



1786

De symptomatibus quatuor punctorum, in eodem plano sitorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

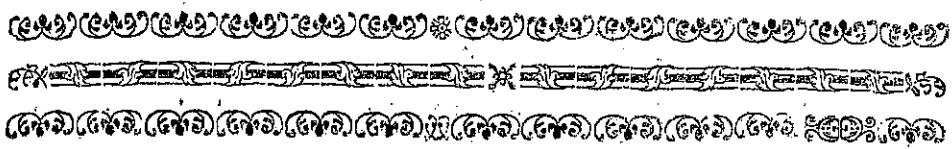
Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De symptomatibus quatuor punctorum, in eodem plano sitorum" (1786). *Euler Archive - All Works*. 601.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/601>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



DE
SYMPTOMATIBVS
QVATVOR PVNCTORVM,
IN EODEM PLANO SITORVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Si quatuor puncta A, B, C, D in eodem plano fuerint sita, eorumque bina lineis rectis inter se iungantur, quarum numerus erit sex, inter has sex rectas semper eiusmodi relatio subsistit, vt ex datis quinque earum, sexta sponte determinetur. Sex autem istae lineae rectae erunt AB, AC, AD, BC, BD, CD, inter quas iuuabit obseruasse, binas dari quasi sibi oppositas, quae nullo communi termino contineantur, et tria dari huiusmodi binarum rectarum paria: Rectae enim AB opponitur recta CD; rectae A 2 vero

Tab. I.
Fig. 1.

vero AC opponitur recta BD , et rectae BC opponitur AD . Deinde vero inter has sex rectas dantur quatuor terniones eiusmodi trium rectarum, quae triangulum includunt, qui sunt 1°. AB, BC, AC ; 2°. AB, AD, BD ; 3°. AC, AD, CD ; 4°. BC, BD, CD ; vbi notandum, in quolibet ternione binas rectas oppositas excludi.

Tab. I.
Fig. 2.

§. 2. Circa tales sex rectas, quibus quatuor puncta in eodem plano sita inter se iunguntur, plures occurrere solent quaestiones; vbi, ex datis quinque, sexta requiri solet. Veluti in quadrilatero ex datis quatuor lateribus cum altera diagonali quaeritur altera diagonalis; vel si, dato triangulo quocunque ABC , in eius plano vbi-cunque accipiatur punctum D et ad id ex tribus angulis A, B, C ducantur tres rectae AD, BD, CD , quaeri solet relatio, quae inter has tres rectas subsistit, vnde ex datis earum duabus tertia definiti queat. Huiusmodi quaestiones a Geometris quidem plures sunt pertractatae, verum earum Solutiones plerumque ingentem propositionum geometricarum farraginem requirunt; quin etiam plures novas rectas in figura duci oportet, ex quibus certae relationes cum reliquis colligi queant, vnde tandem solutio desiderata obtineri possit. Hic igitur in gratiam Geometrarum non parum ostendisse iuuabit, quomodo ope duorum tantum Lemmatum omnes huiusmodi quaestiones pertractare et ad solutionem perducere liceat, ita vt nullis aliis rectis in subsidium vocandis sit opus. Lemmatum quidem horum alterum est notissimum, alterum vero facili demonstratione confirmari potest.

Lem-

Lemma 1.

§. 3. Ex tribus lateribus cuiusque trianguli A B C, quilibet angulus A ita determinatur, vt fit

$$\text{cos. A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$

Lemma 2.

§. 4. Si tres anguli A, B, C ita fuerint comparati, vt eorum vnus A aequetur vel summae vel differentiae duorum reliquorum et horum angulorum cosinus designentur litteris α , β , γ , tum semper erit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

Demonstratio.

Si enim fuerit $A = B \pm C$, tum ex notis Trigonometriae principiis erit

$$\text{cos. A} = \text{cos. B. cos. C} \mp \text{sin. B. sin. C},$$

vnde fit

$$\text{cos. A} - \text{cos. B. cos. C} = \mp \text{sin. B. sin. C},$$

hoc est $\alpha - \beta\gamma = \mp \text{sin. B sin. C}$. Hinc sumtis vtrinque quadratis erit

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = \text{sin. B}^2 \text{sin. C}^2,$$

et quia $\text{sin. B}^2 = 1 - \beta\beta$ et $\text{sin. C}^2 = 1 - \gamma\gamma$, erit facta multiplicatione

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = 1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma$$

sicque termini $\beta\beta\gamma\gamma$ vtrinque se mutuo tollunt, vnde manifestum est fore

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma \text{ q. e. d.}$$

A 3

Coroll.

Corollarium 1.

§. 5. Haec relatio etiam locum habet, si summa trium angulorum $A + B + C$ aequetur quatuor rectis, seu 360° ; nam cum sit $360^\circ - A = B + C$, anguli $360^\circ - A$ cosinus aequè est $= \alpha$ atque ipsius anguli A .

Corollarium 2.

§. 6. At si summa trium angulorum $A + B + C$ aequetur tantum duobus rectis, seu 180° , ita ut iam sit $180^\circ - A = B + C$, quoniam anguli $180^\circ - A$ cosinus non amplius est α , sed $-\alpha$, aequatio relationem inter cosinus exprimens erit $\alpha \alpha + \beta \beta + \gamma \gamma = 1 - 2 \alpha \beta \gamma$.

Scholion.

§. 7. His igitur duobus Lemmatibus praemissis ostendam, quomodo eorum ope omnes huiusmodi quaestiones, in quibus quatuor occurrunt puncta in eodem plano sita, facile per calculum resolui queant.

Problema 1.

Tab. I. §. 8. Si, propositio triangulo quocunque ABC , in
Fig. 2. eodem plano siue intra siue extra triangulum accipiatur punctum quodcunque D , atque ad id ex angulis ducantur rectae AD, BD, CD , inuenire relationem, quae inter has ternas rectas et latera trianguli subsistet.

Solutio.

Vocentur trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, tum vero rectae ad punctum D ductae $AD = p$,
 $BD =$

BD = q et CD = r, ita vt desideretur aequatio relationem inter has sex lineas a, b, c et p, q, r exprimens. Iam hic considerentur anguli ADB, ADC, BDC, quorum summa est 360°, vnde si dicatur

cos. ADB = γ, cos. ADC = β et cos. BDC = α, erit vtique per §. 5.

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

At vero per Lemma primum erit

$$\cos. ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD}, \text{ siue } \gamma = \frac{pp + qq - cc}{2pq},$$

eodemque modo

$$\cos. ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}, \text{ siue } \beta = \frac{pp + rr - bb}{2pr},$$

ac denique

$$\cos. BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot CD}, \text{ siue } \alpha = \frac{qq + rr - aa}{2qr}.$$

Ponamus nunc breuitatis gratia

qq + rr - aa = A; pp + rr - bb = B et pp + qq - cc = C, vt fiat

$$\alpha = \frac{A}{2qr}; \beta = \frac{B}{2pr}; \gamma = \frac{C}{2pq};$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma$$

induct hanc formam:

$$\frac{AA}{4qqrr} + \frac{BB}{4pprr} + \frac{CC}{4ppqq} = 1 + \frac{ABC}{4ppqqrr},$$

quae in 4ppqqrr ducta dat:

$$AApp + BBqq + CCrr = 4ppqqrr + ABC.$$

Iam in hac aequatione loco litterarum A, B, C, valores assumptos ita substituamus, vt formulas pp + qq, pp + rr, qq + rr iunctas seruemus, ac reperietur sequens aequatio:

pp

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & pp(qq+rr)^2 - 2aapp(qq+rr) + a^2pp \\
 & + qq(pp+rr)^2 - 2bbqq(pp+rr) + b^2qq \\
 & + rr(pp+qq)^2 - 2ccrr(pp+qq) + c^2rr
 \end{aligned} \right\} = \\
 & = \left\{ \begin{aligned}
 & (qq+rr)(pp+rr)(pp+qq) + 4ppqqr \\
 & - aa(pp+qq)(pp+rr) - bb(pp+qq)(qq+rr) \\
 & - cc(pp+rr)(qq+rr) \\
 & + aabb(pp+qq) + aacc(pp+rr) + bbcc(qq+rr) \\
 & - aabbcc.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Consideremus nunc primo vtriusque ea tantum membra, quae solas litteras p, q, r , continent; ac in parte sinistra priora membra huius generis, scilicet

$$pp(qq+rr)^2 + qq(pp+rr)^2$$

euoluta, praebent

$$ppq^2 + ppr^2 + 2ppqqr = (pp+qq)(ppqq+rr) + 4ppqqr$$

$$+qqp^2 + qqr^2 + 2ppqqr$$

cui si tertium membrum

$$rr(pp+qq)^2 = (pp+qq)(pprr+qqrr)$$

addatur, obtinebitur

$$\begin{aligned}
 & (pp+qq)(ppqq+pprr+qqrr+rr) + 4ppqqr = \\
 & (pp+qq)(pp+rr)(qq+rr) + 4ppqqr,
 \end{aligned}$$

vnde patet partes, quae vtriusque solas litteras p, q, r involuunt, se mutuo destruere. Hanc ob rem reliqua membra ad partem sinistram translata producent sequentem aequationem:

$$\begin{aligned}
 0 = & \left\{ \begin{aligned}
 & +aa(pp+qq)(pp+rr) + bb(pp+qq)(qq+rr) + cc(pp+rr)(qq+rr) \\
 & - 2aapp(qq+rr) - 2bbqq(pp+rr) - 2ccrr(pp+qq) \\
 & - aabb(pp+qq) - aacc(pp+rr) - bbcc(qq+rr) \\
 & + a^2pp + b^2qq + c^2rr + aabbcc
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Singulis igitur his terminis in ordinem redactis orietur sequens aequatio:

$$aapp$$

$$\left. \begin{aligned} & aapp(aa+pp-bb-cc-qq-rr) + aaqqrr \\ & + bbqq(bb+qq-aa-cc-pp-rr) + bbpprr \\ & + crrr(cc+rr-aa-bb-pp-qq) + ccppqq \\ & \qquad \qquad \qquad + aabbcc \end{aligned} \right\} = 0.$$

Haec igitur est aequatio quaesita, relationem inter sex quantitates a, b, c et p, q, r exprimens.

Corollarium 1.

§. 19. Transferamus terminos negativos ad alteram partem, et nostra aequatio ita succincte exhiberi poterit:

$$\left. \begin{aligned} & aapp(aa+pp) + aaqqrr \\ & + bbqq(bb+qq) + bbpprr \\ & + crrr(cc+rr) + ccppqq \\ & \qquad \qquad \qquad + aabbcc \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & aapp(bb+cc+qq+rr) \\ & + bbqq(aa+cc+pp+rr) \\ & + crrr(aa+bb+pp+qq) \end{aligned} \right.$$

Corollarium 2.

§. 10. Super hac aequatione sequentia sunt animadvertenda. 1°. Omnium sex linearum in aequatione hac tantum quadrata occurrunt, sicque ea manebit eadem, etiam si quaequam harum linearum fiant negativae. 2°. Inter has sex lineas a, b, c & p, q, r , binae sibi oppositae sunt, quae nullum habent terminum communem: primo a cum p ; secundo b cum q et tertio c cum r , quae tria paria in primo ordine occurrunt, ita ut vnumquodque productum ex huiusmodi binis quadratis in summam eorundem sit ductum. 3°. In parte autem dextra eadem occurrunt producta $aapp, bbqq, crrr$, ita ut vnumquodque per summam reliquorum quadratorum sit multiplicatum. 4°. Tandem, ordo posterior ad sinistram partem quatuor constat membris, quorum singula eiusmodi

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. VI. P. I.

B

tres

tres lineas continent quae triangulum constituunt, quemadmodum scilicet a, q, r triangulum BCD includunt, lineae vero b, p, r triangulum ACD , lineae c, p, q triangulum ABD , et a, b, c triangulum ABC ; sicque ratio, qua ista aequatio componitur, luculenter perspicitur.

Corollarium 3.

§. 11. Praeterea vero singularum harum litterarum potestates quartae in aequatione occurrunt; unde intelligitur, si earum quinque fuerint datae, sextam ex iis duplici modo determinari posse, id quod cum rei natura egregie conuenit. Si enim praeter tria latera a, b, c dentur binae rectae p et q , ex figura evidens est, easdem ita ad alteram partem dispositas esse posse, ut sit $Ad = p$ et $Bd = q$, unde sexta r poterit esse vel CD vel Cd .

Corollarium 4.

§. 12. Quod si autem sumamus quinque rectas a, b, c et p, q esse datas, videamus quomodo ex iis sexta r determinetur; quem in finem aequatio quarti gradus ita disponatur:

$$ccr^4 = \begin{cases} +rr((aa-bb)(pp-qq) + cc(aa+bb+pp+qq-c^2)) \\ - (aapp-bbqq)(aa-bb+pp-qq) - cc(aa-qq)(bb-pp), \end{cases}$$

cuius autem ulterior evolutio in nimis taediosas ambages praecipitaret.

Problema

§. 13. *Datis in quadrilatero $ABCD$ quatuor lateribus $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, cum altera diagonali $AC = f$, inuenire alteram diagonalem $BD = x$.*

Solu-

Solutio.

Aequatio in praecedente Problemate inuenta nos facile ad solutionem huius manuducet, si modo perpendamus, inter sex lineas a, b, c, d, f et x , quae hic occurrunt, dari tria binarum oppositarum paria, quae sunt 1°. a et c 2°. b et d ac 3°. f et x . Deinde vero dantur quatuor terniones, quibus triangula includuntur, qui sunt 1°. a, b, f pro triangulo ABC ; 2°. a, d, x pro triangulo ABD ; 3°. b, c, x pro triangulo BCD ; 4°. denique c, d, f pro triangulo ACD . Quibus obseruatis aequatio solutionem continens sequenti modo erit comparata, si modo quae in Corollario 2^{do}. sunt praescripta, rite obseruentur

$$\left. \begin{array}{l} +aacc(aa+cc) + aabbff \\ +bbdd(bb+dd) + aaddxx \\ +ffxx(ff+xx) + bbccxx \\ + ccddff \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +aacc(bb+dd+ff+xx) \\ +bbdd(aa+cc+ff+xx) \\ +ffxx(aa+bb+cc+dd) \end{array} \right.$$

cuius resolutio dabit binos valores ipsius x .

Corollarium I.

§. 14. Ad hoc illustrandum sumamus esse $aa = 1$, $bb = 2$, $cc = 3$, $dd = 4$, $ff = 5$, et ex his valoribus colligitur ista aequatio: $5xx = 26xx - 25$, ideoque

$$xx = \frac{13 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

Hinc ergo in fractionibus decimalibus erit, vel

$$xx = 3,92665, \text{ vel } xx = 1,27335,$$

extracta igitur radice quadrata erit vel $x = 1,981$ vel $x = 1,128$.

Corollarium 2.

§. 15. Cum hic de quadrilateris agatur, quoniam duae species principales tractari solent, quarum altera continet parallelogramma, in quibus latera opposita sunt aequalia $c = a$ et $d = b$, altera vero quadrilatera circulo inscripta, in quibus semper est $ac + bd = fx$, has duas species in sequentibus exemplis evoluamus.

Exemplum 1.

§. 16. Sint quadrilateri bina latera opposita inter se aequalia, scilicet $AB = CD$ et $BC = AD$, siue $c = a$ et $b = d$, quibus positis aequatio nostra hanc induet formam:

$$2a^6 + 2b^6 + ffxx(ff + xx) + 2aa bb ff + 2aabbxx \left. \vphantom{2a^6} \right\} = \begin{cases} a^4(2bb + ff + xx) \\ b^4(2aa + ff + xx) \\ ffxx(2aa + bb), \end{cases}$$

quae, secundum dimensionem litterarum f et x disposita, ita adornetur:

$$\left. \begin{aligned} f^4 xx - 2ffxx(aa + bb) - ff(aa - bb)^2 - xx(aa - bb)^2 \\ + ff x^4 + 2(aa - bb)^2(aa + bb) \end{aligned} \right\} = 0$$

quae diuisorem habere deprehenditur

$$ff + xx - 2(aa + bb),$$

vnde nascitur quotus $ffxx - (aa - bb)^2$, sicque hinc nascitur duplex solutio: prior scilicet

$$ff + xx = 2aa + 2bb,$$

quae continet proprietatem notissimam omnium parallelogrammorum, qua summa quadratorum diagonalium aequatur

sur summae quadratorum laterum. Praeterea vero alia
 Solutio locum habere potest, qua fit $fx = aa - bb$, in
 parallelogramma neutiquam competens; refertur haec pro- Tab. I.
 prietas ad eam trapeziorum speciem $ACBD$, in qua Fig. 4.
 tera bina latera AC et BD sunt inter se parallela, al-
 tera vero BC et AD inter se aequalia: in hac enim fi-
 gura utique erit

$$AC \cdot BD = AB^2 - BC^2,$$

sive cum in hac figura latera AB et CD manifesto sint
 aequalia, erit

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD,$$

quae proprietas declarat hanc figuram circulo esse inscri-
 ptibilem, in qua cum iam rectae AB et CD sint diago-
 nales, per Theorema Ptolemaicum erit utique

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD.$$

Exemplum 2.

§. 17. Sumamus nunc quadrilaterum $ABCD$, Fig. 1.
 cum suis diagonalibus AC et BD , ita esse comparatum
 ut sit $fx = ac + bd$, sive

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Nunc in nostra aequatione generali loco $ffxx$ scribamus
 $(ac + bd)^2$, ac membra secundum ff et xx disponamus,
 unde depromamus primo ea, quae continent formulam
 $ff + xx$, deinde ea, quae continent seorsim ff et xx ,
 denique vero ea quae neque f continent neque x , quo
 observato nostra aequatio ad sequentem formam redigetur:

$$\left. \begin{aligned} & (ff+xx)(ac+bd)^2 - aacc - bbdd + ff(aabb+ccdd) + xx(aadd+bbcc) \\ & + aacc(aa+cc-bb-dd) - (ac+bd)^2(aa+bb+cc+dd) \\ & + bbdd(bb+dd-aa-cc) \end{aligned} \right\} = 0$$

quare cum huius aequationis primum membrum contrahatur in

$$2abcd(ff+xx),$$

tota aequatio sequentem accipiet formam:

$$ff(ab+cd)^2 + xx(ad+bc)^2 - 2bd(ac+bd)(aa+cc) - 2ac(ac+bd)(bb+dd) = 0,$$

cuius postremum membrum in suos factores resolutum producet:

$$ff(ab+cd)^2 + xx(ad+bc)^2 - 2(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = 0,$$

in qua aequatione si loco $ac+bd$ iterum scribatur fx , prodibit

$$ff(ab+cd)^2 + xx(ad+bc)^2 - 2fx(ab+cd)(ad+bc) = 0,$$

quae forma manifesto est quadratum; vnde sequitur fore

$$f(ab+cd) - x(ad+bc) = 0,$$

quae aequatio ergo praeter assumptam $fx = ac + bd$ etiam exprimit insignem proprietatem quadrilaterorum circulo inscriptorum.

Corollarium.

§. 18. Pro omnibus igitur quadrilateris circulo inscriptis non solum valet proprietas notissima $fx = ac + bd$, sed etiam haec altera $\frac{f}{x} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$, quibus duabus aequationibus demum natura horum quadrilaterorum exhauritur. Hinc autem si prior per posteriorem vel multiplicetur vel diuidatur, ambae diagonales seorsim determinabuntur sequentibus formulis:

$$ff = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \text{ et } xx = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Scho-

Scholion.

§. 19. Hae autem duae formulae immediate ex ea horum quadrilaterorum proprietate, qua bini anguli oppositi duobus rectis aequantur, facillime deriuantur. Cum enim summa cosinum duorum angulorum, quorum aggregatum duobus rectis aequatur, semper sit nihilo aequalis, erit tam $\text{cos. } B A D + \text{cos. } B C D = 0$, quam

$$\text{cos. } A B C + \text{cos. } C D A = 0;$$

vnde, si ex triangulis hi cosinus per Lemma primum definiantur, hae duae orientur aequationes:

$$I. \frac{a a + d d - x x}{2 a d} + \frac{b b + c c - x x}{2 b c} = 0.$$

$$II. \frac{a a + b b - f f}{2 a b} + \frac{c c + d d - f f}{2 c d} = 0,$$

ex quarum illa determinabitur $x x$, ex hac vero $f f$, sequenti modo:

$$x x = \frac{a b c + b c d + a b d + a c d}{b c + a d} = \frac{(a c + b d)(a b + c d)}{a d + b c} \text{ et}$$

$$f f = \frac{a c d + b b c d + a b c c + a b d d}{a b + c d} = \frac{(a c + b d)(a d + b c)}{a b + c d}.$$

Circa haec quadrilatera adiungamus sequentem quaestionem Diophanteam.

Quaestio.

§. 20. Inuenire quadrilaterum circulo inscriptum, cuius tam latera quam ambae diagonales numeris rationalibus exprimantur.

Solutio.

Positis vt supra quatuor lateribus $A B = a$, $B C = b$, $C D = c$ et $D A = d$ et diagonalibus $A C = f$ et $B D = x$,

ne-

neceffe est vt hae duae formulae:

$$ff = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \text{ et } xx = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

reddantur quadrata, quarum productum cum iam sit quadratum, tantum opus est vt alterutra efficiat quadratum.

Fiat igitur $\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} = \square$, quod euenit si fuerit

$$(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc) = \square,$$

id quod duplici modo commode fieri poterit.

I°. Enim statuatur

$$(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)^2 z z,$$

critque facta euolutione

$$aabd + abbc + acdd + bccd = (ac + bd)^2 z z,$$

cui conditioni si fuerit satisfactum, fiet

$$f \frac{(ac + bd)z}{ab + cd} \text{ et } x = \frac{(ac + bd)z}{ad + bc}.$$

Hic autem statim fumatur $z = d$, vt fiat

$$aabd + abbc + bccd = b^2 d^2, \text{ siue}$$

$$aad + abc + ccd = d^2,$$

vnde colligitur $b = \frac{d^2 - a(a + c)}{ac}$, ficque tria latera a , c , d pro subitu assumi possunt, quandoquidem ex iis quartum latus b , tum vero ambae diagonales f et x , rationaliter definiuntur, cum sit

$$f = \frac{d(ac + bd)}{ab + cd} \text{ et } x = \frac{d(ac + bd)}{ad + bc}.$$

II°. Deinde vero euoluatur productum illud ex tribus factoribus constans, quod quadratum reddi oportet et quod ita se habebit:

$$\left. \begin{aligned} a^2 b c d + a a (b b c c + c c d d + b b d d) \\ a b c d (b b + c c + d d) + b b c c d d \end{aligned} \right\} = \square.$$

Ad hanc formam tractabiliorem reddendam faciamus bre-
vitatibus gratia

$$b c d = p,$$

$$b b + c c + d d = q \text{ et}$$

$$b b c c + c c d d + b b d d = r,$$

ut haec aequatio resoluenda habeatur:

$$a^2 p + a a r + a p q + p p = \square;$$

cuius radix quadrata statuatur $= \frac{1}{2} a q + p$, cuius quadra-
tum cum sit $\frac{1}{4} a a q q + a p q + p p$, hoc inde subtractum
relinquet hanc aequationem:

$$a^2 p + a a r = \frac{1}{4} a a q q,$$

unde colligitur $a = \frac{q q - 4 r}{4 p}$: Est vero

$$q q - 4 r = b^4 + c^4 + d^4 - 2 b b c c - 2 b b d d - 2 c c d d,$$

sive

$$q q - 4 r = (c c + d d - b b)^2 - 4 c c d d,$$

quae expressio resolvitur in hos factores:

$$(c c + d d + 2 c d - b b) \text{ et } (c c + d d - 2 c d - b b),$$

quorum quia uterque est iterum differentia duorum qua-
dratorum, omnino habebimus quatuor factores simplices
istos:

$$(c + d + b) (c + d - b) (c - d + b) (c - d - b);$$

ficque nacti sumus sequentem solutionem:

$$a = \frac{(c + d + b) (c + d - b) (c - d + b) (c - d - b)}{4 b c d}.$$

Hoc autem valore inuento radix quadrata nostri producti ex tribus factoribus constantis erit.

$$\frac{1}{2} a q + p = \frac{q^2 - 4qr + sp}{sp}$$

Praestat autem ex valore inuento ipsius a ipsas ternas formulas $ac + bd$, $ab + cd$, et $ad + bc$ computare, quibus inuentis erit

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \text{ et } x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}},$$

quandoquidem hinc radices extrahere licebit.