

§. 58. Hoc valore pro $s + \lambda b$ inuento, eum in posteriore aequatione substituamus, quae cum hanc induat formam:

$$kk\,dd\,\Phi = (s + \lambda b)\,[(a-b)\,d\,\Phi^2 - s\,dd\,\Phi + 2\,g\,dt^2 \cos.\Phi]$$

facta substitutione obtinebimus

$$kk\,dd\,\Phi = -(bb+ss)\,dd\,\Phi + a\,s\,d\,\Phi^2 + 2\,b\,g\,dt^2 \sin.\Phi + 2\,s\,g\,dt^2 \cos.\Phi,$$

quae est aequatio duas tantum continens variabiles Φ et t, in qua elementum dt constans est assumtum.

§. 59. Quoniam hic ipsa quantitas t non inest, hanc aequationem commode ad differentialem primi gradus reducere licebit. Ponatur enim $dt = p\,d\,\Phi$, et quia $ddt = 0$, erit $p\,dd\,\Phi + dp\,d\,\Phi = 0$, hincque $dd\,\Phi = -\frac{dp\,d\,\Phi}{p}$; quo valore substituto adipiscemur sequentem aequationem:

$$0 = \frac{kk\,dp}{p} + \frac{(bb+ss)\,dp}{p} + a\,s\,d\,\Phi + 2\,b\,g\,pp\,d\,\Phi \sin.\Phi + 2\,g\,s\,pp\,d\,\Phi \cos.\Phi,$$

quae

quae reducatur ad hanc formam:

$$-(bb+kk+ss)\frac{dp}{p}=d\Phi(as+2bgpp\,\text{fin.}\Phi+2gspp\,\text{cof.}\Phi).$$

Ponamus insuper $p=\frac{1}{q}$, vt fiat $\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q}$, et noſtra aequatio erit:

$$(bb+kk+ss)qdq=d\Phi(asqq+2bg\,\text{fin.}\Phi+2gs\,\text{cof.}\Phi).$$

§. 60. Transferamus nunc terminum $asqqd\Phi$ in alteram partem, et quia $ad\Phi=-ds$, habebimus hanc aequationem ſponte integrabilem:

$$(bb+kk+ss)q\,dq+sqq\,ds=2gd\Phi(b\,\text{fin.}\Phi+s\,\text{cof.}\Phi),$$

quippe cuius integrale eſt:

$$(bb+kk+ss)\,qq=4g\int(bd\Phi\,\text{fin.}\Phi+sd\Phi\,\text{cof.}\Phi)$$
$$=-4gb\,\text{cof.}\Phi+4g\int sd\Phi\,\text{cof.}\Phi,$$

quare cum ſit $s=f-a\Phi$, poſtremum membrum dabit

$$4gf\,\text{fin.}\Phi-4ga\int\Phi d\Phi\,\text{cof.}\Phi.$$

Eſt vero

$$\int\Phi d\Phi\,\text{cof.}\Phi=\Phi\,\text{fin.}\Phi+\text{cof.}\Phi,$$

ita vt iam noſtra aequatio integrata ſit

$$(bb+kk+ss)qq=4g(f\,\text{fin.}\Phi-a\Phi\,\text{fin.}\Phi-(a+b)\,\text{cof.}\Phi+C),$$

ſiue

$$(bb+kk+ss)qq=4g(s\,\text{fin.}\Phi-(a+b)\,\text{cof.}\Phi+C),$$

quam conſtantem C ex ſtatu initiali definiri oportet.

§. 61. Quoniam igitur poſuimus

$$dt=pd\Phi=\frac{d\Phi}{q}\text{ erit }q=\frac{d\Phi}{dt},$$

quo valore ſubſtituto impetrabimus ſequentem determinationationem:

$$(bb+kk+ss)\frac{d\Phi^2}{dt^2} = 4g\,(s\,\text{fin}.\Phi - (a+b)\,\text{cof}.\Phi + C),$$

vnde porro deducimus

$$dt = \frac{d\Phi\,\sqrt{(bb+kk+ss)}}{2\sqrt{g\,(s\,\text{fin}.\Phi - (a+b)\,\text{cof}.\Phi + C)}},$$

cuius quidem formulae integratio haud patet, ſed facile per quadraturas conſtruitur, et inde plurimum praeſtitiſſe vtique videmur, quod ſaltem partem iſtius quaeſtionis abſtruſiſſimae tam optato ſucceſſu perficere contigerit.

§. 62. Cum autem iſte motus non diutius durare ſit cenſendus, quam donec valor litterae λ vsque ad limitem conſtitutum $\frac{1}{3}$ aſſurgat, per valores integrales modo inuentos etiam valorem litterae λ definiri oportet. Quoniam igitur inuenimus:

$$\lambda = \frac{-b\,dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 2g\,dt^2\,\text{fin}.\Phi}{(a-b)\,d\Phi^2 - s\,dd\Phi + 2g\,dt^2\,\text{cof}.\Phi},$$

hinc primo differentialia ſecundi gradus excludamus ope aequationis inuentae:

$$dd\Phi = \frac{as\,d\Phi^2 + 2bg\,dt^2\,\text{fin}.\Phi + 2gs\,dt^2\,\text{cof}.\Phi}{bb+kk+ss},$$

ac reperiemus

$$\lambda = \frac{-abs\,d\Phi^2 + (bb+kk+ss)s\,d\Phi^2 - (2bgs\,dt^2\,\text{cof}.\Phi + 2g\,(kk+ss)\,dt^2\,\text{fin}.\Phi}{(a-b)\,(bb+kk)\,d\Phi^2 - 2bgs\,dt^2\,\text{fin}.\Phi + 2g\,(bb+kk)\,dt^2\,\text{cof}.\Phi},$$

quae formula per poſitionem $d\Phi = q\,dt$ vlterius reducitur ad hanc:

$$\lambda = \frac{(bb+kk+ss)\,sqq - absqq - 2bgs\,\text{cof}.\Phi + 2g\,(kk+ss)\,\text{fin}.\Phi}{(a-b)\,(bb+kk)\,qq - 2bgs\,\text{fin}.\Phi + 2g\,(bb+kk)\,\text{cof}.\Phi},$$

vbi cum inuenerimus

$$qq = \frac{4g\,(s\,\text{fin}.\Phi - (a+b)\,\text{cof}.\Phi + C)}{bb+kk+ss},$$

hoc valore ſubſtituto concluditur tandem

$$\lambda = \frac{2s\,(bb+kk+ss-ab)\,(s\,\text{fin}.\Phi - (a+b)\,\text{cof}.\Phi + C) - (bb+kk+ss)\,(bs\,\text{cof}.\Phi - (kk+ss)\,\text{fin}.\Phi)}{2\,(a-b)\,(bb+kk)\,(s\,\text{fin}.\Phi - (a+b)\,\text{cof}.\Phi + C) - (bb+kk+ss)\,(bs\,\text{fin}.\Phi - (bb+kk)\,\text{cof}.\Phi)}.$$

§. 63.

§. 63. Hoc igitur modo valor ipſius λ per ſolum angulum Φ exprimitur. In huius autem fractionis tam numeratore quam denominatore triplicis generis membra occurrunt, quorum primum continet ſin. Φ, ſecundum coſ. Φ et tertium conſtantem C. Sic in numeratore membrum primi generis dat

$$(3bbss + 4kkss + 3s^4 - 2abss + bbkk + k^4)\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

membrum ſecundi generis:

$$-s\,\text{coſ.}\,\Phi\,(2ass + 3bss + 3bkk + 3b^3 + 2akk + 2aab),$$

et membrum tertii generis:

$$2s(bb + kk + ss - ab)\,C.$$

Simili modo pro denominatore erit membrum primi generis:

$$s\,\text{ſin.}\,\Phi.(2abb + 2akk - 3b^3 - 3bkk - bss),$$

ſecundi generis:

$$(3b^4 + 4bbkk + bbss - 2aabb - 2aakk + kkss + k^4)\,\text{coſ.}\,\Phi,$$

tertii generis:

$$(2abb + 2akk - 2b^3 - 2bkk)\,C.$$

§. 84. Totum negotium hic eo redit, vt quouis caſu oblato diſpiciatur, quousque angulum Φ augere liceat, ante quam valor iſte pro λ inuentus limitem $\frac{1}{3}$ ſuperare incipiat, hoc enim vbi contigerit, motus, quem hic definimus, natura ſubito mutatur et trabs ſuper axe prorepere incipiet, quem motum aliter niſi per ipſas aequationes differentiales ſecundi gradus definire non licebit.

Appli-

Applicatio huius inuestigationis ad casum specialem supra descriptum.

§. 65. Hic igitur iterum in motum eiusdem trabis inquiremus, quam supra iam sumus contemplati; verum hoc discrimine, vt hic etiam frictionis rationem simus habituri; ipsum autem motum vlterius hac methodo prosequi non licebit, quam donec trabs super cylindro prorepere incipiat. Habebimus igitur pro isto casu sequentes valores:

$$a = \tfrac{1}{2},\ b = \tfrac{1}{2},\ c = 1,\ \text{et}\ kk = 12,$$

sumamusque vt ante $2g = 32$, tum vero pro motus initio sit

$$s = \tfrac{1}{2},\ \Phi = 0,\ \tfrac{ds}{dt} = 0,\ \text{et}\ \tfrac{d\Phi}{dt} = 0,$$

vnde cum hic sumferimus $s = f - a\Phi$, erit $f = \frac{1}{2}$, et quia erat $d\Phi = q\,dt$, ipso initio etiam erit $q = 0$.

§. 66. His igitur valoribus admissis erit

$$ds = -\tfrac{1}{2}d\Phi;\ dds = -\tfrac{1}{2}dd\Phi\ \text{et}\ s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}d\Phi,$$

vnde aequationes pro motu fient

$$\text{I.}\ -\tfrac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi = \frac{12\lambda\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda}.$$

$$\text{II.}\ -s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi = \frac{12\,dd\Phi}{s + \frac{1}{2}\lambda},$$

quarum illa per hanc diuisa praebet

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2}dd\Phi + s\,d\Phi^2 + 32\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi},$$

vnde fit

$$s + \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{-ss\,dd\Phi - \frac{1}{4}dd\Phi + \frac{1}{2}s\,d\Phi^2 + 32s\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi + 16\,dt^2\,\text{fin.}\,\Phi}{-s\,dd\Phi + 32\,dt^2\,\text{cof.}\,\Phi}.$$

§. 67.

§. 67. Cum igitur ex aequatione fecunda fit

$$12\, d\, d\, \Phi = (s + \tfrac{1}{2}\lambda)(32\, d\, t^2 \operatorname{cof.} \Phi - s\, d\, d\, \Phi),$$

fi valorem modo inuentum fubftituamus, habebimus

$$12\, d\, d\, \Phi = - s\, s\, d\, d\, \Phi - \tfrac{1}{4}\, d\, d\, \Phi + \tfrac{1}{2}\, s\, d\, \Phi^2$$
$$+ 32\, s\, d\, t^2 \operatorname{cof.} \Phi + 16\, d\, t^2 \operatorname{fin.} \Phi \text{ fiue}$$

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\, d\, \Phi = \tfrac{1}{2}\, s\, d\, \Phi^2 + 32\, s\, d\, t^2 \operatorname{cof.} \Phi + 16\, d\, t^2 \operatorname{fin.} \Phi),$$

quae aequatio, vti ex praecedentibus colligere licet, integrabilis reddetur fi per $2\, d\, \Phi$ multiplicetur; prodibit enim

$$2(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\, \Phi\, d\, d\, \Phi - s\, d\, \Phi^3$$
$$= 32\, d\, t^2 (2\, s\, d\, \Phi \operatorname{cof.} \Phi + d\, \Phi \operatorname{fin.} \Phi),$$

vbi in fecundo membro loco $d\, \Phi$ fcribatur $-2\, d\, s$, vt habeatur

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, 2\, d\, \Phi\, d\, d\, \Phi + 2\, s\, d\, s\, d\, \Phi^2$$
$$= 32\, d\, t^2 (2\, s\, d\, \Phi \operatorname{cof.} \Phi + d\, \Phi \operatorname{fin.} \Phi),$$

cuius integrale manifefto eft

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\, \Phi^2 = 32\, d\, t^2 (- \operatorname{cof.} \Phi + 2 \textstyle\int s\, d\, \Phi \operatorname{cof.} \Phi).$$

Eft vero

$$\textstyle\int s\, d\, \Phi \operatorname{cof.} \Phi = s \operatorname{fin.} \Phi - \int d\, s \operatorname{fin.} \Phi$$
$$= s \operatorname{fin.} \Phi + \tfrac{1}{2} \textstyle\int d\, \Phi \operatorname{fin.} \Phi = s \operatorname{fin.} \Phi - \tfrac{1}{2} \operatorname{cof.} \Phi,$$

confequenter aequatio noftra integralis erit

$$(\tfrac{49}{4} + s\, s)\, d\, \Phi^2 = 64\, d\, t^2 (s \operatorname{fin.} \Phi - \operatorname{cof.} \Phi + C).$$

§. 68. Quoniam igitur haec aequatio differentialis eft primi gradus et duas tantum variabiles t et Φ complectitur, propter $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi$, hinc folutio per quadraturas abfolui poterit: erit enim

$$64\, d\, t^2 = \frac{(\frac{49}{4} + s\, s)\, d\, \Phi^2}{s \operatorname{fin.} \Phi - \operatorname{cof.} \Phi + C}.$$

Hic

Hic autem ex cognito initio motus conſtans C determinari debet. Cum enim initio fuerit $\Phi=0$, $\frac{d\Phi}{dt}=0$ et $s=\frac{1}{2}$, conſtans iſta ita definietur vt ſit $C=1$, ita vt habeamus hanc aequationem:

$$64\,dt^2=\frac{(\frac{49}{4}+ss)\,d\Phi^2}{s\,\text{ſin.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\Phi+1},$$

ſiue ſi vt ante ponamus $\frac{d\Phi}{dt}=q$, erit

$$(\tfrac{49}{4}+ss)\,qq=64\,(s\,\text{ſin.}\,\Phi-\text{coſ.}\,\Phi+1).$$

§. 69. Reſumamus nunc valorem pro λ primo inuentum, qui erat

$$\lambda=\frac{-\frac{1}{2}dd\Phi+s\,d\Phi^2+32\,dt^2\,\text{ſin}\,\Phi}{-s\,dd\Phi+32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

modo autem inuenimus

$$dd\Phi=\frac{\frac{1}{2}s\,d\Phi^2+32\,s\,dt^2\,\text{coſ.}\,\Phi+16\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{\frac{49}{4}+ss},$$

vbi ſi loco $d\Phi$ ſcribamus $q\,dt$ erit

$$dd\Phi=\frac{dt^2\,(\frac{1}{2}s\,qq+32\,s\,\text{coſ.}\,\Phi+16\,\text{ſin.}\,\Phi)}{\frac{49}{4}+ss}.$$

Ac ſi pariter in valore λ loco $d\Phi$ ſcribamus $q\,dt$, habebimus

$$\lambda=\frac{-\frac{1}{2}dd\Phi+s\,qq\,dt^2+32\,dt^2\,\text{ſin.}\,\Phi}{-s\,dd\varphi+32\,dt^2\,\text{coſ.}\,\varphi},$$

vbi ſi loco $\frac{dd\Phi}{dt^2}$ valorem modo inuentum ſubſtituamus, reperiemus

$$\lambda=\frac{48sqq-64s\,\text{coſ.}\,\varphi+1536\,\text{ſin.}\,\varphi+4s^3qq+128\,ss\,\text{ſin.}\,\varphi}{-2ssqq-64s\,\text{ſin.}\,\varphi+1568\,\text{coſ.}\,\varphi},$$

vbi

vbi iam pro lubitu loco qq ſcribi poterit valor inuentus

$$qq = \frac{64(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

§. 70. Quo autem calculum ſequentem pro maximo angulo φ inueniendo, cui conueniat $\lambda = \frac{1}{3}$, faciliorem reddamus, ponamus praeter $\frac{d\Phi}{dt} = q$ etiam $\frac{dd\Phi}{dt^2} = r$, ita vt ſit

$$(\tfrac{49}{4} + ss)\,r = \tfrac{1}{2}sqq + 32\,s\,\text{coſ.}\,\varphi + 16\,\text{ſin.}\,\varphi,$$

ideoque

$$r = \frac{sqq + 64\,s\,\text{coſ.}\,\varphi + 32\,\text{ſin.}\,\varphi}{\frac{49}{2} + 2ss},$$

exiſtente

$$qq = \frac{64(s\,\text{ſin.}\,\varphi - \text{coſ.}\,\varphi + 1)}{\frac{49}{4} + ss}.$$

Computatis autem pro quouis angulo φ valoribus qq et r erit

$$\lambda = \frac{-r + 2sqq + 64\,\text{ſin.}\,\Phi}{-2rs + 64\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

vnde, ſi pro lubitu aliquot valores angulo φ tribuantur, inde haud difficulter is angulus φ concluditur, cui reſpondeat $\lambda = \frac{1}{3}$.

§. 71. Faciamus periculum, ponendo $\varphi = 18^\circ$, ſiue ſit in partibus radii $\varphi = 0{,}31416$, hincque erit $s = 0{,}34292$, vnde colligimus $qq = 0{,}80163$, hincque $r = 1{,}25474$, vnde conficitur $\lambda = 0{,}31783$, ideoque tantillo minus quam $\frac{1}{3}$, quamobrem ſi tota vis frictionis fuerit $= 0{,}3178\,\Pi$, denotante Π preſſionem, motus trabis per angulum $\varphi = 18^\circ$ ſine fine attritu fieri poterit. Sin autem velimus vt prodeat $\lambda = \frac{1}{8}$, angulum φ aliquantillum vltra 18° augeri oportebit.

§ 72. Quoniam angulus φ non adeo magnus prodiit, vt eius finus notabiliter ab ipfo arcu difcrepet, ita vt fine fenfibili errore fumi poffit fin. $\varphi = \varphi$ et cof. $\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi\varphi$, ob ss prae $\frac{49}{4}$ valde exiguum fatis exacte erit $qq = \frac{128}{49}\varphi$; quare cum $qq = \frac{d\Phi^2}{dt^2}$, erit $dt^2 = \frac{49\, d\Phi^2}{128\,\Phi}$ ideoque $dt = \frac{7\, d\Phi}{8\sqrt{2\Phi}}$, vnde integrando elicitur $t = \frac{7}{8}\sqrt{2\varphi}$. Hinc fi, vti affumfimus fit $\varphi = 0,31316$ et $2\varphi = 0,62832$, fequitur fore $t = 0,69359$, id quod egregie conuenit cum motu huius trabis fupra definito; vnde patet, elapfo tempore $= \frac{7''}{10}$ fore angulum φ propemodum 18°, neque enim frictio in tempore fenfibilem producit mutationem.

§. 73. Quin etiam in genere pro quouis angulo φ, per quem trabs fine attritu procedet, tempus fatis exacte affignari poterit, quandoquidem ifte arcus φ tam eft paruus, vt eius poteftates fuperiores negligi queant. Cum enim in genere inuenerimus

$$qq = \frac{4g(s\,\text{fin.}\,\Phi - (a+b)\,\text{cof.}\,\Phi + C)}{bb + kk + ss},$$

fi conftantem C ita definiamus, vt initio, vbi fuerit $\varphi = 0$, etiam $q = \frac{d\Phi}{dt}$ euanefcat, tum ob $s = f - a\varphi$; fin. $\Phi = \Phi$ et cof. $\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$ erit

$$qq = \frac{4g(f\Phi - \frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi)}{bb + kk + ss}.$$

Quare fi in numeratore $\frac{1}{2}(a-b)\Phi\Phi$, in denominatore au-

 tem

tem $s\,s$ negligamus, fiet

$$q\,q = \frac{4\,f\,g\,\Phi}{b\,b + k\,k} = \frac{d\,\Phi^2}{d\,t^2},$$

hincque deducitur:

$$d\,t = \frac{d\,\Phi\,.\,\sqrt{(b\,b + k\,k)}}{2\sqrt{f\,g\,\Phi}},$$

cuius integrale eſt

$$t = \frac{\sqrt{f\,g\,\Phi}\,\sqrt{(b\,b + k\,k)}}{f\,g} = \sqrt{\frac{\Phi\,(b\,b + k\,k)}{f\,g}},$$

hocque tempus iam in minutis ſecundis erit expreſſum.

DE