1786

De symptomatibus quatuor punctorum, in eodem plano sitorum

Leonhard Euler

DE
SYMPTOMATIBVS QVATVOR PVNCTORVM, IN EODEM PLANO SITORVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Si quatuor puncta A, B, C, D in eodem plano fuerint sita, eorumque bina lineis rectis inter se iungantur, quarum numerus erit sex, inter has sex rectas semper eiusmodi relatio subsistit, vt ex datis quinque earum, sexta sponte determinetur. Sex autem istae lineae rectae erunt AB, AC, AD, BC, BD, CD, inter quas iuuabit obseruasse, binas dari quasi sibi oppositas, quae nullo communi termino contineantur, et tria dari huiusmodi binarum rectarum paria: Rectae enim AB opponitur recta CD; rectae Tab. I. Fig. 1.

vero A C opponitur recta B D, et rectae B C opponitur A D. Deinde vero inter has sex rectas dantur quatuor terniones eiusmodi trium rectarum, quae triangulum includunt, qui sunt 1°. A B, B C, A C; 2°. A B, A D, B D; 3°. A C, A D, C D; 4°. B C, B D, C D; vbi notandum, in quolibet ternione binas rectas oppositas excludi.

§. 2. Circa tales sex rectas, quibus quatuor puncta in eodem plano sita inter se iunguntur, plures occurrere solent quaestiones; vbi, ex datis quinque, sexta requiri solet. Veluti in quadrilatero ex datis quatuor lateribus cum altera diagonali quaeritur altera diagonalis; vel si, dato triangulo quocunque A B C, in eius plano vbicunque accipiatur punctum D et ad id ex tribus angulis A, B, C ducantur tres rectae A D, B D, C D, quaeri solet relatio, quae inter has tres rectas subsistit, vnde ex datis earum duabus tertia definiri queat. Huiusmodi quaestiones a Geometris quidem plures sunt pertractatae, verum earum Solutiones plerumque ingentem propositionum geometricarum farraginem requirunt; quin etiam plures nouas rectas in figura duci oportet, ex quibus certae relationes cum reliquis colligi queant, vnde tandem solutio desiderata obtineri possit. Hic igitur in gratiam Geometrarum non parum ostendisse iuuabit, quomodo ope duorum tantum Lemmatum omnes huiusmodi quaestiones pertractare et ad solutionem perducere liceat, ita vt nullis aliis rectis in subsidium vocandis sit opus. Lemmatum quidem horum alterum est notissimum, alterum vero facili demonstratione confirmari potest.

Tab. I. Fig. 2.

Lem-

Lemma 1.

§. 3. Ex tribus lateribus cuiusque trianguli A B C, quilibet angulus A ita determinatur, vt sit

$$\text{cof. } A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB.\,AC}.$$

Lemma 2.

§. 4. Si tres anguli A, B, C ita fuerint comparati, vt eorum vnus A aequetur vel summae vel differentiae duorum reliquorum et horum angulorum cosinus designentur litteris α, β, γ, tum semper erit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

Demonstratio.

Si enim fuerit $A = B \pm C$, tum ex notis Trigonometriae principiis erit

$$\text{cof. } A = \text{cof. } B.\ \text{cof. } C \mp \text{fin. } B.\ \text{fin. } C,$$

vnde fit

$$\text{cof. } A - \text{cof. } B.\ \text{cof. } C = \mp \text{fin. } B.\ \text{fin. } C,$$

hoc est $\alpha - \beta\gamma = \mp$ fin. B fin. C. Hinc sumtis vtrinque quadratis erit

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = \text{fin. } B^2\ \text{fin. } C^2,$$

et quia fin. $B^2 = 1 - \beta\beta$ et fin. $C^2 = 1 - \gamma\gamma$, erit facta multiplicatione

$$\alpha\alpha - 2\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma = 1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma$$

sicque termini $\beta\beta\gamma\gamma$ vtrinque se mutuo tollunt, vnde manifestum est fore

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma \text{ q. e. d.}$$

 Coroll.

Corollarium 1.

§. 5. Haec relatio etiam locum habet, ſi ſumma trium angulorum $A + B + C$ aequetur quatuor rectis, ſeu $360°$; nam cum ſit $360° - A = B + C$, anguli $360° - A$ coſinus aeque eſt $= \alpha$ atque ipſius anguli A.

Corollarium 2.

§. 6. At ſi ſumma trium angulorum $A + B + C$ aequetur tantum duobus rectis, ſeu $180°$, ita vt iam ſit $180° - A = B + C$, quoniam anguli $180° - A$ coſinus non amplius eſt α, ſed $-\alpha$, aequatio relationem inter coſinus exprimens erit $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 - 2\alpha\beta\gamma$.

Scholion.

§. 7. His igitur duobus Lemmatibus praemiſſis oſtendam, quomodo eorum ope omnes huiusmodi quaeſtiones, in quibus quatuor occurrunt puncta in eodem plano ſita, facile per calculum reſolui queant.

Problema 1.

§. 8. *Si, propoſito triangulo quocunque ABC, in eodem plano ſiue intra ſiue extra triangulum accipiatur punctum quodcunque D, atque ad id ex angulis ducantur rectae AD, BD, CD, inuenire relationem, quae inter has ternas rectas et latera trianguli ſubſiſtet.*

Tab. I. Fig. 2.

Solutio.

Vocentur trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, tum vero rectae ad punctum D ductae $AD = p$,

BD =

$BD = q$ et $CD = r$, ita vt desideretur aequatio relationem inter has sex lineas a, b, c et p, q, r exprimens. Iam hic considerentur anguli ADB, ADC, BDC, quorum summa est $360°$, vnde si dicatur

$$\cos. ADB = \gamma, \quad \cos. ADC = \beta \text{ et } \cos. BDC = \alpha,$$

erit vtique per §. 5.

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma.$$

At vero per Lemma primum erit

$$\cos. ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD.BD}, \text{ siue } \gamma = \frac{pp + qq - cc}{2pq},$$

eodemque modo

$$\cos. ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD.CD}, \text{ siue } \beta = \frac{pp + rr - bb}{2pr},$$

ac denique

$$\cos. BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD.CD}, \text{ siue } \alpha = \frac{qq + rr - aa}{2qr}.$$

Ponamus nunc breuitatis gratia

$$qq + rr - aa = A; \; pp + rr - bb = B \text{ et } pp + qq - cc = C,$$

vt fiat

$$\alpha = \frac{A}{2qr}; \; \beta = \frac{B}{2pr}; \; \gamma = \frac{C}{2pq};$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1 + 2\alpha\beta\gamma$$

induet hanc formam:

$$\frac{AA}{4qqrr} + \frac{BB}{4pprr} + \frac{CC}{4ppqq} = 1 + \frac{ABC}{4ppqqrr},$$

quae in $4ppqqrr$ ducta dat:

$$AApp + BBqq + CCrr = 4ppqqrr + ABC.$$

Iam in hac aequatione loco litterarum A, B, C, valores assumtos ita substituamus, vt formulas $pp + qq$, $pp + rr$, $qq + rr$ iunctas seruemus, ac reperietur sequens aequatio:

pp

$$\left.\begin{array}{l} pp(qq+rr)^2-2aapp(qq+rr)+a^4pp \\ +qq(pp+rr)^2-2bbqq(pp+rr)+b^4qq \\ +rr(pp+qq)^2-2ccrr(pp+qq)+c^4rr \end{array}\right\} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} (qq+rr)(pp+rr)(pp+qq)+4ppqqrr \\ \quad -aa(pp+qq)(pp+rr)-bb(pp+qq)(qq+rr) \\ \quad -cc(pp+rr)(qq+rr) \\ \quad +aabb(pp+qq)+aacc(pp+rr)+bbcc(qq+rr) \\ \quad -aabbcc. \end{array}\right.$$

Confideremus nunc primo vtrinque ea tantum membra, quae folas litteras p, q, r, continent; ac in parte finiftra bina priora membra huius generis, fcilicet

$$pp(qq+rr)^2+qq(pp+rr)^2$$

euoluta, praebent

$$\begin{array}{l} ppq^4+ppr^4+2ppqqrr \\ +qqp^4+qqr^4+2ppqqrr \end{array} = (pp+qq)(ppqq+r^4)+4ppqqrr$$

cui fi tertium membrum

$$rr(pp+qq)^2=(pp+qq)(pprr+qqrr)$$

addatur, obtinebitur

$$(pp+qq)(ppqq+pprr+qqrr+r^4)+4ppqqrr= \\ (pp+qq)(pp+rr)(qq+rr)+4ppqqrr,$$

vnde patet partes, quae vtrinque folas litteras p, q, r inuoluunt, fe mutuo deftruere. Hanc ob rem reliqua membra ad partem finiftram translata producent fequentem aequationem:

$$0=\left\{\begin{array}{l} +aa(pp+qq)(pp+rr)+bb(pp+qq)(qq+rr)+cc(pp+rr)(qq+rr) \\ -2aapp(qq+rr)-2bbqq(pp+rr)-2ccrr(pp+qq) \\ -aabb(pp+qq)\quad -aacc(pp+rr)\quad -bbcc(qq+rr) \\ +a^4pp+b^4qq+c^4rr+aabbcc \end{array}\right.$$

Singulis igitur his terminis in ordinem redactis orietur fequens aequatio:

$aapp$

$$\left.\begin{array}{l} aapp(aa+pp-bb-cc-qq-rr) \\ +bbqq(bb+qq-aa-cc-pp-rr) \\ +ccrr(cc+rr-aa-bb-pp-qq) \end{array}\begin{array}{l} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{array}\right\}=0.$$

Haec igitur eſt aequatio quaeſita, relationem inter ſex quantitates a, b, c et p, q, r exprimens.

Corollarium 1.

§. 19. Transferamus terminos negativos ad alteram partem, et noſtra aequatio ita ſuccincte exhiberi poterit:

$$\left.\begin{array}{l} aapp(aa+pp) \\ +bbqq(bb+qq) \\ +ccrr(cc+rr) \end{array}\begin{array}{l} +aaqqrr \\ +bbpprr \\ +ccppqq \\ +aabbcc \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} aapp(bb+cc+qq+rr) \\ +bbqq(aa+cc+pp+rr) \\ +ccrr(aa+bb+pp+qq) \end{array}\right.$$

Corollarium 2.

§. 10. Super hac aequatione ſequentia ſunt animadvertenda. 1°. Omnium ſex linearum in aequatione hac tantum quadrata occurrunt, ſicque ea manebit eadem, etiamſi quaepiam harum linearum fiant negatiuae. 2°. Inter has ſex lineas a, b, c & p, q, r, binae ſibi oppoſitae ſunt, quae nullum habent terminum communem: primo a cum p; ſecundo b cum q et tertio c cum r, quae tria paria in primo ordine occurrunt, ita vt vnumquodque productum ex huiusmodi binis quadratis in ſummam eorundem ſit ductum. 3°. In parte autem dextra eadem occurrunt producta $aapp$, $bbqq$, $ccrr$, ita vt vnumquodque per ſummam reliquorum quadratorum ſit multiplicatum. 4°. Tandem, ordo poſterior ad ſiniſtram partem quatuor conſtat membris, quorum ſingula eiusmodi

tres

tres lineas continent quae triangulum conſtituunt, quemadmodum ſcilicet a, q, r triangulum B C D includunt, lineae vero b, p, r triangulum A C D, lineae c, p, q triangulum A B D, et a, b, c triangulum A B C; ſicque ratio, qua iſta aequatio componitur, luculenter perſpicitur.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 3. §. 11. Praeterea vero ſingularum harum litterarum poteſtates quartae in aequatione occurrunt; vnde intelligitur, ſi earum quinque fuerint datae, ſextam ex iis duplici modo determinari poſſe, id quod cum rei natura egregie conuenit. Si enim praeter tria latera a, b, c dentur binae rectae p et q, ex figura euidens eſt, easdem ita ad alteram partem diſpoſitas eſſe poſſe, vt ſit A $d = p$ et B $d = q$, vnde ſexta r poterit eſſe vel C D vel C d.

Corollarium 4.

§. 12. Quod ſi autem ſumamus quinque rectas a, b, c et p, q eſſe datas, videamus quomodo ex iis ſexta r determinetur; quem in finem aequatio quarti gradus ita diſponatur:

$$ccr^4 = \begin{cases} +rr((aa-bb)(pp-qq)+cc(aa+bb+pp+qq-c^4) \\ -(aapp-bbqq)(aa-bb+pp-qq)-cc(aa-qq)(bb-pp), \end{cases}$$

cuius autem vlterior euolutio in nimis taedioſas ambages praecipitaret.

Problema

Tab. I. Fig. 1. §. 13. *Datis in quadrilatero* A B C D *quatuor lateribus* A B = a, B C = b, C D = c, D A = d, *cum altera diagonali* A C = f, *inuenire alteram diagonalem* BD = x.

Solu-

Solutio.

Aequatio in praecedente Problemate inuenta nos facile ad solutionem huius manuducet, si modo perpendamus, inter sex lineas a, b, c, d, f et x, quae hic occurrunt, dari tria binarum oppositarum paria, quae sunt 1°. a et c 2°. b et d ac 3°. f et x. Deinde vero dantur quatuor terniones, quibus triangula includuntur, qui sunt 1°. a, b, f pro triangulo A B C; 2°. a, d, x pro triangulo A B D; 3°. b, c, x pro triangulo B C D; 4°. denique c, d, f pro triangulo A C D. Quibus obseruatis aequatio solutionem continens sequenti modo erit comparata, si modo quae in Corollario 2do. sunt praescripta, rite obseruentur

$$\left.\begin{matrix} +aacc(aa+cc) \\ +bbdd(bb+dd) \\ +ffxx(ff+xx) \end{matrix} \begin{matrix} +aabbff \\ +aaddxx \\ +bbccxx \\ +ccddff \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +aacc(bb+dd+ff+xx) \\ +bbdd(aa+cc+ff+xx) \\ +ffxx(aa+bb+cc+dd) \end{matrix}\right.$$

cuius resolutio dabit binos valores ipsius x.

Corollarium 1.

§. 14. Ad hoc illustrandum sumamus esse $aa = 1$, $bb = 2$, $cc = 3$, $dd = 4$, $ff = 5$, et ex his valoribus colligitur ista aequatio: $5x^4 = 26xx - 25$, ideoque

$$xx = \frac{13 \pm \sqrt{44}}{5}.$$

Hinc ergo in fractionibus decimalibus erit, vel

$$xx = 3,92665, \text{ vel } xx = 1,27335,$$

extracta igitur radice quadrata erit vel $x = 1,981$ vel $x = 1,128$.

Corollarium 2.

§. 15. Cum hic de quadrilateris agatur, quoniam duae fpecies principales tractari folent, quarum altera continet parallelogramma, in quibus latera oppofita funt aequalia $c = a$ et $d = b$, altera vero quadrilatera circulo infcripta, in quibus femper eft $ac + bd = fx$, has duas fpecies in fequentibus exemplis euoluamus.

Exemplum 1.

§. 16. Sint quadrilateri bina latera oppofita inter fe aequalia, fcilicet AB = CD et BC = AD, fiue $c = a$ et $b = d$, quibus pofitis aequatio noftra hanc induet formam:

$$\left.\begin{array}{r} 2a^6 + 2b^6 + ffxx(ff + xx) + 2aabbff \\ + 2aabbxx \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^4(2bb + ff + xx) \\ b^4(2aa + ff + xx) \\ ffxx(2aa + bb), \end{array}\right.$$

quae, fecundum dimenfionem litterarum f et x difpofita, ita adornetur:

$$\left.\begin{array}{l} f^4xx - 2ffxx(aa + bb) - ff(aa - bb)^2 - xx(aa - bb)^2 \\ + ffx^4 \qquad + 2(aa - bb)^2(aa + bb) \end{array}\right\} = 0$$

quae diuiforem habere deprehenditur

$$ff + xx - 2(aa + bb),$$

vnde nafcitur quotus $ffxx - (aa - bb)^2$, ficque hinc nafcitur duplex folutio: prior fcilicet

$$ff + xx = 2aa + 2bb,$$

quae continet proprietatem notiffimam omnium parallelagrammorum, qua fumma quadratorum diagonalium aequatur

tur summae quadratorum laterum. Praeterea vero alia Solutio locum habere potest, qua fit $fx = aa - bb$, in parallelogramma neutiquam competens; refertur haec proprietas ad eam trapeziorum speciem ACBD, in qua altera bina latera AC et BD sunt inter se parallela, altera vero BC et AD inter se aequalia: in hac enim figura vtique erit Tab. I. Fig. 4.

$$AC . BD = AB^2 - BC^2,$$

siue cum in hac figura latera AB et CD manifesto sint aequalia, erit

$$AB . CD = AC . BD + BC . AD,$$

quae proprietas declarat hanc figuram circulo esse inscriptibilem, in qua cum iam rectae AB et CD sint diagonales, per Theorema Ptolemaicum erit vtique

$$AB . CD = AC . BD + BC . AD.$$

Exemplum 2.

§. 17. Sumamus nunc quadrilaterum ABCD, Fig. 1. cum suis diagonalibus AC et BD, ita esse comparatum vt sit $fx = ac + bd$, siue

$$AC . BD = AB . CD + BC . AD.$$

Nunc in nostra aequatione generali loco $ffxx$ scribamus $(ac + bd)^2$, ac membra secundum ff et xx disponamus, vnde depromamus primo ea, quae continent formulam $ff + xx$, deinde ea, quae continent seorsim ff et xx, denique vero ea quae neque f continent neque x, quo obseruato nostra aequatio ad sequentem formam redigetur:

$$\left.\begin{array}{l}(ff+xx)(ac+bd)^2-aacc-bbdd)+ff(aabb+ccdd)+xx(aadd+bbcc)\\+aacc(aa+cc-bb-dd)-(ac+bd)^2(aa+bb+cc+dd)\\+bbdd(bb+dd-aa-cc)\end{array}\right\}=0$$

quare cum huius aequationis primum membrum contrahatur in

$$2abcd\,(ff+xx),$$

tota aequatio sequentem accipiet formam:

$$\begin{array}{r}ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2bd(ac+bd)(aa+cc)\\-2ac(ac+bd)(bb+dd)\end{array}=0,$$

cuius postremum membrum in suos factores resolutum producet:

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

in qua aequatione si loco $ac+bd$ iterum scribatur fx, prodibit

$$ff(ab+cd)^2+xx(ad+bc)^2-2fx(ab+cd)(ad+bc)=0,$$

quae forma manifesto est quadratum; vnde sequitur fore

$$f(ab+cd)-x(ad+bc)=0,$$

quae aequatio ergo praeter assumtam $fx=ac+bd$ etiam exprimit insignem proprietatem quadrilaterorum circulo inscriptorum.

Corollarium.

§. 18. Pro omnibus igitur quadrilateris circulo inscriptis non solum valet proprietas notissima $fx=ac+bd$, sed etiam haec altera $\frac{f}{x}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$, quibus duabus aequationibus demum natura horum quadrilaterorum exhauritur. Hinc autem si prior per posteriorem vel multiplicetur vel diuidatur, ambae diagonales seorsim determinabuntur sequentibus formulis:

$$ff=\frac{(ac+bd)(ad+bd)}{ab+cd}\text{ et }xx=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Scho-

Scholion.

§. 19. Hae autem duae formulae immediate ex ea horum quadrilaterorum proprietate, qua bini anguli oppositi duobus rectis aquantur, facillime deriuantur. Cum enim summa cosinuum duorum angulorum, quorum aggregatum duobus rectis aequatur, semper fit nihilo aequalis, erit tam cos. $BAD +$ cos. $BCD = 0$, quam

$$\text{cos. } ABC + \text{cos. } CDA = 0;$$

vnde, si ex triangulis hi cosinus per Lemma primum definiantur, hae duae orientur aequationes:

$$\text{I. } \frac{aa + dd - xx}{2ad} + \frac{bb + cc - xx}{2bc} = 0,$$

$$\text{II. } \frac{aa + bb - ff}{2ab} + \frac{cc + dd - ff}{2cd} = 0,$$

ex quarum illa determinabitur xx, ex hac vero ff, sequenti modo:

$$xx = \frac{aabc + bcdd + abbd + accd}{bc + ad} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} \text{ et}$$

$$ff = \frac{aacd + bbcd + abcc + abdd}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Circa haec quadrilatera adiungamus sequentem quaestionem Diophanteam.

Quaestio.

§. 20. *Inuenire quadrilaterum circulo inscriptum, cuius tam latera quam ambae diagonales numeris rationalibus exprimantur.*

Solutio.

Positis vt supra quatuor lateribus $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ et $DA = d$ et diagonalibus $AC = f$ et $BD = x$, ne-

necesse est vt hae duae formulae:

$$ff = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} \text{ et } xx = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

reddantur quadrata, quarum productum cum iam sit quadratum, tantum opus est vt alterutra efficiat quadratum. Fiat igitur $\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd} = \square$, quod euenit si fuerit

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = \square,$$

id quod duplici modo commode fieri poterit.

I°. Enim statuatur

$$(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc) = (ac+bd)^2 zz,$$

eritque facta euolutione

$$aabd + abbc + acdd + bccd = (ac+bd)^2 zz,$$

cui conditioni si fuerit satisfactum, fiet

$$f \frac{(ac+bd)z}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{(ac+bd)z}{ad+bc}.$$

Hic autem statim sumatur $z = d$, vt fiat

$$aabd + abbc + bccd = bd^3, \text{ siue}$$

$$aad + abc + ccd = d^3,$$

vnde colligitur $b = \frac{d^3 - d(aa+cc)}{ac}$, sicque tria latera a, c, d pro subitu assumi possunt, quandoquidem ex iis quartum latus b, tum vero ambae diagonales f et x, rationaliter definientur, cum sit

$$f = \frac{d(ac+bd)}{ab+cd} \text{ et } x = \frac{d(ac+bd)}{ad+bc}.$$

II°. Deinde vero euoluatur productum illud ex tribus factoribus constans, quod quadratum reddi oportet et quod ita se habebit:

$$\left.\begin{array}{l} a^3 bcd + aa(bbcc + ccdd + bbdd) \\ abcd(bb + cc + dd) + bbccdd \end{array}\right\} = \square.$$

Ad hanc formam tractabiliorem reddendam faciamus brevitatis gratia

$$bcd = p,$$

$$bb + cc + dd = q \text{ et}$$

$$bbcc + ccdd + bbdd = r,$$

vt haec aequatio resoluenda habeatur:

$$a^3 p + aar + apq + pp = \square;$$

cuius radix quadrata statuatur $= \frac{1}{2}aq + p$, cuius quadratum cum sit $\frac{1}{4}aaqq + apq + pp$, hoc inde subtractum relinquet hanc aequationem:

$$a^3 p + aar = \tfrac{1}{4}aaqq,$$

vnde colligitur $a = \frac{qq - 4r}{4p}$: Est vero

$$qq - 4r = b^4 + c^4 + d^4 - 2bbcc - 2bbdd - 2ccdd,$$

siue

$$qq - 4r = (cc + dd - bb)^2 - 4ccdd,$$

quae expressio resoluitur in hos factores:

$$(cc + dd + 2cd - bb) \text{ et } (cc + dd - 2cd - bb),$$

quorum quia vterque est iterum differentia duorum quadratorum, omnino habebimus quatuor factores simplices istos:

$$(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b);$$

sicque nacti sumus sequentem solutionem:

$$a = \frac{(c + d + b)(c + d - b)(c - d + b)(c - d - b)}{4bcd}.$$

 Hoc

Hoc autem valore inuento radix quadrata noſtri producti ex tribus factoribus conſtantis erit

$$\tfrac{1}{2} a q + p = \frac{q^3 - 4 q r + s p p}{s p}.$$

Praeſtat autem ex valore inuento ipſius a ipſas ternas formulas $ac + bd$, $ab + cd$, et $ad + bc$ computare, quibus inuentis erit

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \text{ et } x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}},$$

quandoquidem hinc radices extrahere licebit.