1785

Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium

Leonhard Euler

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-20)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-20)}.$$

VI. Cafus

quo $d=25$ ideoque $b=a-25$.

Hoc cafu erit

$$r=(93)(68)\lambda^{2}+(88)(63)\lambda^{7}+(83)(58)\lambda^{12}\ldots(a+3)(a-22)\lambda^{92-a},$$

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-25)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-25)}.$$

VII. Cafus

quo $d=30$ ideoque $b=a-30$.

Tum ergo erit

$$r=(93)(63)\lambda^{2}+(88)(58)\lambda^{7}+(83)(53)\lambda^{12}\ldots(a+3)(a-27)\lambda^{92-a}$$

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-30)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-30)}.$$

SO-

SOLVTIO
QVARVNDAM QVAESTIONVM
DIFFICILIORVM IN CALCVLO PROBABILIVM.

§. 1.

His quaeftionibus occafionem dedit ludus paffim publice inftitutus, quo ex nonaginta fchedulis, numeris 1, 2, 3, 4 .... 90 fignatis, ftatis temporibus quinae fchedulae forte extrahi folent. Hinc ergo huiusmodi quaeftiones oriuntur: quanta fcilicet fit probabilitas vt, poftquam datus extractionum numerus fuerit peractus, vel omnes nonaginta numeri exierint, vel faltem 89, vel 88, vel pauciores. Has igitur quaeftiones, vtpote difficillimas, hic ex principiis calculi Probabilium iam pridem vfu receptis, refoluere conftitui. Neque me deterrent obiectiones Illuftris *D'Alembert*, qui hunc calculum fufpectum reddere eft conatus. Poftquam enim fummus Geometra ftudiis mathematicis valedixit, iis etiam bellum indixiffe videtur, dum pleraque fundamenta folidiffime ftabilita euertere eft aggreffus. Quamvis enim hae obiectiones apud ignaros maximi ponderis effe debeant, haud tamen metuendum eft, inde ipfi fcientiae vllum detrimentum allatum iri.

§. 2. Qui in huiusmodi inueftigationibus elaborarunt, facile perfpicient, refolutionem harum quaeftionum calculos

culos

culos maxime intricatos postulare, quos autem mihi beneficio certorum characterum, quibus iam aliquoties optimo successu sum vsus, superare licuit. Huiusmodi scilicet character: $[\frac{p}{q}]$, quo fractio vncinulis inclusa repraesentatur, mihi denotat istud productum:

$$\frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \frac{p-3}{4} \cdot \ldots\ldots \frac{p-q+1}{q}$$

cuius ergo valor quouis casu facile exhiberi potest. Circa hunc characterem autem sequentia notasse iuuabit:

1°). Semper est $[\frac{p}{q}] = [\frac{p}{p-q}]$. 2°). Si $q = 0$ semper est $[\frac{p}{0}] = 1$. 3°). Si q sit vel numerus negatiuus, vel maior quam p, valor ipsius $[\frac{p}{q}]$ semper est $= 0$. 4°). Deinde si p numerus negatiuus, tum istam formulam: $-[\frac{p}{q}]$ reducere licet ad hanc: $\pm[\frac{p+q-1}{q}]$, vbi signum $+$ valet si q numerus par, $-$ vero si impar; vnde patet istam formam etiam in hanc mutari posse: $\pm[\frac{p+q-1}{p-1}]$.

§. 3. His praemissis quaestiones ex ludo memorato natas generalissime sum tractaturus. Numerum scilicet schedularum denotabo littera m, quas singulas litteris diuersis a, b, c, d, etc. signatas assumo, ne vsus numerorum absolutorum confusionem pariat. Deinde quouis tractu ex his schedulis i schedulas extrahi supponam, vnde numerus omnium variationum, quae in his tractibus contingere possunt, erit $= [\frac{m}{i}]$. Praeterea si numerus tractuum successiue institutorum fuerit $= n$, ex principiis combinationum patet, numerum omnium variationum, quae contingere queant, esse $[\frac{m}{i}]^n$. Hoc ergo modo sequentia Problemata percurram.

Pro-

nefi- suc- cter: de- Circa uper vel De- $[\frac{p}{q}]$ valet for- orato sche- ersis abso- his om- sunt, insti- atet, esse m. Pro-

Problema I.

Si numerus schedularum litteris a, b, c, d, etc. signatarum sit m, indeque quolibet tractu extrahantur i schedulae, atque iam numerus tractuum peractorum fuerit $= n$, quaeritur, quanta sit probabilitas vt omnes m litterae a, b, c, d, etc. exierint.

Solutio.

§. 4. Hic primo obseruandum est, quoniam in n tractibus numerus schedularum extractarum est $i\,n$, omnes litteras exire non posse, nisi fuerit $in > m$, ideoque $n > \frac{m}{i}$, vel saltem non minus. Denotet iam Δ numerum omnium variationum, quae in his n tractibus euenire possunt, eritque vt iam indicauimus $\Delta = [\frac{m}{i}]^n$, qui cum sit numerus omnium casuum possibilium, pro nostra quaestione hinc omnes casus excludi debent, qui pauciores quam m litteras continent. Primo ergo, si numerus litterarum tantum esset $= m-1$, quod m modis fieri potest, numerus casuum qui tantum $m-1$ litteras, vel pauciores continent, erit $m[\frac{m-1}{i}]^n$, quem numerum ponamus $=$ A. Simili modo, si binae litterae excludantur, quod $[\frac{m}{2}]$ modis fieri potest, numerus casuum tantum $m-2$, vel pauciores litteras continentium, erit $[\frac{m}{2}] \cdot [\frac{m-2}{i}]^n$, quem numerum littera B indicemus. Porro sit C numerus omnium casuum, qui tantum $m-3$ litteras vel pauciores continent, eritque $C = [\frac{m}{3}] \cdot [\frac{m-3}{i}]^n$. Eodemque modo fit

$$D = [\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n;\ F = [\tfrac{m}{5}][\tfrac{m-5}{i}]^n;\ \text{etc.}$$

Atque his elementis constitutis inueni numerum omnium casuum, qui omnes m litteras contineant, esse

$$\Delta - A + B - C + D - \text{etc.}$$

quem numerum indicemus littera Σ.

Δ –

§. 5. Euidens eſt hunc numerum Σ per ſolam Theoriam combinationum determinari poſſe, ideoque nulli prorſus dubio eſſe obnoxium, ita vt tanquam veritas geometrica ſpectari poſſit. Hinc autem ſecundum Principia Probabilium numerus caſuum fauorabilium per numerum omnium caſuum poſſibilium diuiſus praebebit probabilitatem quaeſitam, quae ergo ſi ponatur $= \Pi$, erit $\Pi = \frac{\Sigma}{\Delta}$. Quare cum ſit

$$\Sigma = \Delta - A + B - C + D - \text{etc.},$$

pro litteris Δ, A, B, C, etc. valores aſſignatos ſubſtituendo erit

$$\Sigma = [\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{m}{1}][\tfrac{m-1}{i}]^n + [\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n - [\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n + \text{etc.}$$

Haec forma per $[\frac{m}{i}]^n$ diuiſa dabit probabilitatem, quod poſt n tractus omnes m litterae exierint, vnde neceſſario iſta expreſſio Σ ſemper nihilo aequalis eſſe debet, quoties fuerit $n < \frac{m}{i}$, quod etiam calculum pro caſibus ſimplicioribus inſtituenti reuera euenire patebit. Veluti ſi fuerit $m = 7$, $n = 3$, $i = 2$ erit

$$[\tfrac{m}{i}]^n = 21^3 = 9261;$$
$$[\tfrac{m}{1}][\tfrac{m-1}{i}] = 7 \cdot 15^3 = 23625;$$
$$[\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n = 21 \cdot 10^3 = 21000;$$
$$[\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n = 35, 6^3 = 7560$$
$$[\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n = 35 \cdot 3^3 = 945;$$
$$[\tfrac{m}{5}][\tfrac{m-5}{i}]^n = 21 \cdot 1^3 = 21;$$
$$[\tfrac{m}{6}][\tfrac{m-6}{i}]^n = 0;$$

vnde prodit $\Sigma = 0$.

§. 6. Dummodo ergo n non ſit minus quam $\frac{m}{i}$ ſemper erit $\Sigma = 0$; at ſi fuerit $n = \frac{m}{i}$, ſiue $m = in$, hic caſus maxime eſt memorabilis; tum enim formula noſtra pro Σ inuenta reduci poteſt ad productum ex meris factoribus conſtans. Erit enim

quod

n Theo- li pror- eometri- Probabi- omnium uaeſitam, cum ſit endo erit]^n+ etc. uod poſt rio iſta quoties npliciori- t $m = 7$, quam $\frac{m}{i}$ $= in$, hic a noſtra is facto- quod

$$\Sigma = [\tfrac{m}{i}] \cdot [\tfrac{m-i}{i}] \cdot [\tfrac{m-2i}{i}] \cdot [\tfrac{m-3i}{i}] \ldots [\tfrac{i}{i}];$$

quod vt exemplo illuſtremus, ſumamus vt ante $n = 3$ et $i = 2$, ſit vero $m = 6$, atque forma prior pro Σ data praebet $\Sigma = 90$, altera vero dat $\Sigma = 15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.

§. 7. Quanquam autem hae formulae, ſi pro n maiores numeri accipiantur, valde ſiunt prolixae: tamen per logarithmos haud difficile erit quouis caſu valorem probabilitatis Π aſſignare. Cum enim ſit

$$\frac{A}{\Delta} = m[\tfrac{m-i}{m}]^n;\ \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}[\tfrac{m-1-i}{m-1}]^n;\ \frac{C}{B} = \frac{m-2}{3}[\tfrac{m-2-i}{m-2}]^n;$$

hinc ſumtis logarithmis erit

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,m - n\,l[\tfrac{m}{m-i}];$$
$$l\frac{B}{A} = l\frac{m-1}{2} - n\,l[\tfrac{m-i}{m-1-i}];$$
$$l\frac{C}{B} = l\frac{m-2}{3} - n\,l[\tfrac{m-2}{m-2-i}];$$
etc.

ex quibus colligitur

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,m - n\,l[\tfrac{m}{m-i}]$$
$$l\frac{B}{\Delta} = l\frac{A}{\Delta} + l\frac{m-1}{2} - n\,l[\tfrac{m-1}{m-1-i}]$$
$$l\frac{C}{\Delta} = l\frac{B}{\Delta} + l\frac{m-2}{3} - n\,l[\tfrac{m-2}{m-2-i}]$$
etc.

Vnde ergo facile inueniuntur valores $\frac{A}{\Delta}$, $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{C}{\Delta}$, etc. quibus inuentis probabilitas quaeſita erit

$$\Pi = 1 - \frac{A}{\Delta} + \frac{B}{\Delta} - \frac{C}{\Delta} + \frac{D}{\Delta} - \text{etc.}$$

§. 8. Applicemus haec ad caſum ludi initio memorati, quo eſt $m = 90$ et $i = 5$, eritque vt ſequitur:

$$l\frac{A}{\Delta} = l\,90 - n\,l\tfrac{90}{85} \quad = \quad 1,9542425 - n \cdot 0,0248236$$
$$l\frac{B}{\Delta} = l\frac{A}{\Delta} + l\tfrac{89}{2} - n\,l\tfrac{89}{84} = l\frac{A}{\Delta} + 1,6483600 - n \cdot 0,0250107$$

$l\frac{B}{A}$

$$l\tfrac{C}{\Delta}=l\tfrac{B}{\Delta}+l\tfrac{88}{3}-n\,l\tfrac{88}{87}=l\tfrac{B}{\Delta}+1,4673614-n.\,0,0254046$$
$$l\tfrac{D}{\Delta}=l\tfrac{C}{\Delta}+l\tfrac{87}{4}-n\,l\tfrac{87}{86}=l\tfrac{C}{\Delta}+1,3374593-n.\,0,0257054$$
$$l\tfrac{E}{\Delta}=l\tfrac{D}{\Delta}+l\tfrac{86}{5}-n\,l\tfrac{86}{85}=l\tfrac{D}{\Delta}+1,2355283-n.\,0,0260133$$
$$l\tfrac{F}{\Delta}=l\tfrac{E}{\Delta}+l\tfrac{85}{6}-n\,l\tfrac{85}{84}=l\tfrac{E}{\Delta}+1,1512676-n.\,0,0263289$$
$$l\tfrac{G}{\Delta}=l\tfrac{F}{\Delta}+l\tfrac{84}{7}-n\,l\tfrac{84}{83}=l\tfrac{F}{\Delta}+1,0791813-n.\,0,0266522$$

etc. etc.

§. 9. Perſpicuum hic eſt, quo maior accipiatur numerus tractuum n, eo promptius iſtam progreſſionem convergere, ita vt, ſi n denotet numerum vehementur magnum, ſemper proxime proditurum ſit $\Pi=1$: tum ſcilicet maxime erit probabile omnes prorſus m numeros exiiſſe. Contra autem, ſi numerus n parum ſuperet minimum valorem $\frac{m}{r}=18$, euolutio horum terminorum maxime fiet operoſa, cum pluribus terminis ſit opus, ante quam ad euaneſcentes perueniatur. Sumamus $n=100$, vt huic quaeſtioni reſpondeamus: quanta ſit probabilitas, vt poſt centum tractus omnes nonaginta numeri exierint? Hic ergo erit

$l\frac{A}{\Delta}=9,47188$, ergo $\frac{A}{\Delta}=0,2964$
$l\frac{B}{\Delta}=8,61917$ --- $\frac{B}{\Delta}=0,0416$
$l\frac{C}{\Delta}=7,54607$ --- $\frac{C}{\Delta}=0,0035$
$l\frac{D}{\Delta}=6,31299$ --- $\frac{D}{\Delta}=0,0002$
$l\frac{E}{\Delta}=4,94719$ --- $\frac{E}{\Delta}=0,0000$

ergo $\Pi=0,7419$.

§. 10. Sit $n=200$ et pro hoc caſu erit
$l\frac{A}{\Delta}=6,98952$, ergo $\frac{A}{\Delta}=0,00097$
$l\frac{B}{\Delta}=3,63574$, ergo $\frac{B}{\Delta}=0,00000$

vnde

vnde colligitur probabilitas, quod poſt 200 extractiones omnes numeri exierint, $\Pi=0,99903$, quae probabilitas certitudini omnes exiiſſe valde eſt propinqua.

Problema II.

Poſitis quae in Problemate praecedente ſunt conſtituta quaeritur, quanta futura ſit probabilitas, vt ſaltem $m-1$ litterae poſt n tractus exierint.

Solutio.

§. 11. Hic ergo numerus tractuum omnes m litteras continentium non excluditur, vnde patet tractuum numerum noſtro praeſenti caſu fore maiorem. Calculo autem ſubducto, ſi numerus horum caſuum ponatur Σ', inueni fore

$$\Sigma'=\Delta-B+2C-3D+4E-5F+\text{ etc.}$$

vnde probabilitas, quod poſt n tractus ſaltem $m-1$ litterae exierint, erit $\Pi'=\frac{\Sigma'}{\Delta}$, ideoque

$$\Pi'=1-\tfrac{B}{\Delta}+2\tfrac{C}{\Delta}-3\tfrac{D}{\Delta}+4\tfrac{E}{\Delta}-\text{ etc.}$$

§. 12. Hoc ergo caſu erit

$$\Sigma'=[\tfrac{m}{1}]^n-[\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{1}]^n+2[\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{1}]^n-[\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{1}]^n+[\tfrac{m}{5}][\tfrac{m-4}{1}]^n-\text{ etc.}$$

Vnde ſi applicatio fiat ad ludum memoratum, cum litterae Δ, A, B, C, D, etc. eosdem retineant valores, calculus per logarithmos inſtitutus ex inuentis valoribus $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{C}{\Delta}$, $\frac{D}{\Delta}$, etc. facile perficietur. Ita ſi poſt 100 tractus requiratur probabilitas quod ſaltem 89 numeri exierint, ob

$$\tfrac{B}{\Delta}=0,0416;\ \tfrac{C}{\Delta}=0,0035;\ \tfrac{D}{\Delta}=0,0002;$$

erit

erit ista probabilitas $\Pi' = 0,9648$. Vnde sequitur probabilitatem, quod tantum pauciores numeri exierint, fore $0,0352$.

Problema III.

Iisdem positis, vt hactenus, quaeritur: quanta sit probabilitas, vt saltem $m-2$ litterae post n tractus fuerint extractae.

Solutio.

§. 13. Numerus omnium casuum, qui saltem $m-2$ litteras contineant, per litteras ante stabilitas Δ, A, B, C, D, etc. ita definitur, vt sit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.}$$

quae expressio, restitutis valoribus, hoc modo se habet:

$$\Sigma'' = [\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{2}{2}][\tfrac{m}{2}][\tfrac{m-2}{i}]^n + [\tfrac{3}{2}][\tfrac{m}{3}][\tfrac{m-3}{i}]^n - [\tfrac{4}{2}][\tfrac{m}{4}][\tfrac{m-4}{i}]^n$$

atque hinc probabilitas erit

$$\Pi = 1 - \frac{C}{\Delta} + 3\frac{D}{\Delta} - 6\frac{E}{\Delta} + 10\frac{F}{\Delta} - \text{etc.}$$

Pro ludo igitur ante memorato, si quaeratur probabilitas, vt post 100 tractus saltem 88 numeri exierint, ea reperietur $\Pi'' = 0,9971$, vnde probabilitas, quod contrarium euenit, erit $= 0,0029$.

Problema generale.

Iisdem positis vt ante, quaeritur quanta sit probabilitas, vt post n tractus saltem $m - \lambda$ litterae exierint.

Solutio.

Numerus casuum ad minimum tot litteras continentium per nostros characteres ita commode exprimitur, vt sit

$$[\tfrac{m}{i}]^n - [\tfrac{\lambda}{\lambda}][\tfrac{m}{1+\lambda}][\tfrac{m-1-\lambda}{i}]^n + [\tfrac{\lambda+1}{\lambda}][\tfrac{m}{\lambda+2}][\tfrac{m-\lambda-2}{i}]^n$$
$$- [\tfrac{\lambda+2}{\lambda}][\tfrac{m}{\lambda+3}][\tfrac{m-\lambda-3}{i}]^n + \text{etc.}$$

quae formula per terminum primum $[\frac{m}{i}]^n$ diuisa praebebit probabilitatem quaesitam.

§. 15. In his probabilitatibus aestimandis vtique assumitur omnes litteras ad extrahendum aeque esse procliues, quod autem Ill. *D'Alembert* negat assumi posse. Arbitratur enim, simul ad omnes tractus iam ante peractos respici oportere; si enim quaepiam litterae nimis crebro fuerint extractae, tum eas in sequentibus tractibus rarius exituras; contrarium vero euenire si quaepiam litterae nimis raro exierint. Haec ratio, si valeret, etiam valitura esset si sequentes tractus demum post annum, vel adeo integrum saeculum, quin etiam si in alio quocunque loco instituerentur; atque ob eandem rationem etiam ratio haberi deberet omnium tractuum, qui iam olim in quibuscunque terrae locis fuerint peracti, quo certe vix quicquam absurdius excogitari potest.

Demonstratio solutionum praecedentium.

§. 16. Cum numerus omnium litterarum a, b, c, d, etc. quibus singulas schedulas signatas assumimus, sit $= m$, hunc litterarum complexum vocabo systema principale, vnde alia systemata deriuata, quae pauciores litteras contineant, formari conueniet, quae ita in ordines dispesco, vt ordo primus complectatur omnia systemata quae tantum $m - 1$ litteras contineant, quorum ergo numerus erit $= m$. Ad ordinem vero secundum referam omnia systemata in quibus litterarum numerus est $m-2$, quorum numerus erit $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} = [\frac{m}{2}]$. Ordo autem tertius habebit omnia systemata, vbi numerus litte-

litterarum eft $m-3$, quorum numerus eft $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}=[\frac{m}{3}]$. Eodem modo numerus fyftematum quarti ordinis tantum $m-4$ litteras continentium erit $[\frac{m}{4}]$; quinti autem ordinis, vbi tantum $m-5$ litterae infunt, numerus fyftematum erit $[\frac{m}{5}]$, et ita porro.

§. 17. Quae quo fiant clariora, fyftema principale his fex litteris *a b c d e f* conftans contemplemur, ex quo ergo fequentia deriuata cuiusque ordinis refultabunt, quae hac tabula exhibemus:

I.	II.	III.	IV.	V.
a b c d e	*a b c d*	*a b c*	*a b*	*a*
a b c d f	*a b c e*	*a b d*	*a c*	*b*
a b c e f	*a b c f*	*a b e*	*a d*	*c*
a b d e f	*a b d e*	*a b f*	*a e*	*d*
a c d e f	*a b d f*	*a c d*	*a f*	*e*
b c d e f	*a b e f*	*a c e*	*b c*	*f*
	a c d e	*a c f*	*b d*	
	a c d f	*a d e*	*b e*	
	a c e f	*a d f*	*b f*	
	a d e f	*a e f*	*c d*	
	b c d e	*b c d*	*c e*	
	b c d f	*b c e*	*c f*	
	b c e f	*b c f*	*d e*	
	b d e f	*b d e*	*d f*	
	c d e f	*b d f*	*e f*	
		b e f		
		c d e		
		c d f		
		c e f		
		d e f		

$\frac{-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}=[\frac{m}{3}]$.
dinis tantum
autem or-
fyftematum

na principale
ır, ex quo
ıbunt, quae

vbi

vbi ergo numerus fyftematum ordinis primi eft $6=[\frac{6}{1}]$, ordinis fecundi $15=[\frac{6}{2}]$, ordinis tertii $20=[\frac{6}{3}]$, quarti $=15=[\frac{6}{4}]$, quinti $=6=[\frac{6}{5}]$.

§. 18. Nunc euidens eft fingula fyftemata cuiusque ordinis inferioris in omnibus fuperioribus contineri, quod quoties eueniat plurimum intereft obferuaffe. Ita pro cafu $m=6$ fyftema primi ordinis *a b c d e* in ordine hoc femel occurrit. At fyftema fecundi ordinis *a b c d* in primo ordine bis, in fecundo femel occurrit. Deinde fyftema tertii ordinis *a b c* in primo ordine ter, in fecundo ter, at in tertio femel reperitur. Syftema quarti ordinis *a b* in primo ordine quater, in fecundo fexies, in tertio quater, in quarto femel ineft. Denique fyftema quinti ordinis in primo ordine quinquies occurrit, in fecundo decies, in tertio decies, in quarto quinquies, in quinto femel. Ex quo manifeftum eft hos numeros conuenire cum coëfficientibus binomii ad poteftates eleuato, fiquidem omnia fyftemata in ipfo principali femel continentur.

§. 19. Hinc ergo in genere pro quouis fyftemate cuiuspiam ordinis inferioris facile affignari poteft, quot modis in quolibet ordine fuperiore occurrat, id quod fequens tabula manifefto declarabit, vbi fyftema principale littera O, fyftemata autem primi, fecundi, tertii, quartii, etc. ordinis notis romanis I, II, III, IV V, VI denotabo.

	O	I	II	III	IV	V	VI
m	1						
$m-1$	1	1					
$m-2$	1	2	1				
$m-3$	1	3	3	1			
$m-4$	1	4	6	4	1		
$m-5$	1	5	10	10	5	1	
$m-6$	1	6	15	20	15	6	1
— —	—	—	—	—	—	—	—
— —	—	—	—	—	—	—	—
— —	—	—	—	—	—	—	—
$m-\lambda$	$[\frac{\lambda}{0}]$	$[\frac{\lambda}{1}]$	$[\frac{\lambda}{2}]$	$[\frac{\lambda}{3}]$	$[\frac{\lambda}{4}]$	$[\frac{\lambda}{5}]$	$[\frac{\lambda}{6}]$

§. 20. Consideremus nunc numerum schedularum, quae quouis tractu tam ex systemate principali actu extrahuntur, quam ex systematibus deriuatis extrahi concipi possunt, quae quidem ex principali facillime deduci poterunt. Quodsi quouis tractu vnica littera extrahatur, pro systemate principali numerus tractuum diuersorum erit $= [\frac{m}{1}]$; sin autem binae litterae simul extrahantur, numerus omnium tractuum diuersorum erit $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} = [\frac{m}{2}]$. Si ternae litterae quouis tractu extrahantur, numerus tractuum diuersorum erit $[\frac{m}{3}]$, atque in genere, si i litterae quouis tractu extrahantur, numerus omnium tractuum diuersorum erit $[\frac{m}{i}]$. Sin autem tales extractiones etiam ex systematibus deriuatis fieri concipiantur, pro quolibet systemate ordinis primi numerus tractuum diuersorum erit $[\frac{m-1}{i}]$, ordinis secundi $= [\frac{m-2}{i}]$, ordinis tertii $[\frac{m-3}{i}]$, et ita porro.

§. 21. Quodsi iam hae extractiones bis repetantur, quoniam pro systemate principali quemlibet tractum non solum

a schedularum, ali actu extra- ahi concipi pos- educi poterunt. , pro systemate it $= [\frac{m}{1}]$; sin nerus omnium ternae litterae im diuersorum ouis tractu ex- orum erit $[\frac{m}{i}]$. natibus deriuatis nis primi nume- secundi $= [\frac{m-2}{i}]$,

bis repetantur, tractum non solum

solum reliquae omnes sequi possunt, sed etiam ipsae, numerus diuersorum casuum erit $[\frac{m}{i}]^2$. Si tres extractiones successiue instituantur, omnium casuum numerus erit $[\frac{m}{i}]^3$; atque in genere, si n extractiones sibi succedant, numerus omnium casuum possibilium erit $[\frac{m}{i}]^n$, quem numerum littera Δ supra designauimus, ita vt sit $\Delta = [\frac{m}{i}]^n$.

§. 22. Simili modo numerus omnium casuum, qui in quolibet systemate primi ordinis locum habere possunt, est $[\frac{m-1}{i}]^n$; quare cum horum systematum numerus sit $[\frac{m}{1}]$, numerus omnium casuum, quem primus ordo praebet, erit $[\frac{m}{1}][\frac{m-1}{i}]^n$, quemque littera A designemus, ita vt sit $A = [\frac{m}{1}][\frac{m-1}{i}]^n$. Eodem modo facile intelligitur, numerum omnium casuum, qui ex singulis systematibus oriri possunt esse

pro ordine secundo $B = [\frac{m}{2}][\frac{m-2}{i}]^n$,

pro ordine tertio $C = [\frac{m}{3}][\frac{m-3}{i}]^n$,

pro ordine quarto $D = [\frac{m}{4}][\frac{m-4}{i}]^n$,

et ita porro. His iam praemissis solutiones singulorum Problematum praecedentium facile expedire licebit.

Pro Problemate primo.

§. 23. Cum in hoc Problemate ex omnibus casibus possibilibus, quorum numerus est Δ, ii enumerari debeant, qui omnes m litteras inuoluunt, inde excludamus primo omnes casus, qui tantum $m-1$ litteras, vel pauciores continent, quod fiet si omnes casus possibiles primi ordinis, quorum numerus est A, auferamus. Hoc enim modo casus, qui $m-1$ litteras continent, e medio tollentur. At vero casus qui $m-2$ litteras continent, bis auferentur hoc modo; vnde

vnde in formula $\Delta - A$ femel deficient, ita vt eorum numerus $1 - 2 = -1$. At pro cafibus $m - 3$ litteras continentibus numerus, quo in formula $\Delta - A$ occurrent, erit $1 - 3 = -2$. Simili modo pro $m - 4$ habebimus $1 - 4 = -3$, et ita porro, qui ergo cafus deficientes iterum reftitui debebunt.

§. 24. Cafus autem formae $m - 2$ femel deficientes reftituentur, fi ad formulam $\Delta - A$ addatur B. Hoc autem modo terminos formae $m - 3$ ter adduntur, cum tamen bis tantum deficiffent, ergo nunc femel abundabunt, fiue index erit $+1$. At forma $m-4$ fexies adiicitur, cum tantum ter defuiffet, ideoque index erit $+3$. Simili modo pro terminis formae $m - 5$ index erit $10 - 4 = +6$, et ita porro.

§. 25. Vt igitur hos cafus iam abundantes iterum tollamus, fubtrahamus omnes cafus ordinis tertii $=$ C. Hoc enim modo termini formae $m - 3$ penitus tollentur, reliqui autem nimis crebro aufferentur, fcilicet pro ordine $m - 4$ index erit -1, pro ordine $m - 5$, index erit -4, etc.

§. 26. Quia forma $m - 4$ femel deficit, reftitutio fiet addendo litteram D. Inferiores autem nunc redundabunt fecundum indices 1, 5, 15, etc. vnde E fubtrahendo hi tollentur; quod minis fubtractum eft additione litterae F reftituetur, et ita porro.

§. 27. Hinc iam fatis manifeftum eft, ex forma Δ fublatos effe omnes cafus pauciores quam m litteras continentes, quorum ergo reftantium numerus erit

$$\Delta - A + B - C + D - E + F - \text{etc.}$$

quem

quem indicauimus per Σ, ficque Solutio primi Problematis firmiter eft demonftrata.

Pro Problemate fecundo.

§. 28. Manifeftum eft, fecundum idem, quo hic vfi fumus, ratiocinium procedendo, demonftrationem pro fecundi Problematis folutione adornari poffe. Nec opus erit omnia tam prolixe exponere. Cum enim ex numero cafuum poffibilium Δ ii fint enumerandi, qui tantum $m-1$ litteras continent, ftatim patet, hinc excludendos effe omnes cafus $m - 2$ litteras continentes, quod fiet fi a numero Δ numerus B fubtrahatur. At tabula fupra § 19 data declarat, hoc modo terminos formae $m - 3$ ter ablaturos effe, cum tamen femel tantum fubtrahi debuiffent, et ita de reliquis formis. Ad eos reftituendos addatur numerus 2 C, quo numeri deficientes formae $m - 3$ penitus tollentur: redundabunt autem numeri formae $m - 4$, indice 3; ac magis fuperfluunt fequentes. Quo priores tollantur iterum fubtrahi debet numerus 3 D, quo fublato termini formae $m - 4$ exclufi erunt. Deficientes numeri formae $m - 5$ et fequentium iterum additione numeri 4 E erunt reftituendi, et ita porro, quibus operationibus peractis numerus reftantium erit

$$\Sigma' = \Delta - B + 2C - 3D + 4E - 5F + \text{etc.}$$

ficque folutio fecundi Problematis eft demonftrata.

Pro Problemate tertio.

§. 29. Hic a numero Δ fubtrahi debet numerus C, quo cafus $m - 3$ fchedularum excludantur, et quia hoc pacto numerus $m - 4$ quater fubtrahitur, cum tantum femel

mel

mel redundabat, iterum addi debet numerus 3 D, quo ille et fequentes deficientes reftituantur. Quod excedit fubtractione numeri 6 E tolletur: deficientes vero additione numeri 10 F reftituendi funt, et ita porro, vnde numerus cafuum $m-2$ litteras continentium erit

$$\Sigma'' = \Delta - C + 3D - 6E + 10F - \text{etc.}$$

quemadmodum in folutione tertii Problematis affeueraui. Hoc modo igitur haec etiam folutio firmiter eft demonftrata.

Euleri Opuscula Tom. II. TAB. I

Fig. 1.

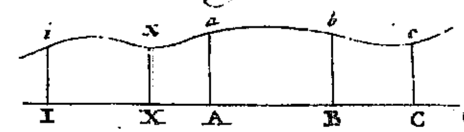

Fig. 2.

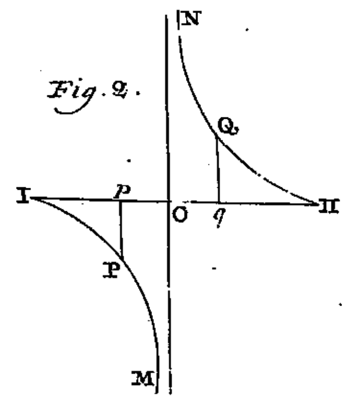

Fig. 3.

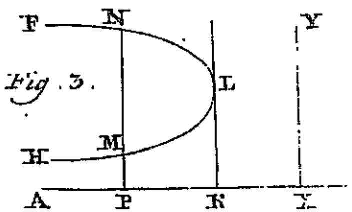

Fig. 4.

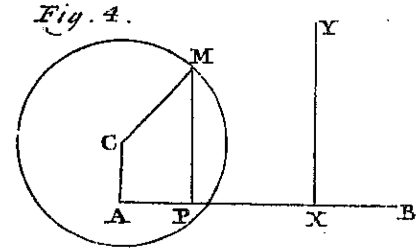

Fig. 6.