1785

Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis: Quantum duo coniuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur

Leonhard Euler

E599

Corollarium 2.

§. 45. Nunc igitur omnia Theoremata, quae circa huiusmodi diuisores olim in Comment. veter. Tomo XIV. dederam, multo maiorem gradum certitudinis sunt adepta, postquam a celeb. *la Grange* formae istorum diuisorum sunt demonstratae; atque nullum dubium esse videtur, quin mox quod in hoc genere adhuc desideratur perfecta Demonstratione muniatur.

Corollarium 3.

§. 46. Antequam hoc argumentum penitus deseram, memorabilem adhuc obseruationem adiungam circa signa numerorum α, dum scilicet omnes eius valores infra $2n$ deprimuntur. Cum enim horum numerorum primus et vltimus simul sumti fiant $2n$, dispiciendum est, vtrum hi duo numeri habeant vel paria signa vel disparia, vtroque enim casu bini quicunque horum numerorum ab extremis aequidistantes, quorum ergo summa semper est $2n$, etiam habebunt siue eadem signa siue contraria. Ita nostro casu, quo erat $2n = 78$, vltimus 77 habebat signum $-$, dum primus 1 semper habet signum $+$, vnde etiam signa binorum ab extremis aeque distantium perpetuo erunt contraria. E contrario autem in Exemplo 11, vbi erat $2n = 60$, vltimus numerus 59 habebat signum $+$, vnde etiam bini quicunque alii ab extremis aequidistantes eodem signo affecti deprehenduntur, cuius quidem phaenomeni ratio haud difficulter inuestigari poterit. Huiusmodi autem obseruationes laborem inuestigationis Diuisorum non mediocriter subleuant.

SO-

quae circa
omo XIV.
nt adepta,
orum sunt
quin mox
Demonstra-
us deseram,
a signa nu-
ra $2n$ de-
us et vlti-
vtrum hi
, vtroque
m ab ex-
er est $2n$,
Ita nostro
signum $-$,
signa bino-
ut contraria.
$= 60$, vl-
etiam bini
signo affecti
haud dif-
obseruationes
r subleuant.
SO-

SOLVTIO QVAESTIONIS AD CALCVLVM PROBABILITATIS PERTINENTIS.

QVANTVM DVO CONIVGES PERSOLVERE DEBEANT, VT SVIS HAEREDIBVS POST VTRIVSQVE MORTEM CERTA ARGENTI SVMMA PERSOLVATVR.

§. 1.

Assumimus hic eiusmodi aerarium publicum esse constitutum, cuius facultates quotannis vicesima sui parte augeri queant, ita vt summa 100 Rubellonum post annum ad 105 Rub. excrescat; quare si breuitatis gratia ponamus $\frac{105}{100} = \lambda$, praesens pecuniae summa $= C$ post n annos aestimanda erit $\lambda^n C$. Vicissim autem quaeuis pecuniae summa C post n annos soluenda praesenti tempore valorem habere censenda est $= \frac{C}{\lambda^n}$.

§. 2. Ponamus nunc argenti summam, quam ambo coniuges post vtriusque mortem acquirere optant, esse $= 1000$ Rub. vnde intelligitur si tempus huius solutionis esset cognitum, annorum praeterlapsorum numero existente $= n$, eius valorem praesentem futurum esse $= \frac{1000}{\lambda^n}$. Tantum igitur illi coniuges praesenti tempore in aerarium conferre tenerentur. Verum cum tempus solutionis maxime sit incertum, siquidem demum post vtriusque mortem fieri debet, verum et praesentem valorem huius summae secundum regulas calculi probabilium ex longaeuis mortalitatis obseruationibus petitas determinari oportet. Hunc in finem vtar tabula, quam olim in Tomo Memor. Berol. pro Anno 1760 inserui, vbi, si praemagnus numerus M infantum simul natorum consideretur, eorum numerum post n annos adhuc superstitum indicaui charactere (n) M; ex quo intelligitur, talem characterem (n) designare fractiones eo minores, quo maior fuerit annorum numerus n, ac tandem circa 100 annos prorsus in nihilum abire; Tabulam igitur horum valorum pro singulis annis elapsis hic exponamus.

(1)=

ambo
= 1000
cogni-
, eius
igitur
neren-
ertum,
verum
calculi
petitas
n olim
si prae-
eretur,
ndicaui
em (n)
nnorum
nihilum
s annis
(1)=

(1) = 0,804	(25) = 0,552	(49) = 0,370	(73) = 0,145
(2) = 0,786	(26) = 0,544	(50) = 0,362	(74) = 0,135
(3) = 0,736	(27) = 0,535	(51) = 0,354	(75) = 0,125
(4) = 0,709	(28) = 0,525	(52) = 0,345	(76) = 0,114
(5) = 0,688	(29) = 0,516	(53) = 0,336	(77) = 0,104
(6) = 0,676	(30) = 0,507	(54) = 0,327	(78) = 0,093
(7) = 0,664	(31) = 0,499	(55) = 0,319	(79) = 0,082
(8) = 0,653	(32) = 0,490	(56) = 0,310	(80) = 0,072
(9) = 0,646	(33) = 0,4[illegible]2	(57) = 0,30[illegible]	(81) = 0,063
(10) = 0,639	(34) = 0,475	(58) = 0,291	(82) = 0,054
(11) = 0,633	(35) = 0,468	(59) = 0,282	(83) = 0,046
(12) = 0,627	(36) = 0,461	(60) = 0,273	(84) = 0,039
(13) = 0,621	(37) = 0,454	(61) = 0,264	(85) = 0,032
(14) = 0,616	(38) = 0,446	(62) = 0,254	(86) = 0,026
(15) = 0,611	(39) = 0,439	(63) = 0,245	(87) = 0,020
(16) = 0,606	(40) = 0,432	(64) = 0,235	(88) = 0,015
(17) = 0,601	(41) = 0,426	(65) = 0,225	(89) = 0,011
(18) = 0,596	(42) = 0,420	(66) = 0,215	(90) = 0,008
(19) = 0,590	(43) = 0,413	(67) = 0,205	(91) = 0,006
(20) = 0,584	(44) = 0,406	(68) = 0,195	(92) = 0,004
(21) = 0,577	(45) = 0,403	(69) = 0,185	(93) = 0,003
(22) = 0,571	(46) = 0,393	(70) = 0,175	(94) = 0,002
(23) = 0,565	(47) = 0,386	(71) = 0,165	(95) = 0,001
(24) = 0,559	(48) = 0,378	(72) = 0,155	

§. 3. Ponamus nunc praesenti tempore aetatem mariti esse $= a$ annorum, vxoris vero $= b$ annorum, et quo ratiocinia instituenda clarius percipi queant, fingamus simul ingentem numerum talium coniugum, qui sit N, eiusdem aetatis a desse, qui pariter suis haeredibus post vtriusque mortem summam 1000 Rub. acquirere optent, vnde si summa initio

per-

perſoluenda ſtatuatur $= x$, aerarium ab his omnibus accipiet ſummam $N x$.

§. 4. Sin autem magis arrideat, vt iſtud pretium x non ſtatim ab initio totum, ſed potius per totam vitam aequaliter diſtributum ſoluatur, calculum noſtrum ad duplicem ſolutionem accommodemus, dum altera ſtatim ab initio ſumma $= x$ in aerarium ſoluitur, altera autem quotannis inſuper quaepiam ſumma $= z$ ſoluitur, quamdiu ſcilicet non ſolum ambo coniuges ſed etiam altervter tantum ſuperſtites fuerint. Solutione autem hoc modo abſoluta ſi quis voluerit totum pretium ſtatim ab initio perſoluere, pro hoc caſu poni oportebit $z = 0$ et littera x quaeſitum pretium indicabit. Sin autem quis maluerit hoc pretium per totam vitam aequaliter diſtribui, poni oportebit $x = z$, eritque z ſumma ſingulis annis ſoluenda vsque ad mortem vtriusque coniugis.

§. 5. His conſtitutis ſtatim ab initio ab omnibus illis N coniugiis ſoluetur ſumma $= N x$. Nunc videamus, poſtquam elapſi fuerint n anni, quot coniugia adhuc tam integra quam diſſoluta, dum ſcilicet interea altervter fuerit mortuus, ſint ſuperfutura; tum enim a ſingulis iſtis in aerarium ſoluetur ſumma $= z$, cuius valor praeſens aeſtimandus eſt $\frac{z}{\lambda^n}$. Praeterea vero pro quouis anno currente inquirendum eſt, quot coniugia penitus extinguantur: quoties enim hoc euenit, toties eorum haeredibus praemium illud 1000 Rubl. perſolui debet, cuius ergo valor praeſens erit $\frac{1000}{\lambda^n}$. Hoc igitur modo calculum noſtrum proſequi oportet vsque ad extre-

tremum vitae humanae terminum, et cum omnes tam expenſae quam reditus fuerint ad praeſens tempus reducti, eos inter ſe aequari conueniet, vnde pro lubitu ſiue x ſiue z determinare licebit.

§. 6. His praemiſſis incipiamus ab anno primo, cuius initio adeſſe ponuntur N mariti, omnes eiusdem aetatis $= a$, totidemque vxores eiusdem aetatis $= b$, a quibus aerarium accepit ſummam $= N x$. Nunc igitur elapſo anno primo ſecundum tabulam ſupra allatam numerus maritorum adhuc ſuperſtitum erit $\frac{(a+1)}{(a)} N$, ideoque numerus interea defunctorum $= \frac{(a)-(a+1)}{(a)} N$. Simili modo numerus vxorum adhuc ſuperſtitum erit $\frac{(b+1)}{(b)} N$, earum autem quae interea ſunt mortuae numerus $\frac{(b)-(b+1)}{(b)} N$. Quia igitur quilibet horum maritorum ſuperſtitum initio habuit coniugem, inſtituatur haec proportio: vti numerus omnium vxorum initio ſe habet ad earum numerum ſuperſtitum, ita numerus virorum elapſo anno ſuperſtitum ad numerum eorum, quorum vxores adhuc erunt ſuperſtites, qui ergo numerus erit $\frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{(b+1)}{(b)} N$, a quibus ſingulis in aerarium ſoluitur ſumma $= z$, cuius valor praeſens cum ſit $\frac{z}{\lambda}$, hinc orietur valor $= \frac{(a+1)(b+1)}{(a)(b)} \frac{N z}{\lambda}$. Tum vero numerus eorum maritorum, qui interea vxores amiſerint, erit $\frac{(a+1)}{(a)} \left(1 - \frac{(b+1)}{(b)}\right) N$, qui cum itidem in aerarium ſoluant ſummam z, ea ad initium relata erit $\frac{(a+1)}{(a)} \left(1 - \frac{(b+1)}{(b)}\right) \frac{N z}{\lambda}$; vnde patet, hunc valorem cum praecedente coniunctum fore $\frac{(a+1)}{(a)} \frac{N z}{\lambda}$, id quod per ſe eſt manifeſtum, quia quilibet maritus ſuperſtes hanc ſummam z ſoluere tenetur, ſiue eius vxor adhuc viuat ſiue ſecus.

§. 7.

§. 7. Confideremus nunc etiam eos maritos, qui intra hunc annum erunt mortui, quorum numerus eft $(1-\frac{(a+1)}{a})N$; vbi duo cafus fe offerunt. Alter cafus eos fpectat maritos, quorum vxores adhuc funt fuperftites, quorum numerus per fuperiorem analogiam inuenitur: vti fe habet numerus omnium vxorum initio viuentium ad earum numerum poft annum fuperftitum, ita numerus virorum interea defunctorum ad eorum numerum, quorum vxores adhuc funt fuperftites, qui ergo numerus erit $\frac{(b+1)}{(b)}(1-\frac{(a+1)}{(a)})N$, quae cum fingulae etiam in aerarium conferant fummam $= z$, eius valor ad initium relatus erit $\frac{(b+1)}{(b)}(1-\frac{(a+1)}{(a)})\frac{Nz}{\lambda}$, vnde omnes reditus primo anno elapfo in aerarium influentes erunt

$$\frac{Nz}{\lambda}\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}\right),$$

quae ergo quantitas tribus conftat partibus. Primo fcilicet valor $\frac{z}{\lambda}$ multiplicatur per numerum maritorum fuperftitum, qui eft $\frac{(a+1)}{(a)}N$, deinde etiam per numerum vxorum fuperftitum, qui eft $\frac{(b+1)}{(b)}N$. Hinc autem aufferri debet numerus coniugiorum adhuc integrorum, quia fingula non duo z fed tantum vnum z expendunt.

§. 8. Alter cafus eos fpectat maritos, quorum vxores non amplius funt fuperftites. Ex praecedente autem calculo apparet, numerum eorum maritorum mortuorum, quorum vxores interea quoque funt defunctae, effe $(1-\frac{(a+1)}{(a)})(1-\frac{(b+1)}{(b)})N$. Tot ergo coniugia penitus funt extincta, quorum igitur haeredibus ex aerario foluendum erit praemium conftitutum 1000 Rubl. quod cum ftatim perfolui debeat, nullam vfuram lucrari interea potuit, vnde iftae expenfae ad initium relatae etiamnunc valebunt

$$1000\,N\left(1-\frac{(a+1)}{a}-\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}\right).$$

§. 9.

aritos, qui in- ritos, quorum er fuperiorem nium vxorum n fuperftitum, eorum numequi ergo nu- fingulae etiam lor ad initium s reditus pri- Primo fcilicet m fuperftitum, n vxorum fu- ferri debet nu- ngula non duo quorum vxores utem calculo ap- quorum vxores quorum igitur ium conftitutum , nullam vfuram ad initium rela- §. 9.

§. 9. Progrediamur nunc ad annum fecundum, cuius initio fuperftites erant mariti $\frac{(a+1)}{(a)}N$, vxores vero $\frac{(b+1)}{(b)}N$, inter quos fubfiftent adhuc coniugia integra $\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}N$, foluta vero $(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)})N$; ita vt numerus coniugiorum penitus extinctorum fit

$$N\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}-\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}\right),\ \text{fiue}$$

$$N\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+1)}{(b)}\right).$$

At vero in fine anni fecundi numerus maritorum fuperftitum adhuc erit $\frac{(a+2)}{(a)}N$, numerus vero eorum qui hoc biennio funt mortui $=(1-\frac{(a+2)}{(a)})N$. Similique modo numerus vxorum adhuc fuperftitum erit $\frac{(b+2)}{(b)}N$, earum vero quae biennio funt mortuae $(1-\frac{(b+2)}{(b)})N$, vnde numerus coniugiorum hoc biennio extinctorum erit

$$\left(1-\frac{(a+2)}{(a)}\right)\left(1-\frac{(b+2)}{(b)}\right)N.$$

Quare cum numerus coniugiorum primo anno extinctorum fuerit $(1-\frac{(a+1)}{(a)})(1-\frac{(b+1)}{(b)})N$, numerus eorum quae intra hunc fecundum annum funt extincta erit

$$\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+2)}{(a)}-\frac{(b+2)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}+\frac{(a+2)}{(a)}\frac{(b+2)}{(b)}\right)N$$

pro quibus fingulis quia perfoluitur fumma mille Rubell., tota fumma ob vfuram ad initium relata valebit

$$\frac{1000N}{\lambda}\left[\frac{(a+1)-(a+2)}{(a)}+\frac{(b+1)-(b+2)}{(b)}-\left(\frac{(a+1)(b+1)-(a+2)(b+2)}{(a)(b)}\right)\right].$$

§. 10. Quia nunc initio fecundi anni numerus coniugiorum tam integrorum quam folutorum erat

$$N\left(\frac{(a+1)}{(a)}+\frac{(b+1)}{(b)}-\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}\right),$$

fi hinc aufferamus numerum coniugiorum hoc anno extinctorum, remanebit numerus eorum qui circa finem fecundi anni finguli foluent fummam z, quorum ergo numerus erit

$$N\left(\tfrac{(a+2)}{(a)} + \tfrac{(b+2)}{(b)} - \tfrac{(a+2)}{(a)}\tfrac{(b+2)}{(b)}\right).$$

Toties igitur ab his summa z in aerarium infertur, vnde totus valor ob vsuram duorum annorum minutus primo initio valebit

$$\tfrac{Nz}{\lambda^2}\left(\tfrac{(a+2)}{(a)} + \tfrac{(b+2)}{(b)} - \tfrac{(a+2)}{(a)}\tfrac{(b+2)}{(b)}\right).$$

§. 11. His expositis iam ad annum quemcunque sequentem progredi poterimus. Ponamus igitur iam elapsos esse n annos, hocque tempore numerus maritorum superstitum erit $\tfrac{(a+n)}{(a)}N$, ante autem iam defunctorum

$$\left(1 - \tfrac{(a+n)}{(a)}\right)N.$$

Eodemque modo numerus vxorum adhuc superstitum est $\tfrac{(b+n)}{(b)}N$ demortuarum vero $\left(1 - \tfrac{(b+n)}{(b)}\right)N$, vnde numerus coniugiorum tam integrorum quam solutorum hoc tempore erit

$$\left(\tfrac{(a+n)}{(a)} + \tfrac{(b+n)}{(b)} - \tfrac{(a+n)}{(a)}\tfrac{(b+n)}{(b)}\right)N;$$

at vero numerus coniugiorum toto hoc tempore penitus extinctorum erit

$$\left(1 - \tfrac{(a+n)}{(a)}\right)\left(1 - \tfrac{(b+n)}{(b)}\right)N.$$

§. 12. Iam procedamus ad finem istius anni, ac simili modo numerus coniugiorum, siue integrorum, siue solutorum nunc erit

$$N\left(\tfrac{(a+n+1)}{(a)} + \tfrac{(b+n+1)}{(b)} - \tfrac{(a+n+1)}{(a)}\tfrac{(b+n+1)}{(b)}\right)$$

a quibus singulis in aerarium persoluitur summa z, cuius valor ad initium translatus est $\frac{z}{\lambda^{n+1}}$, vnde tota summa circa finem huius anni in aerarium soluta pro initio valebit

$$\frac{Nz}{\lambda^{n+1}}\left(\frac{(a+n+1)}{(a)} + \frac{(b+n+1)}{(b)} - \frac{(a+n+1)}{(a)}\frac{(b+n+1)}{(b)}\right).$$

Tum

Tum vero numerus omnium coniugiorum ab ipso initio vsque ad tempus $n+1$ annorum extinctorum erit

$$N\left(1 - \tfrac{(a+n+1)}{(a)}\right)\left(1 - \tfrac{(b+n+1)}{(b)}\right),$$

quare cum vsque ad initium huius anni iam extincta fuissent

$$N\left(1 - \tfrac{(a+n)}{(a)}\right)\left(1 - \tfrac{(b+n)}{(b)}\right)$$

coniugia, numerus eorum quae hoc demum anno sunt extincta erit

$$N\left(\tfrac{(a+n)-(a+n+1)}{(a)} + \tfrac{(b+n)-(b+n+1)}{(b)} - \tfrac{(a+n)(b+n)-(a+n+1)(b+n+1)}{(a)(b)}\right)$$

Quoniam igitur pro his singulis expendi debet summa 1000 Rbl. valor harum expensarum ad initium relatus erit

$$\frac{1000\,N}{\lambda^n}\left(\frac{(a+n)-(a+n+1)}{(a)} + \frac{(b+n)-(b+n+1)}{(b)} - \frac{(a+n)(b+n)-(a+n+1)(b+n+1)}{(a)(b)}\right).$$

§. 13. Colligamus nunc omnes tam reditus ex quantitate z oriundos quam expensas ex solutione illorum 1000 Rubell. ortas, ac primo quidem omnes reditus, qui praeter summam principalem Nx in aerarium inferuntur, per ternas sequentes series expressi inueniuntur:

$$Nz\begin{cases} +\frac{(a+1)}{\lambda(a)} + \frac{(a+2)}{\lambda^2(a)} + \frac{(a+3)}{\lambda^3(a)} \dots + \frac{(a+n)}{\lambda^n(a)} \\ +\frac{(b+1)}{\lambda(b)} + \frac{(b+2)}{\lambda^2(b)} + \frac{(b+3)}{\lambda^3(b)} \dots + \frac{(b+n)}{\lambda^n(b)} \\ -\frac{(a+1)(b+1)}{\lambda(a)(b)} - \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2(a)(b)} - \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3(a)(b)} \dots - \frac{(a+n)(b+n)}{\lambda^n(a)(b)} \end{cases}$$

Quod si ergo breuitatis gratia statuamus

P =

$$P = \frac{(a+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)}{\lambda^3} + \frac{(a+4)}{\lambda^4} + \ldots\ldots \frac{(95)}{\lambda^{95-a}}$$

$$Q = \frac{(b+1)}{\lambda} + \frac{(b+2)}{\lambda^2} + \frac{(b+3)}{\lambda^3} + \frac{(b+4)}{\lambda^4} + \ldots\ldots \frac{(95)}{\lambda^{95-b}}$$

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3} + \text{ etc.}$$

erit tota ſumma redituum

$$N x + N z \left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right).$$

Colligamus ſimili modo omnes expenſas in vnam ſummam, quae ſumma ex ſex ſequentibus ſeriebus erit compoſita:

$$1000\,N \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{(a)}{(a)} & +\frac{(a+1)}{\lambda(a)} & +\frac{(a+2)}{\lambda^2(a)} & +\frac{(a+3)}{\lambda^3(a)} & +\text{ etc.} \\ -\frac{(a+1)}{(a)} & -\frac{(a+2)}{\lambda(a)} & -\frac{(a+3)}{\lambda^2(a)} & -\frac{(a+4)}{\lambda^3(a)} & -\text{ etc.} \\ +\frac{(b)}{(b)} & +\frac{(b+1)}{\lambda(b)} & +\frac{(b+2)}{\lambda^2(b)} & +\frac{(b+3)}{\lambda^3(b)} & +\text{ etc.} \\ -\frac{(b+1)}{(b)} & -\frac{(b+2)}{\lambda(b)} & -\frac{(b+3)}{\lambda^2(b)} & -\frac{(b+4)}{\lambda^3(b)} & -\text{ etc.} \\ -\frac{(a)(b)}{(a)(b)} & -\frac{(a+1)(b+1)}{\lambda(a)(b)} & -\frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2(a)(b)} & -\frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^3(a)(b)} & -\text{ etc.} \\ +\frac{(a+1)(b+1)}{(a)(b)} & +\frac{(a+2)(b+2)}{\lambda(a)(b)} & +\frac{(a+3)(b+3)}{\lambda^2(a)(b)} & +\frac{(a+4)(b+4)}{\lambda^3(a)(b)} & +\text{ etc.} \end{array} \right\}$$

§. 14. Perſpicuum eſt etiam hic ſummas trium ſerierum conſtitutas P, Q, R, commode in ſubſidium vocari poſſe, hincque omnes expenſas ad initium relatas expreſſum iri per ſequentem formam:

$$1000\,N \left(\frac{(a)+P}{(a)} - \frac{\lambda P}{(a)} + \frac{(b)+Q}{(b)} - \frac{\lambda Q}{(b)} - \frac{(a)(b)-R}{(a)(b)} + \frac{\lambda R}{(a)(b)}\right), \text{ ſeu}$$

$$1000\,N \left(1 + \frac{(1-\lambda)P}{(a)} + \frac{(1-\lambda)Q}{(b)} + \frac{(\lambda-1)R}{(a)(b)}\right),$$

conſequenter aequatio pro ſolutione quaeſtionis propoſitae erit

$$x + z\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right) = 1000\left(1 + \frac{(1-\lambda)P}{(a)} + \frac{(1-\lambda)Q}{(b)} + \frac{(\lambda-1)R}{(a)(b)}\right)$$

§. 16.

§. 15. Cum iam ſit $\lambda = \frac{105}{100}$, erit $\lambda - 1 = \frac{5}{100}$ et $1000(\lambda - 1) = 50$, vnde noſtra aequatio erit

$$x + z\left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}\right) = 1000 - \frac{50\,P}{(a)} - \frac{50\,Q}{(b)} + \frac{50\,R}{(a)(b)}.$$

Quamobrem ſi totum pretium ſtatim ab initio perſolui debeat, ita vt ſit $z = 0$, erit hoc pretium

$$x = 1000 - \frac{50\,P}{(a)} - \frac{50\,Q}{(b)} + \frac{50\,R}{(a)(b)}.$$

Sin autem velimus vt pretium per totum temporis intervallum vsque ad mortem vtriusque coniugis aequaliter diſtribuatur, poni debet $x = z$, atque contributio annua prodibit ſequens:

$$z = \frac{1000 - \frac{50\,P}{(a)} - \frac{50\,Q}{(b)} + \frac{50\,R}{(a)(b)}}{1 + \frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a)(b)}}$$

ſicque totum negotium huc redit, vt pro qualibet aetate vtriusque coniugis valores ternarum ſerierum litteris P, Q, R inſignitarum inueſtigentur, quos ergo in ſequentibus euoluamus.

Euolutio valorum P et Q.

§. 16. Quoniam ſeries Q ſimili modo ex aetate b definitur, quo ſeries P ex aetate a erui debet, ſufficiet alterutram tantum pro ſingulis aetatibus euoluiſſe. Cum igitur ſit

$$P = \frac{(a+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)}{\lambda^2} + \frac{(a+3)}{\lambda^3} \ldots\ldots + \frac{(95)}{\lambda^{95-a}}$$

ſi omnes termini huius ſeriei ad eandem denominationem λ^{95-a} reducantur, atque ordine retrogrado diſponantur, fiet

$$P = \frac{1}{\lambda^{96-a}}\left((95) + (94)\lambda + (93)\lambda^2 + (92)\lambda^3 + \ldots + \lambda^{94-a}(a+1)\right).$$

§. 17.

§. 17. Euolutio autem huius feriei non parum foret taediofa, fi per fingulos annos eam abfoluere vellemus. Quia autem valores characterum (a) et (b) non adeo funt certi, vt non aliquam aberrationem agnofcere debeamus, fufficiet quinos terminos fe infequentes inuicem coniungere eorumque fummam quintuplo termini medii aequalem ftatuere, ita vt pro quinis prioribus terminis fcribi queat $5(93)\lambda^2$, quo facto valor noftrae litterae P erit

$$P = \frac{5}{\lambda^{95-a}}((93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} \ldots\ldots (a+3)\lambda^{92-a});$$

quare fi hanc feriem littera p defignemus, vt fit

$$p = (93)\lambda^2 + (88)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} + \ldots\ldots + (a+3)\lambda^{92-a}$$

inuento valore litterae p erit

$$P = \frac{5p}{\lambda^{95-a}}, \text{ hincque } \frac{P}{(a)} = \frac{5p}{(a)\lambda^{95-a}}.$$

Eodem modo, fi ponatur

$$q = (92)\lambda^2 + (83)\lambda^7 + (83)\lambda^{12} \ldots\ldots + (b+3)\lambda^{92-b}$$

habebitur

$$Q = \frac{5q}{\lambda^{95-b}} \text{ et } \frac{Q}{(b)} = \frac{5q}{(b)\lambda^{95-b}}.$$

Euolutio tertii valoris R.

§. 18. Series quam littera R defignauimus erat haec:

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda\lambda} + \ldots\ldots \frac{(a+n)(b+n)}{\lambda^n}$$

quam feriem eo vsque continuari oportet, donec termini fequentes euanefcant, quod fit, fi alteruter numerorum $(a+n)$ vel $(b+n)$ fuperet 95, vnde ftatim ac maior horum duorum numerorum ad iftum terminum exfurgit, feries hic terminata eft cenfenda.

§. 19.

§. 19. Quia autem ambo numeri a et b in noftrum calculum aequaliter ingrediuntur, neque vllum difcrimen inde nafcitur, etiamfi hae duae litterae inter fe permutentur, ita vt a denotet aetatem vxoris et b aetatem mariti: affumere poterimus aetatem a femper effe maiorem quam b; fi enim vxor natu maior fuerit quam maritus, tum a defignabit aetatem vxoris, at b mariti. Quare cum aetatem b tanquam minorem fpectemus, difcrimen littera d defignemus, ita vt fit $b = a - d$, vbi quidem differentia d nulla erit, fi ambo coniuges eandem habuerint aetatem.

§. 20. Hoc obferuato vltimus noftrae feriei terminus ibi erit, vbi fit $a + n = 95$ ideoque $n = 95 - a$, ita vt iam noftra feries futura fit

$$R = \frac{(a+1)(b+1)}{\lambda} + \frac{(a+2)(b+2)}{\lambda^2} + \ldots\ldots \frac{(95)(b+95-a)}{\lambda^{95-a}}$$

vbi ergo vltimus terminus eft $\frac{(95)(95-d)}{\lambda^{95-a}}$. Reducamus nunc, vt ante, omnes has fractiones ad eandem denominationem λ^{95-a}, ac totam feriem ordine retrogrado difponamus, reperiemusque

$$R = \frac{1}{\lambda^{95-a}}((95)(95-d) + (94)(94-d)\lambda + (93)(93-d)\lambda^2$$
$$+ (92)(92-d)\lambda^3 + \ldots\ldots \lambda^{94-a}(a+1)(a-d+1)),$$

cuius ergo feriei fummam pro fingulis valoribus amborum numerorum a et d computari oportet.

§. 21. Quo autem ifte calculus facilior reddatur, iterum quinos terminos, vt ante fecimus, in vnum contrahamus, dum fcilicet eorum fummam quintuplo medii inter eos aequalem aeftimabimus, quo facto habebimus

R =

$$R=\frac{5}{\lambda^{95-a}}((93)(93-d)\lambda^2+(88)(88-d)\lambda^7\ldots(a+3)(a+3-d)\lambda^{92-a}.$$

Quod si ergo ponamus

$$r=(93)(93-d)\lambda^2+(88)(88-d)\lambda^7\ldots+(a+3)(a+3-d)\lambda^{92-a},$$

inuento valore huius feriei r erit ipfe valor, quem quaerimus $R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}}$; et quoniam pro noftro calculo indigemus valore, $\frac{R}{(a)(b)}$ erit

$$\frac{R}{(a)(b)}=\frac{5r}{(a)(b)\lambda^{95-a}},$$

hisque valoribus pro fingulis cafibus inuentis aequatio noftra generalis erit

$$x+z\left(\frac{P}{(a)}+\frac{Q}{(b)}-\frac{R}{(a)(b)}\right)=1000-\frac{50P}{(a)}-\frac{50Q}{(b)}+\frac{50^2R}{(a)(b)}.$$

§. 22. Quoniam hic duo numeri occurrunt a et d, ifte calculus multo maiorem laborem poftulat quam praecedens pro feriebus P et Q, quem vt fubleuemus, ambos numeros a et d per quinarium vel crefcere vel decrefcere affumemus, hanc ob rem plures cafus euolui oportebit pro variis valoribus differentiae d, quam fucceffiue ftatuemus 0, 5, 10, 15, 20, etc. Vnde hos cafus fequenti modo ordine referamus.

I. Cafus.

quo $d=0$ ideoque $b=a$.

Hic ergo erit

$$r=(93)^2\lambda^2+(88)^2\lambda^7+(83)^2\lambda^{12}\ldots(a+3)^2\lambda^{92-a}$$

vnde fit

$$\frac{R}{(a)^2}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)^2}.$$

II.

II. Cafus

quo $d=5$ ideoque $b=a-5$.

Tum ergo erit

$$r=(93)(88)\lambda^2+(88)(83)\lambda^7+(83)(78)\lambda^{12}\ldots(a+3)(a-2)\lambda^{92-a},$$

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}}\ \text{et}\ \frac{R}{(a)(a-5)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-5)}.$$

III. Cafus

quo $d=10$ ideoque $b=a-10$.

Hic ergo erit

$$r=(93)(83)\lambda^2+(88)(78)\lambda^7+(83)(73)\lambda^{12}\ldots(a+3)(a-7)\lambda^{92-a},$$

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}}\ \text{et}\ \frac{R}{(a)(a-10)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-10)}.$$

IV. Cafus

quo $d=15$ ideoque $b=a-15$.

Hoc cafu erit

$$r=(93)(78)\lambda^2+(88)(73)\lambda^7+\ldots(a+3)(a-12)\lambda^{92-a},$$

vnde fit

$$R=\frac{5r}{\lambda^{95-a}}\ \text{et}\ \frac{R}{(a)(a-15)}=\frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-15)}.$$

V. Cafus

quo $d=20$ ideoque $b=a-20$.

Tum ergo erit

$$r=(93)(73)\lambda^2+(83)(68)\lambda^7+\ldots(a+3)(a-17)\lambda^{92-a},$$

vnde

vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-20)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-20)}.$$

VI. Casus

quo $d = 25$ ideoque $b = a - 25$.

Hoc casu erit

$$r = (93)(68)\lambda^2 + (88)(63)\lambda^7 + (83)(58)\lambda^{12} \ldots (a+3)(a-22)\lambda^{92-a},$$

vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-25)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-25)}.$$

VII. Casus

quo $d = 30$ ideoque $b = a - 30$.

Tum ergo erit

$$r = (93)(63)\lambda^2 + (88)(58)\lambda^7 + (83)(53)\lambda^{12} \ldots (a+3)(a-27)\lambda^{92-a}$$

vnde fit

$$R = \frac{5r}{\lambda^{95-a}} \text{ et } \frac{R}{(a)(a-30)} = \frac{5r}{\lambda^{95-a}(a)(a-30)}.$$

SO-

SOLVTIO QVARVNDAM QVAESTIONVM DIFFICILIORVM IN CALCVLO PROBABILIVM.

§. 1.

His quaestionibus occasionem dedit ludus passim publice institutus, quo ex nonaginta schedulis, numeris 1, 2, 3, 4 .... 90 signatis, statis temporibus quinae schedulae forte extrahi solent. Hinc ergo huiusmodi quaestiones oriuntur: quanta scilicet sit probabilitas vt, postquam datus extractionum numerus fuerit peractus, vel omnes nonaginta numeri exierint, vel saltem 89, vel 88, vel pauciores. Has igitur quaestiones, vtpote difficillimas, hic ex principiis calculi Probabilium iam pridem vsu receptis, resoluere constitui. Neque me deterrent obiectiones Illustris *D'Alembert*, qui hunc calculum suspectum reddere est conatus. Postquam enim summus Geometra studiis mathematicis valedixit, iis etiam bellum indixisse videtur, dum pleraque fundamenta solidissime stabilita euertere est aggressus. Quamvis enim hae obiectiones apud ignaros maximi ponderis esse debeant, haud tamen metuendum est, inde ipsi scientiae vllum detrimentum allatum iri.

§. 2. Qui in huiusmodi inuestigationibus elaborarunt, facile perspicient, resolutionem harum quaestionum calculos