1785

De insigni promotione scientiae numerorum

Leonhard Euler

$\frac{q^{15}}{1 \cdot \ldots \cdot 15} = 0,00000,00006,68803,51098,11467,225$

$\frac{q^{16}}{1 \cdot \ldots \cdot 16} = 0,00000,00000,65659,63114,97947,230$

$\frac{q^{17}}{1 \cdot \ldots \cdot 17} = 0,00000,00000,06066,93573,11061,950$

$\frac{q^{18}}{1 \cdot \ldots \cdot 18} = 0,00000,00000,00529,44002,00734,620$

$\frac{q^{19}}{1 \cdot \ldots \cdot 19} = 0,00000,00000,00043,77065,46731,370$

$\frac{q^{20}}{1 \cdot \ldots \cdot 20} = 0,00000,00000,00003,43773,91790,981$

$\frac{q^{21}}{1 \cdot \ldots \cdot 21} = 0,00000,00000,00000,25714,22892,855$

$\frac{q^{22}}{1 \cdot \ldots \cdot 22} = 0,00000,00000,00000,01835,99165,212$

$\frac{q^{23}}{1 \cdot \ldots \cdot 23} = 0,00000,00000,00000,00125,38995,403$

$\frac{q^{24}}{1 \cdot \ldots \cdot 24} = 0,00000,00000,00000,00008,20675,327$

$\frac{q^{25}}{1 \cdot \ldots \cdot 25} = 0,00000,00000,00000,00000,51564,550$

$\frac{q^{26}}{1 \cdot \ldots \cdot 26} = 0,00000,00000,00000,00000,03115,285$

$\frac{q^{27}}{1 \cdot \ldots \cdot 27} = 0,00000,00000,00000,00000,00181,239$

$\frac{q^{28}}{1 \cdot \ldots \cdot 28} = 0,00000,00000,00000,00000,00010,165$

$\frac{q^{29}}{1 \cdot \ldots \cdot 29} = 0,00000,00000,00000,00000,00000,549$

$\frac{q^{30}}{1 \cdot \ldots \cdot 30} = 0,00000,00000,00000,00000,00000,026$

$\frac{q^{31}}{1 \cdot \ldots \cdot 31} = 0,00000,00000,00000,00000,00000,000$

Hac quidem poteſtates diuiſae ſunt per certos numeros, qui autem plerumque ſunt ii ipſi, per quos eaedem poteſtates ipſius π in ſuperioribus formulis diuiſi occurrunt, vnde euolutio in fractiones decimales eo facilior redditur.

DE

98, 11467, 225
14, 97947, 230
73, 11061, 950
02, 00734, 620
65, 46731, 370
773, 91790, 981
714, 22892, 855
835, 99165, 212
125, 38995, 403
008, 20675, 327
000, 51564, 550
000, 03115, 285
000, 00181, 239
000, 00010, 165
000, 00000, 549
000, 00000, 026
000, 00000, 000
rtos numeros, qui
eaedem poteſtates
urrunt, vnde euo-
dditur.
DE

DE INSIGNI PROMOTIONE SCIENTIAE NVMERORVM.

§. 1.

Eximia omnino ſunt, quae celeberr. *La Grange* in Comment. Academiae Regiae Boruſſicae pro Anno 1773 de diuiſoribus formulae generaliſſimae $Btt + Ctu + Duu$ demonſtrauit, et maximam lucem in ſcientia numerorum, quae etiamnunc tantis tenebris eſt inuoluta, accendunt. Ob hoc ipſum autem, quod iſta tractatio maxime eſt generalis, ii qui non ſatis ſunt exercitati in huiusmodi ſpeculationibus, non parum difficultatis offendunt, neque vim talium ſublimium demonſtrationum ſatis perſpicere valent. Quamobrem haud inutile erit omnia momenta, quibus hae demonſtrationes innituntur, diligentius explicare atque ad formulas magis ſpeciales accommodare, quandoquidem hoc modo omnia facilius intelligi poterunt. Deinde imprimis accuratius exponam, quantum firmamentum hinc plurimis theorematibus, quorum veritatem per ſolam inductionem mihi quidem cognoſcere licuit, afferri poſſit, vnde multo clarius patebit, quantum adhuc ad eorum perfectam demonſtrationem deſideretur.

 Lem-

Lemma.

§. 2. Si p et q fuerint numeri inter se primi, tum omnes plane numeri in hac forma generali $\alpha p \pm \beta q$ comprehendi possunt, idque infinitis modis. Huius lemmatis demonstratio per se facilis passim inuenitur.

Problema I.

§. 3. *Si* p *et* q *sint numeri inter se primi*, n *vero denotet numerum quemcunque datum, siue positiuum siue negatiuum, inuenire omnes diuisores huius formulae:* p p + n q q.

Solutio.

Denotet D diuisorem quemcunque numeri in hac forma $pp + nqq$ contenti, sitque d quotus ex hac diuisione ortus, ita vt sit $Dd = pp + nqq$. Hic iam statim euidens est, numerum d ad q fore primum; si enim q haberet diuisorem communem, eundem quoque p habere deberet, contra hypothesin, quamobrem numerus p per d et q ita exprimi poterit, vt sit $p = \alpha d \pm \beta q$, quo valore substituto fiet

$$Dd = \alpha\alpha dd \pm 2\alpha\beta dq + (\beta\beta + n) qq$$

ideoque diuisor

$$D = \alpha\alpha d \pm 2\alpha\beta q + (\tfrac{\beta\beta + n}{d}) qq,$$

vbi ergo $\frac{\beta\beta + n}{d}$ erit numerus integer, qui sit $= h$, ita vt habeatur

$$D = \alpha\alpha d \pm 2\alpha\beta q + hqq,$$

pro qua forma scribamus

$$D = frr \pm gqr + hqq,$$

ita

ita
fh
tur
con
er se primi, tum
rali $\alpha p \pm \beta q$
Huius lemma-
tur.
dur
se primi, n vero
itiuum siue nega-
ae: p p + n q q.
ide
qua
per
numeri in hac
tus ex hac diui-
Hic iam statim
um; si enim q
pro
mul
quoque p habere
rit
umerus p per d
num
βq, quo valore
mer
f e
$+ n) qq$
q,
fit $= h$, ita vt
mul
$4f$
affe
diiu
omn
ita

ita vt sit $f = d$, $r = \alpha$, $g = 2\beta$ et ob $h = \frac{\beta\beta + n}{d}$ erit $fh = \beta\beta + n$; hincque fiet $4fh - gg = 4n$. Hinc igitur patet, omnes diuisores formae $pp + nqq$ semper contineri in hac forma:

$$D = frr \pm gqr + hqq,$$

dummodo fuerit $4fh - gg = 4n$. Ac viciffim, si fuerit

$$D = frr \pm gqr + hqq, \text{ erit}$$

$$4df = 4ffrr \pm 4fgqr + 4fhqq;$$

ideoque ob $4fh = 4n + gg$, erit

$$4Df = (2fr \pm gq)^2 + 4nqq,$$

quae forma a proposita non discrepat, si modo diuidatur per 4.

Corollarium 1.

§. 4. In genere igitur omnes diuisores formulae propositae $pp + nqq$ comprehendere licebit in ista formula latissime patente: $frr + grs + hss$, dummodo fuerit $4fh - gg = 4n$, siue $fh - \frac{1}{4}gg = n$; vnde patet, innumeras huiusmodi formulas exhiberi posse, quoniam numerum g pro lubitu accipere licet. Ex eo autem numeros f et h ita definiri oportet, vt fiat $4fh = 4n + gg$.

Scholion.

§. 5. Quoniam autem innumerabiles huiusmodi formulas: $frr + grs + hss$, exhibere licet, in quibus sit $4fh - gg = n$, parum hinc lucri ad nostrum institutum afferri videtur. Proposito enim quocunque numero D, ad diiudicandum, vtrum esse possit diuisor formae $pp + nqq$, omnes illae innumerabiles formulae considerari deberent,

num

num forte iste numerus D in quapiam illarum contineatur. Praecipuum igitur inuentum, quod Illustri *la Grange* acceptum referre debemus, in hoc consistit, quod infinitam illam huiusmodi formularum multitudinem ad exiguum numerum pro quouis casu reuocare docuit, id quod in sequente problemate exponamus.

Problema II.

§. 6. Formam generalem diuiforum ante inuentam, $frr + grs + hss$, *in qua sit* $4fh - gg = n$, *in aliam eiusdem formae,* $f'tt + g'tu + h'uu$, *transmutare, in qua sit* $g' < f'$ *vel* h'; *manente proprietate* $4f'h' - g'g' = n$.

Solutio.

Ponamus esse $f < h$ et numerum g quantumuis esse maiorem quam f, ac statuamus $r = t - \alpha s$, quo valore substituto orietur ista forma:

$$ftt + (g - 2\alpha f)ts + (\alpha\alpha f - \alpha g + h)ss;$$

vbi manifesto α ita assumi poterit, vt fiat $g - 2\alpha f < f$, vbi quidem animaduertendum est, nihil referre, vtrum $g - 2\alpha f$ prodeat positiuum an negatiuum. Statuatur igitur $g - 2\alpha f = \pm g'$, ita vt certe sit $g' < f'$, tum vero ob analogiam loco f scribatur f' et $\alpha\alpha f - \alpha g + h = h'$ eritque

$$4f'h' - g'g' = 4fh - gg = n.$$

Hoc igitur modo forma proposita reducta est ad hanc:

$$f'tt \pm g'ts + h'ss,$$

in

n contineatur. Grange accep- infinitam illam guum nume- quod in se- nte inuentam, in aliam eius- re, in qua sit g' = n. antumuis esse o valore sub- + h) ss; - 2αf < f, ferre, vtrum Statuatur igi- tum vero ob = h' eritque ad hanc: in

in qua certe est $g' < f'$. Quod si iam eueniat vt g' adhuc maius fuerit quam h', tum simili modo ista formula in aliam transformari poterit, in qua coëfficiens medius vtrovis extremo sit minor, vnde patet formam propositam

$$frr \pm grs + hss$$

semper in aliam similis formae

$$f'tt \pm g'tu + h'uu$$

conuerti posse, in qua g' minus sit quam f' et h', simulque etiam fiat $4f'h' - g'g' = n$.

Corollarium 1.

§. 7. Hoc igitur modo infinita multitudo formularum $frr + grs + hss$, in qua $4fh - gg = n$ plerumque ad satis exiguum numerum reduci potest, dum scilicet omnes illae formulae excludi possunt, in quibus coëfficiens medius g maior est alterutro extremorum.

Corollarium 2.

§. 8. Cum igitur sit tam $f > g$ quam $h > g$, erit $4fh > 4gg$. Sit igitur $4fh = 4gg + \Delta$, et cum esse debeat $4fh - gg = 4n$, erit $3gg + \Delta = 4n$, ideoque $3gg < 4n$, hinc ergo $g < \sqrt{\frac{4n}{3}}$; quamobrem loco g successiue eos tantum valores assumsisse sufficiet, qui sunt minores quam $\sqrt{\frac{4n}{3}}$, ex quibus singulis facile colligentur valores litterarum f et h ex aequatione $4fh = gg + n$, quo facto omnes plane diuisores formae $pp + nqq$ certe continebuntur in quapiam harum formularum simpliciorum.

Scho-

Scholion.

§. 9. Quoniam aequatio $4fh - gg = 4n$ locum habere nequit, nisi g sit numerus par, pro g statim scribamus $2g$, vt forma d sit $frr + 2grs + hss$, existente $fh - gg = n$, quae ergo forma semper ita reduci potest vt sit $2g < f$ vel $< h$. Haec autem reductio commodissime per gradus institui potest, dum loco α in superiori reductione scribitur vnitas. Ita si fuerit diuisor

$$D = frr + 2grs + hss,$$

erit quoque

$$D = f'rr + 2g'rs + h'ss,$$

existente duplici modo vel

$$f' = f,\ g' = f - g \text{ et } h' = f - 2g + h,$$

vel etiam

$$h' = h,\ g' = h - g \text{ et } f' = f - 2g + h,$$

quoniam membra extrema inter se commutare licet. Quod si hic nondum fuerit $2g' < f'$ seu $2g' < h'$, ista operatio tam diu continuari debet, donec fiat $2g < f$ vel h; vbi notandum, in his formulis terminum medium $2grs$ tam positiuum quam negatiuum accipi posse, propterea quod numeri r et s denotare possunt omnes numeros integros siue positiuos siue negatiuos. His igitur praemissis inuestigemus omnes diuisores primos numerorum vel in hac forma: $pp + nqq$, vel in hac: $pp - nqq$ contentorum; si quidem diuisores compositi ex primis componuntur, ita vt cognitis omnibus diuisoribus primis simul omnes compositi habeantur.

Pro-

$= 4n$ locum
g statim scri-
hss, existente
reduci potest
commodissime
periori redu-
$+ h$,
$+ h$,
licet. Quod
ista operatio
f vel h; vbi
$2grs$ tam
opterea quod
eros integros
missis inuesti-
l in hac for-
ontentorum; si
untur, ita vt
nes compositi
Pro-

Problema III.

§. 10. *Inuenire omnes diuisores primos numerorum in hac forma:* $pp + nqq$, *contentorum, existentibus numeris* p *et* q *tam inter se primis quam respectu numeri* n.

Solutio.

I. Quia enim hic de diuisoribus primis tantum sermo est, nisi p esset quoque primus ad n, formula $pp + nqq$ etiam admitteret omnes diuisores numeri n, qui propterea nullam inuestigationem requirunt et sponte se produnt. Sit ergo D diuisor quicunque formae $pp + nqq$, ac modo vidimus semper fore

$$D = frr + 2grs + hss,$$

existente $fh - gg = n$, ita vt sit tam $2g < f$ quam $2g < h$; quare cum hinc sit $f > 2g$ et $h > 2g$, erit $fh > 4gg$. Sit igitur $fh = 4gg + \Delta$, et quia $fh - gg = n$, erit $3gg + \Delta = n$ ideoque $gg < \frac{n}{3}$ et $g < \sqrt{\frac{n}{3}}$. Hac igitur conditione multitudo formarum pro diuisore D ad eo minorem numerum reducitur, quo minor fuerit numerus n. Cum igitur sit

$$D = frr + 2grs + hss, \text{ erit}$$

$$Df = ffrr + 2fgrs + fhss,$$

ideoque ob $fh = gg + n$ fiet

$$Df = (fr + gs)^2 + nss,$$

quae est ipsa forma proposita. Simili modo permutatis litteris f et h erit quoque

$$Dh = (hs + gr)^2 + nrr,$$

vnde patet, si fuerit Df numerus formae $pp + nqq$, tum etiam productum Dh fore eiusdem formae, ita vt suf-

ficiat

ficiat alterutram inueniſſe. Pro quouis ergo caſu quaerantur omnes valores litterae f, qui ſint f, f', f'', f''', etc. atque omnes diuiſores primi D ita erunt comparati, vt vel D, vel Df, vel Df', vel Df'', etc. ſint numeri formae $pp + nqq$. Haecque ſequuntur ex demonſtrationibus Illuſtris *la Grange*.

II. Haec igitur coniungamus cum iis, quae iam olim de formis horum diuiſorum primorum ſum commentatus, vbi oſtendi, omnes hos diuiſores comprehendi poſſe in huiusmodi expreſſione: $4ni + a$, dum ſcilicet a denotat certos numeros primos ad $4n$ ſimulque minores quam $4n$, vbi tantum ſemiſſis talium numerorum occurrit, reliquis hinc prorſus excluſis. Vnde ſi α denotet hos numeros excluſos, affirmari poterit, nullos numeros, in forma $4ni+\alpha$ contentos, eſſe poſſe diuiſores formae $pp + nqq$. Iſtae autem formae egregie conueniunt cum praecedentibus. Si enim fuerit $D = pp + nqq$, alteruter numerorum p et q debet eſſe impar, ideoque q vel par vel impar. Sit primo q par, ideoque qq numerus formae $4i$, fiet $D = 4ni + pp$. Vnde patet, litteram illam a complecti omnes numeros quadratos impares et primos ad $4n$, ſiue reſidua, quae ex diviſione horum quadratorum, per $4n$ facta, remanent. Sin autem fuerit q numerus impar, ideoque qq formae $4i+1$, hinc fiet $D = 4ni + pp + n$. Vnde patet, litteram a etiam complecti omnes numeros formae $pp + n$, qui quidem ad $4n$ ſint primi, vel eorum reſidua ex diuiſione per $4n$ remanentia. Iidem vero etiam numeri pro a reſultant, ſi fuerit Df numerus formae $pp + nqq$, id quod in exemplis facilius oſtendi poterit.

III.

aſu quaeran- f', f'', etc. parati, vt vel umeri formae ſtrationibus Il- s, quae iam ſum commen- rehendi poſſe icet a denotat res quam $4n$, urrit, reliquis numeros ex- orma $4ni+\alpha$ $+ nqq$. Iſtae cedentibus. Si rorum p et q par. Sit primo $D = 4ni+pp$. numeros qua- , quae ex di- emanent. Sin formae $4i+1$, teram a etiam qui quidem ad per $4n$ re- ſultant, ſi fue- od in exemplis III.

III. His expoſitis, cum forma $4ni + a$ complectatur omnes diuiſores formae $pp + nqq$; altera autem forma $4ni + \alpha$ nullos diuiſores in ſe inuoluat, ex priori forma $4ni + a$ excludi debebunt omnes numeri diuiſibiles per quempiam numerum formae $4ni + \alpha$. Quod ſi igitur demonſtrari poſſet, hoc modo ex formula $4ni + a$ omnes plane numeros excludi, qui nequeunt eſſe diuiſores formae $pp + nqq$, tum manifeſto ſequeretur, omnes numeros primos formae $4ni + a$ certe eſſe diuiſores formae $pp + nqq$, quandoquidem tantum numeros compoſitos hoc modo excluſimus. Totum ergo negotium huc redit, vt demonſtretur, formulam $4ni + \alpha$ omnes plane continere numeros primos, qui nequeunt eſſe diuiſores formae $pp + nqq$; quod ſi demonſtrari poſſet, nihil amplius in hoc genere deſideraretur.

Corollarium 1.

§. 11. Pro quouis ergo numero n omnes numeri ipſo $4n$ minores ad eumque primi in duas claſſes diſtribuentur, quarum alteram littera a, alteram vero littera α deſignauimus, ita vt formula $4ni+a$ contineat omnes diuiſores formae $pp + nqq$, altera vero formula, $4ni + \alpha$, diuiſores illos penitus excludat, neque vllus numerus iſtius formae vnquam eſſe poſſit diuiſor formulae $pp + nqq$. Multitudo autem numerorum vtriusque claſſis ſemper eſt eadem; ſcilicet ſi multitudo omnium numerorum minorum quam numerus $4n$ ad eumque primorum fuerit $= 2\lambda$ (ſemper enim iſte numerus eſt par). Prior forma a continet λ numeros, totidemque etiam continebit altera forma α.

Corol.

Corollarium 2.

§. 12. Circa has formulas: $4ni+a$ et $4ni+\alpha$, iam olim demonstraui, si numeri a et a' in priore classe occurrant, tum ibi quoque occurrere productum aa', id quod etiam de pluribus numeris huius classis est intelligendum, qui si fuerint a, a', a'', a''' etc. etiam producta tam ex binis quam pluribus horum numerorum, atque adeo etiam omnes eorum potestates in eadem classe reperientur, postquam scilicet per $4n$ diuisi ad residua minora quam $4n$ fuerint reducti. Deinde etiam demonstraui, si α fuerit numerus posterioris classis, tum in eadem quoque reperiri debere numeros $a\alpha$, $a'\alpha$, $a''\alpha$, $a'''\alpha$, etc. Vnde patet, multitudinem numerorum posterioris classis minorem esse non posse quam primae classis. Quod autem multitudo vtrinque sit prorsus aequalis. id etiam facile demonstrari potest. Tum vero etiam hoc certum est, si α, α', α'', α''', etc. fuerint numeri posterioris classis, tum tam eorum quadrata quam eorum producta ex binis in priorem classem ingredi, producta autem ex ternis iterum in classe posteriore reperiri.

Corollarium 3.

§. 13. Omnia igitur, quae adhuc in hoc genere desiderari possunt, huc redeunt, vt demonstretur, classem $4ni+\alpha$ omnes continere numeros primos, qui nequeant esse diuisores formae $pp+nqq$; tum enim euictum erit, omnes numeros primos formae prioris $4ni+a$ certe esse diuisores cuiuspiam numeri formae $pp+nqq$.

Problema IV.

§. 14. *Inuenire omnes diuisores primos numerorum in hac forma:* $pp-nqq$ *contentorum, vbi quidem, vt ante*

a et $4ni+\alpha$,
in priore classe
ductum aa', id
sis est intelligen-
am producta tam
atque adeo etiam
entur, postquam
iam $4n$ fuerint
erit numerus po-
riri debere nu-
et, multitudinem
non posse quam
inque sit prorsus
Tum vero etiam
erint numeri po-
uam eorum pro-
producta autem
i.
in hoc genere
nstretur, classem
s, qui nequeant
im euictum erit,
$i+a$ certe esse
nqq.
rimos numerorum
vbi quidem, vt
ante

ante, p *et* q *non solum sint primi inter se, sed etiam primi ad* n.

Solutio.

I. Conditio, quod p sit etiam primus ad n, ideo tantum hic adiicitur, quia alias etiam omnes diuisores numeri n hic in censum venirent, quos tamen hic excludimus, vtpote per se manifestos. Hic igitur primo patet, si fuerit D diuisor primus formae $pp-nqq$, tum etiam fore diuisorem formae $nqq-pp$, siquidem fuerit nqq maius quam pp. Nam si fuerit D diuisor formae $pp-nqq$, erit quoque diuisor formae $npp-nnqq$, quae forma, si loco nq scribamus r, abit in hanc: $npp-rr$. Deinde eodem modo vt ante patet, semper fore

$$D=frr+2grs+hss,$$

existente $fh-gg=-n$, hancque formam semper ita reduci posse, vt fiat $2g<f$ simulque $2g<h$, vbi quidem signa numerorum f et h non respiciuntur, si forte alterutrum membrum fiat negatiuum; quare cum, ob $f>2g$ et $h>2g$, sit $fh>4gg$, euidens est fieri non posse

$$fh-gg=-n$$

nisi vel f vel h fuerit negatiuum, vnde forma diuisoris ita debet constitui, vt sit

$$D=frr+2grs-hss$$

fierique debet $-fh-gg=-n$, siue $fh+gg=+n$. Quoniam igitur $fh>4gg$, necesse est vt sit $5gg<n$, ideoque $g<\sqrt{\tfrac{n}{5}}$, ita vt hoc casu pauciores valores pro g relinquantur. Tum autem erit

$$Df=ffrr+2grs-fhss, \text{ siue}$$
$$Df=(fr+gs)^2-nss$$

 quae

quae est forma ipsa proposita. Porro autem erit

$$D h = n r r - (g r - h s)^2,$$

quae est forma nostra inuersa $n p p - q q$. Hinc igitur intelligitur, si fuerit $D f$ numerus formae $p p - n q q$, tum eo ipso formulam $D h$ fore numerum formae $n p p - q q$.

II. Accommodemus haec etiam ad eam formam diuisorum, quam olim exhibui; ac primo quidem si fuerit $D = pp - nqq$, pro casibus quibus q est numerus par, ideoque $q q$ formae $4 i$, fiet $D = pp - 4ni$; vnde si ponatur $D = 4ni + a$, ob $p p > 4 n i$, si ponatur $p p = 4 n k + b$ prodibit talis forma: $D = 4 n i + b$, ita vt sit $a = b$, ideoque omnes numeros quadratos ad $4 n$ primos in se complectatur. Sin autem sit q numerus impar, ideoque $q q$ formae $4 i + 1$, fiet $D = p p - n - 4 n i$, positoque iterum $pp = 4nk + b$, prodit $D = 4ni + b - n$, ita vt hoc casu sit $a = b - n$, vbi b denotare potest omnes numeros quadratos, vel residua inde orta. Simili modo si fuerit $D = n p p - q q$, euidens est, valores pro a hinc prodituros praecedentium fore negatiuos, ita vt a comprehendat omnes numeros quadratos, deinde etiam omnes numeros formae $p p - n$, tam positiue quam negatiue sumtos; quamobrem forma omnium diuisorum ita exhiberi poterit, vt sit $4 n i \pm a$, forma autem pro numeris ex classe diuisorum exclusis erit $4 n i \pm \alpha$, quorum multitudo aequalis est priori, scilicet α semper totidem sortietur valores, quot habet littera a.

III. Quo igitur etiam in hoc genere nihil amplius desiderari queat, id tantum superest, vt demonstretur, formam

rit
inc igitur in-
$-nqq$, tum
e $npp - qq$.
m formam di-
idem si fuerit
s par, ideoque
atur $D = 4ni + a$,
prodibit talis
que omnes nu-
ctatur. Sin au-
ae $4i + 1$, fiet
$nk + b$, prodit
, vbi b denota-
idua inde orta.
ens est, valores
egatiuos, ita vt
, deinde etiam
ue quam nega-
uisorum ita ex-
m pro numeris
quorum mul-
totidem sortietur
re nihil amplius
emonstretur, for-
mam

mam posteriorem $4 n i \pm \alpha$ omnes plane continere numeros primos, qui nunquam esse queant diuisores vllius numeri vel formae $p p - n q q$, vel $n p p - q q$.

Corollarium 1.

§. 15. De his binis formulis: $4ni \pm a$ et $4ni \pm \alpha$, quarum illa omnes diuisores inuoluit, haec vero excludit, eadem valent, quae ante sunt tradita. Scilicet si a, a', a'', etc. ad priorem classem pertineant, ibidem quoque reperientur tam omnes potestates quam producta ex binis pluribusue horum numerorum; tum vero si α sit numerus posterioris classis, ibidem quoque occurrent omnes numeri $a \alpha$, $a' \alpha$, $a'' \alpha$, etc., ita vt multitudo horum numerorum minor esse nequeat quam prioris classis.

Corollarium 2.

§. 16. Quoniam littera a complectitur omnia quadrata, ante omnia eius valor erit $= 1$, tum vero etiam 9, 25, etc. nisi numerus n habeat diuisorem vel 3, vel 5, etc. His enim casibus ista quadrata excludi oportet, quia alioquin forma $4 n i \pm a$ numerus primus fieri non posset.

Scholion.

§. 17. His igitur generalibus praeceptis expositis omnia clariora euadent, si casus particulares euoluamus; hic enim plura adhuc occurrent, quae in genere attingere non licuit. Sufficiet autem id in aliquibus exemplis ostendisse, quibus pertractatis non difficile erit tabulam construere, quae pro omnibus casibus formas diuisorum primorum exhibeat.

Exem-

Exemplum 1.

§. 18. *Inuenire omnes diuisores primos numerorum in formula* $pp + nqq$ *contentorum, dum scilicet pro* p *et* q *assumatur numeri inter se primi.*

Solutio.

Posito diuisore primo

$$D = frr + 2grs + hss,$$

ob $n = 1$ debet esse $fh = gg + 1$, tum vero $g < \sqrt{\tfrac{1}{3}}$; vnde patet, pro g alium valorem assumi non posse praeter o; tum autem erit $fh = 1$ ideoque tam $f = 1$ quam $h = 1$, sicque omnes diuisores in hac forma $D = rr + ss$ continebuntur, ita vt summa duorum quadratorum alios diuisores non admittat, nisi qui ipsi sint summae duorum quadratorum. Altera autem forma diuisorum erit $4i + 1$, et excludentur omnes numeri formae $4n + 3$ siue $4n - 1$. Quod si ergo demonstrari posset, formulam $4i - 1$ omnes plane continere numeros primos, qui nequeunt esse diuisores formae $pp + qq$, tum simul demonstratum esset, etiam omnes diuisores primos formae $4i + 1$ fore summam duorum quadratorum. Hoc autem iam dudum a me post Fermatium est demonstratum.

Exemplum 2.

§. 18. *Inuenire omnes diuisores primos formae* $pp - qq$.

Solutio.

Hoc exemplum ad problema quartum refertur, estque $n = 1$, et quia debet esse $g < \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, necessario fieri oportet $g =$

os numerorum
licet pro p et
$g < \sqrt{\tfrac{1}{3}}$; vnosse praeter o; quam $h = 1$, $rr + ss$ contim alios diuisoduorum quarit $4i + 1$, et 3 siue $4n - 1$. $4i - 1$ omnes int esse diuisores n esset, etiam fore summam dum a me post
primos formae
um refertur, estssario fieri oportet $g =$

$g = o$, ideoque $fh = 1$, vnde oritur haec forma diuisorum: $D = rr - ss$, quae vtique continet omnes plane numeros primos excepto binario. Quamquam enim haec forma habet factores $r + s$ et $r - s$, tamen continet omnes primos, si fuerit $r - s = 1$, cuius ratio est peculiaris. Id etiam altera diuisorum forma declarat, qua, ob $a = 1$, fit $4i \pm 1$, in qua omnes plane numeri impares continentur, ita vt hoc casu nulli excludantur, alteraque forma $4i \pm \alpha$ hoc solo casu nullum locum habeat. Ceterum hic casus proprie huc non pertinet, quia diuisores formae $pp - qq$ per se constant.

Exemplum 3.

§. 19. *Inuenire omnes diuisores primos formae* $pp + 2qq$.

Solutio.

Hic casus pertinet ad problema tertium, existente $n = 2$, vnde cum debeat esse $g < \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, erit $g = o$, ideoque $fh = 2$, hinc forma diuisorum erit $= rr + 2ss$. Vnde patet, numeros formae $pp + 2qq$ alios non admittere diuisores, nisi qui sint eiusdem formae, quod quidem etiam iam dudum est demonstratum. Altera autem forma $D = 8i + a$, ob $a = pp$, vel etiam $a = pp + 2$, pro a hos dat valores: 1 et 3, ita vt omnes diuisores formae $pp + 2qq$ sint vel $8i + 1$ vel $8i + 3$. Formae ergo, quae ex classe diuisorum excluduntur, sunt $8i + 5$ et $8i + 7$, quas igitur sub forma $8i + \alpha$ complecti oportet. Quod si ergo demonstrari posset, solos numeros primos harum formarum ex classe diuisorum excludi, simul demonstratum esset, omnes numeros primos priorum formarum $8n + 1$ et $8n + 3$ contineri in formula $pp + 2qq$, id quod quidem iam est osten-

sum.

ſum. Ceterum binae poſteriores formulae etiam ita exprimi poſſunt: $8i-1$ et $8i-3$, ita vt valores ipſius α ſint negatiui ipſius a, id quod in genere de diuiſoribus formae $pp+nqq$ eſt tenendum.

Exemplum 4.

§. 20. *Inuenire omnes diuiſores primos formae* $pp-2qq$ *ſiue* $2pp-qq$.

Solutio.

Ex problemate quarto eſt $n=2$, ideoque, ob $g<\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, erit iterum $g=0$ et $fh=2$, vnde pro diuiſoribus erit $D=rr-2ss$, vel etiam $D=2rr-ss$; vnde patet has formas nullos alios diuiſores admittere, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae. Pro forma autem $D=8i\pm a$, quia eſt $a=pp$, vel etiam $a=pp-2$, valores pro a erunt ± 1, ergo omnes diuiſores continebuntur in forma $8i\pm 1$; excluduntur ergo omnes numeri formae $8i\pm 3$. Vnde ſi ſoli numeri primi formae $8i\pm 3$ ex claſſe diuiſorum excludantur, neceſſe eſt, vt omnes numeri primi formae $8i\pm 1$ in forma propoſita contineantur.

Corollarium 1.

§. 21. Cum in Problemate tertio reductio diuiſorum ad formam $pp+nqq$ plerumque vnico tantum modo ſuccedat, in caſu problematis quarti talis reductio ſemper infinitis modis ſuccedit; ſemper enim numeros p et q infinitis modis ita aſſumere licet, vt vel ipſe diuiſor D vel Df formulae $pp-nqq$ aequetur.

Corol-

iam ita exprimi
ſius α ſint nega-
iſoribus formae
primos formae
ique, ob $g<\sqrt{\tfrac{2}{3}}$,
diuiſoribus erit
patet has for-
i ipſi ſint eius-
quia eſt $a=pp$,
1, ergo omnes
xcluduntur ergo
li numeri primi
itur, neceſſe eſt,
forma propoſita
ductio diuiſorum
ntum modo ſuc-
ctio ſemper in-
p et q infinitis
iſor D vel Df
Corol-

Corollarium 2.

§. 22. Caſu autem huius exempli notari meretur, ſi fuerit $D=pp-2qq$, tum etiam fore $D=2rr-ss$, quoniam hae duae formae inter ſe aequales fieri poſſunt, iis enim aequatis fit

$$pp+ss=2(qq+rr)=(q+r)^2+(q-r)^2,$$

ita vt ſit $p=q+r$ et $s=q-r$.

Exemplum 5.

§. 23. *Inuenire diuiſores primos formae* $pp+3qq$.

Solutio.

Quia hic eſt $n=3$, ideoque $g<1$, tantum erit $g=0$, hincque diuiſor $D=rr+3ss$, ita vt etiam hoc caſu omnes diuiſores primi ſint formae $pp+3qq$. Quia autem limes pro g inuentus ipſi vnitati aequatur, quam ſuperare non debet, euoluamus etiam caſum $g=1$, vnde fit $fh=4$ ideoque vel $f=1$ et $h=4$, vel $f=2$ et $h=2$. Priori caſu fit

$$D=rr+2rs+4ss=(r+s)^2+3ss,$$

quae eſt ipſa forma propoſita. Altero caſu fit

$$D=2rr+2rs+2ss,$$

quae forma cum factorem habeat 2 ſtatui debet

$$D=rr+rs+ss$$

quae autem pariter ad propoſitam reducitur. Nam ſi s eſt numerus par, puta $s=2t$, erit

$$D=rr+2rt+4tt=(r+t)^2+3tt;$$

ſin

sin autem s est numerus impar, etiam r debebit esse impar, quia alioquin ad casum praecedentem reuolueremur; erit ergo $r+s$ numerus par, vnde posito $r = 2t - s$ fiet

$$D = 4tt - 2ts + ss = 3tt + (t-s)^2,$$

vnde patet superiorem conclusionem etiamnunc valere, semperque esse $D = rr + 3ss$. Deinde pro formula $12i + a$, ob $a = pp$ erit $a = 1$, tum vero formula $a = pp + 3$ dat $a =$ [illegible], vnde omnes diuisores continebuntur in alterutra harum formularum: $12i + 1$ vel $12i + 7$, quas coniunctim ita repraesentemus: $12i + 1, + 7$, vel etiam hoc modo $12i + 1, - 5$. Si enim omnes valores ipsius a infra $2n$ in genere deprimere liceat, admittendis scilicet numeris negatiuis, tum altera formula $12i = \alpha$, in qua nullus diuisor continetur, erit $12i + 5$ et $12i + 11$, vel $12i - 1, + 5$, vnde patet in genere valores ipsius α negatiuos esse ipsius a.

ebebit esse im-
reuolueremur;
$r = 2t - s$ fiet
$-s)^2$,
nc valere, sem-
ormula $12i + a$,
$a = pp + 3$
ntur in alterutra
quas coniunctim
iam hoc modo
ilius a infra $2n$
et numeris nega-
qua nullus di-
vel $12i - 1, + 5$,
iuos esse ipsius a.
$p - 3qq$ *etiam*
rit $n = 3$, ideo-
3, vnde diuisor
eros nullos alios
formae. Deinde
$3 - pp$, alii va-
omnes diuisores
ula igitur diuiso-
Scho-

Exemplum 6.

§. 23. *Inuenire diuisores formulae* $pp - 3qq$ *etiam* $3pp - qq$.

Solutio.

Applicando hic problema quartum erit $n = 3$, ideoque $g < \sqrt{\tfrac{3}{3}}$, consequentur $g = 0$ et $fh = 3$, vnde diuisor erit $D = rr - 3ss$. Hinc patet, hos numeros nullos alios diuisores admittere, nisi qui sint eiusdem formae. Deinde pro formula $12i + a$, ob $a = pp$, vel $a = 3 - pp$, alii valores non prodeunt, praeter $a = 1$, ita vt omnes diuisores contineantur in hac forma: $12i \pm 1$. Formula igitur diuisores excludens erit $12i \pm 5$.

Scho-

Scholion.

§. 24. Istas formulas iam olim expediui, et demonstraui eas alios diuisores non admittere, nisi qui sint eiusdem formae, id quod in maioribus numeris pro n assumtis non semper contingit. Conueniet autem eos casus excludere, quibus n est vel numerus quadratus, vel per quadratum diuisibilis. Si enim foret $n = kmm$, tum formula $pp \pm kmmqq$ conueniret cum hac: $pp \pm kqq$.

Exemplum 7.

§. 25. *Inuenire diuisores numerorum* $pp + 5qq$.

Solutio.

Ob $\sqrt{\tfrac{5}{3}} > g$ erit vel $g = 0$ vel $g = 1$; priori casu fit $fh = 5$, posteriori vero $fh = 6$. Prior casus dat diuisorem $D = rr + 5ss$, quae est ipsa forma proposita; posterior vero dat vel

$$D = rr + 2rs + 6ss \text{ vel}$$

$$D = 2rr + 2rs + 3ss,$$

quarum formarum illa per reductionem ad primam redit, cum fit

$$D = (r+s)^2 + 5ss,$$

haec vero ab illa discrepat, cum inde fiat

$$2D = 4rr + 4rs + 6ss = (2r+s)^2 + 5ss;$$

vnde patet, omnes diuisores vel ipsos esse numeros huius formae, vel eorum dupla, ita vt, si ipse diuisor D non fuerit formae $pp + 5qq$, eius duplum $2D$ certe futurum sit huius formae. Deinde pro forma $20i + a$, ob $a = pp$ eius valores hinc nati erunt 1 et 9, ex altera autem formula

mula $= pp + 5$ colliguntur iidem valores 1 et 9. Quia vero hic tantum de diuiſoribus agitur, pro a etiam ſumi poterit $\frac{pp+5}{2}$, vnde oriuntur valores 3, 7, ſicque formula omnes diuiſores continens erit $20i+1, +3, +7, +9$, contra vero formula diuiſores excludens erit $20i-1, -3, -7, -9$. Si iam demonſtrari poſſet, iſtam poſtremam formulam continere omnes numeros primos, qui nequeunt eſſe diuiſores formae propoſitae, ſimuldemonſtratum foret, omnes numeros primos in priore forma contentos certo eſſe diuiſores cuiuspiam numeri formae $pp + 5qq$, ideoque vel ipſos vel eorum dupla eandem formam habere debere. Tales autem numeri vsque ad centum ſunt

1, 3, 7, 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83, 89.

Exemplum 8.

§. 26. *Inuenire diuiſores numerorum formae* $pp-5qq$.

Solutio.

Hic ex problemate quarto eſt $n=5$, vnde ob $g < \sqrt{\frac{n}{3}}$ ſumi poterit $g = 0$, vel etiam $g = 1$. Nihil enim nocet ſumere $g = 1$; ſuperfluum tantum foret, ipſi maiorem valorem tribuere. At $g = 0$ dat diuiſorem $rr - 5ss$, hoc eſt formae propoſitae; alter vero valor $g = 1$ dat $fh = 4$ ideoque vel

$$D = rr + 2rs - 4ss, \text{ vel}$$

$$D = 2rr + 2rs - 2ss.$$

Prior reducitur ad $D = (r+s)^2 - 5ss$, hoc eſt ad propoſitam, poſterior vero per 2 diuiſa dat diuiſorem,

$$D = rr + rs - ss,$$

quae

1 et 9. Quia ve- etiam ſumi po- te formula omnes 7, +9, contra -1, -3, -7, -9. formulam conti- eſſe diuiſores for- mes numeros pri- iiſores cuiuspiam vel eorum dupla m numeri vsque 83, 89. formae pp-5qq. , vnde ob $g < \sqrt{\frac{n}{3}}$ Nihil enim nocet ipſi maiorem va- $rr-5ss$, hoc $=1$ dat $fh=4$ eſt ad propoſitam, quae

quae forma etiam ad propoſitam reducitur, quod ita oſtendo. Vel ambo numeri r et s erunt impares, vel altera par, alter impar. Pro caſu poſteriore ſit $s = 2t$ eritque

$$D = rr + 2rt - 4tt, \text{ ſiue } D = (r+t)^2 - 5tt.$$

Sin autem ambo numeri ſint impares, erit eorum ſuuma $r+s$ par, puta $2t$, ideoque $r = 2t - 5$, vnde ſit

$$D = 4tt - 2ts - ss = 5tt - (t+s)^2$$

Patet igitur, omnes diuiſores numerorum formae propoſitae quoque eiusdem eſſe formae. Iam pro forma $20i \pm a$ valor $a = pp$ praebet 1 et 9, alter autem valor $a = 5 - pp$ praebet itidem 1 et 9, ita vt omnes diuiſores contineantur in hac forma $20i + 1, \pm 9$. Altera autem forma diuiſores excludens erit $20i \pm 3, \pm 7$.

Scholion.

§. 27. Quoniam ex his exemplis iam ſatis liquet, quomodo pro minoribus numeris n ſingulas has operationes inſtitui oporteat, aliquot exempla circa numeros maiores adhuc afferamus.

Exemplum 9.

§. 28. *Inuenire omnes diuiſores primos numerorum formae* $pp + 17qq$.

Solutio.

Cum ſit $\sqrt{\frac{17}{3}} < 3$, pro g habebimus tres valores 0, 1, 2. Primo ſit $g = 0$, ideoque $fh = 17$, hinc diuiſor oritur $G = rr + 17ss$, ideoque ipſius formae propoſitae. Secundo ſumatur $g = 1$, erit $fh = 18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, vnde naſcuntur hae formae:

1°. D

1°. $D = rr + 2rs + 18ss = (r+s)^2 + 17ss$

2°. $D = 2rr + 2rs + 9ss$, vnde fit

$2D = 4rr + 4rs + 18ss = (2r+s)^2 + 17ss$;

ita vt $2D$ fit formae propofitae:

3°. $D = 3rr + 2rs + 6ss$

cuius triplum induit formam propofitam:

Tertio fit $g = 2$ ideoque $fh = 21 = 1.\ 21 = 3.7$; vnde oritur

1°. $D = rr + 4rs + 21ss = (r+2s)^2 + 17ss$

2°. $D = 3rr + 4rs + 7ss$

cuius triplum iterum formam propofitam induit. Quamobrem omnes diuifores ita erunt comparati, vt vel ipfi, vel eorum dupla, vel eorum tripla habeant formam propofitam. Quod deinde ad formam $68i + a$ attinet, valor $a = pp$ praebet numeros, 1, 9, 25, 49, 13, 53, 33, 21; alter autem valor $a = pp + 17$ dat 21, 33, qui numeri cum praecedentibus conueniunt. Qui autem hic etiam fubdupla et fubtripla occurrere poffunt, primo patet formam $a = \frac{pp}{2}$ nullos dare valores idoneos: at $a = \frac{pp}{3}$ fequentes praebet numeros: 3, 27, 7, 11, 39, 23, 31, 63. Deinde vero formula $a = \frac{pp+17}{2}$ dat 9, 21, etc. qui numeri iam occurrunt. Denique formula $a = \frac{pp+17}{3}$ praebet 7, 11, 27, etc. qui itidem iam adfunt. Quamobrem omnes valores idonei pro a erunt

1, 3, 7, 9, 11, 13, 21, 23, 25, 27, 31, 33, 39, 49, 53, 63.

Hi autem numeri multo facilius inueniri poffunt; ftatim enim atque aliquos tantum reperimus, quoniam nouimus, eorum producta ex binis pluribusue etiam occurrere debere, ante omnia autem omnes numeri quadrati per fe occurrunt, ex

ex riunt num figno tem 7ss 17ss; Si i nebi ex 3.7; vnde 17ss uit. Quamvel ipfi, vel propofitam. lor $a = pp$ er autem vaaecedentibus fubtripla ocllos dare vaeros: 3, 27, 7, dat 9, ique formula iam adfunt. de h que fores fietqu 53, 63. offunt; ftatim m nouimus, rrere debere, fe occurrunt, ex

ex quibus, quia etiam 3 occurrit, iam omnes plane reperiuntur. Quod fi iam omnes hos numeros infra femiffem numeri 68 deprimamus, dum maiorum complementa ad 68 figno − affecta apponimus, tum valores ipfius a fequentem feriem conftituent:

$+1, +3, -5, +7, +9, +11, +13, -15, -19, +21,$
$+23, +25, +27, -29, +31, +33.$

Si iam omnium horum numerorum figna mutemus, obtinebimus omnes valores litterae α, pro formula $68i + \alpha$, ex qua omnes diuifores funt exclufi.

Corollarium 3.

§. 29. Hinc igitur perfpicuum eft, etiam pro omnibus aliis numeris pofitiuis loco n affumtis in valoribus litterae a omnes plane occurrere numeros impares minores quam $2n$, et qui fimul ad n fint primi, dum alii figno +, alii figno − funt affecti.

Exemplum 10.

§. 10. *Inuenire omnes diuifores primos numerorum in hac formula:* $pp - 19qq$, *vel etiam* $19pp - qq$ *contentorum.*

Solutio.

Hic igitur ob $n = 19$ erit $g < \sqrt{\tfrac{19}{3}}$, ideoque $g < 2$, vnde habebimus vel $g = 0$ vel $g = 1$. Sit primo $g = 0$ eritque diuifor $D = rr - 19ss$ ob $fh = 19$, ideoque hi diuifores iam funt ipfius formae propofitae. Sit porro $g = 1$ fietque

 fh

$fh = 19 - 1 = 18 = 1.18 = 2.9 = 3.6;$

vnde tres casus sunt euoluendi:

1°. $D = rr + 2rs - 18ss = (r+s)^2 - 19ss$

quae forma iam in proposita continetur.

2°. $D = 2rr + 2rs - 9ss,$

cuius duplum ad formam propositam redit.

3°. $D = 3rr + 2rs - 6ss$

cuius triplum in forma proposita continetur. Sicque omnes diuisores quaesiti vel ipsi, vel eorum dupla, vel eorum tripla in forma proposita continentur. Deinde pro forma $4ni \pm a$, siue $76i \pm a$ valores ipsius a ex sequentibus formulis deriuari debent:

1°. $a = pp$ dat 1, 9, 25, 49, 5, 45, 17, 73, 61.

2°. $a = \frac{pp}{2}$ dat nullos valores idoneos, quia omnes forent pares. 3°. $a = \frac{pp}{3}$, siue $a = 3tt$, praebet hos valores:

3, 27, 75, 71, 15, 59, 51, 67, 31.

4°. $a = 19 - pp$ dat 15, 3, etc.

qui iam occurrunt,

5°. $a = \frac{19 - pp}{2}$ dat 9, 5, 3, etc.

qui itidem iam adsunt.

6°. $a = \frac{19 - pp}{3}$ dat 5, 1, 15, etc.

qui etiam adsunt. Quamobrem omnes numeri idonei pro a assumendi, quoniam tam positiue quam negatiue accipi possunt, infra 38 deprimi possunt, dum scilicet maiorum complementa ad 76 apponuntur.

1, 3, 5, 9, 15, 17, 25, 27, 31.

Pro

Pr
cu
fin
mi
ue omnes
el eorum
ro forma
in
equentibus
1.
ies forent
res
ores:
cun
I
forn
quar
lonei pro a
cunc
accipi pos-
notc
orum com-
doqu
Pro

Pro altera autem forma $76i \pm \alpha$, in qua nulli diuisores occurrere possunt, valores ipsius α sunt sequentes:

7, 11, 13, 21, 23, 29, 33, 35, 37.

Scholion.

§. 31. Hactenus alios numeros pro n non assumsimus, praeter primos, quamobrem etiam adhuc adiungamus duo exempla circa numeros compositos.

Exemplum II.

§. 32. *Inuenire omnes diuisores primos numerorum in hac forma contentorum:* $pp + 30qq$.

Solutio.

Hic ob $n = 30$ et $g < \sqrt{10}$, loco g quatuor valores assumi conueniet, 0, 1, 2, 3 quos ergo singulos percurramus

I. $g = 0$ praebet $fh = 30$, vnde pro diuisore D sequentes formulae nascuntur:

1°. $D = rr + 30ss,$

2°. $D = 2rr + 15ss;$

3°. $D = 3rr + 10ss$

4°. $D = 5rr + 6ss$

quarum prima cum forma proposita congruit, tum vero secundae duplum, tertiae triplum et quartae quintuplum; vbi notetur, loco quintupli etiam sextuplum sumi posse, quandoquidem si fuerit

$5D = pp + 30qq;$

tum

tum etiam erit

$$6D = pp + 30qq$$

II. Sit iam $g = 1$, erit $fh = 31$, vnde vnica formâ nascitur

$$D = rr + 2rs + 31ss = (r+s)^2 + 30ss,$$

quae est ipsa forma proposita.

III. Sit $g = 2$, erit $fh = 34 = 1.34 = 2,17$; vnde duae formae nascuntur

1°. $D = rr + 4rs + 34ss = (r + 2s)^2 + 30ss.$

2°. $D = 2rr + 4rs + 17ss,$

cuius duplum ad formam propositam reducetur.

IV. Sit $g = 3$ eritque $fh = 39 = 1.39 = 3.13$, vnde iterum duae nascuntur formae

1. $D = rr + 6rs + 39ss = (r+3s)^2 + 30ss$

2°. $D = 3rr + 6rs + 13ss,$

cuius triplum induit formam propositam. Ex his igitur sequitur, omnes diuisores D ita esse comparatos, vt vel D, vel 2D, vel 3D, vel 6D in forma proposita contineantur. Deinde vero pro forma $4ni + a = 120i + a$ ante omnia notetur, multitudinem omnium numerorum minorum quam 120 simulque ad 120 primorum esse 32, vnde iam certo inferre possumus, numerum valorum tam litterae a quam α esse 16. Cum igitur primo in a omnes numeri quadrati occurrant, formula $a = pp$ dabit hos tantum numeros: 1 et 49: at vero formae $\frac{pp}{2}$, $\frac{pp}{3}$ et $\frac{pp}{6}$ nullos plane praebent numeros ad 120 primos. Altera vero forma $a = pp + 30$ praebet hos tantum numeros: 31, 79. Hinc autem porro $a = \frac{pp+30}{2}$, siue haec: $a = 2tt + 15$ praebet 17, 23, 47, 113. Porro $a = \frac{pp+30}{3}$, siue $a = 3tt + 10$ praebet 13, 37. Haec igitur

tur : $a=$ tantu huc mula sume Sit prael mus forma nascitur ss, ; vnde duae +30ss. Quoc comp ita di r. vnde iterum -30ss vbi o vel si tur o ius o his igitur se- s, vt vel D, 1 contineantur. ante omnia inorum quam iam certo in- rae a quam α ri quadrati oc- numeros: 1 et praebent nu- pp+ contin classis quoru vel et Hae i littera praese a=pp+30 autem porro 17, 23, 47, 113. , 37. Haec igi- tur

tur forma tantum dat duos valores. Denique $a = \frac{pp+30}{6}$, siue $a = 6tt + 5$ dat hosce: 11, 29, 59, 101. Hoc autem modo tantum 14 prodierunt valores pro littera a, ita vt duo adhuc desiderentur. Verum hic perpendendum est, loco formulae $pp + 30$ generalius poni potuisse $pp + 30qq$, vnde sumendo $p = 3t$ et per 3 diuidendo statui poterit $a = 3tt + 10qq$. Sit nunc $q = 2$, fietque $a = 3tt + 40$, vnde casus $t = 1$ praebet $a = 43$, at $t = 3$ dat $a = 67$; hocque modo nacti sumus omnes 16 valores ipsius a, qui ordine ita procedunt:

1, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 49, 59, 67, 79, 101, 113.

Quod si iam loco numerorum maiorum quam 60 eorum complementa ad 120 cum signo − scribantur, isti numeri ita disponi poterunt:

$$+1 - 7, +11, +17, -19, +23, +29, +31, +37, -41,$$
$$+43, +47, +49, -50, +59,$$

vbi omnes plane numeri impares ad 30 primi occurrunt: vel signo + vel − affecti, vbi si signa mutentur, habebuntur omnes valores litterae α pro formula $120i + \alpha$, cuius omnes numeri ex classe diuisorum excluduntur.

Corollarium 1.

§. 33. Omnes ergo diuisores numerorum formae $pp + 30qq$ in quatuor classes distribuuntur, quarum prima continet eos, qui ipsi sunt formae $pp + 30qq$; secunda classis vero eos, quorum dupla sunt eius formae, tertia, quorum tripla et quarta denique eos, quorum quintupla vel etiam sextupla ad formam $pp + 30qq$ reduci possunt. Hae igitur quatuor classes, si formam propositam $pp+30qq$ littera F, diuisores vero littera D designemus, hoc modo repraesentari possunt:

I. $D = F$; II. $2D = F$; III. $3D = F$; IV. $5D = F$;

vbi notasse iuuabit, si fuerit $2D = F$, tum etiam fore $15D = F$; similique modo si fuerit $3D = F$, erit etiam $10D = F$; at si fuerit $5D = F$, erit etiam $6D = F$.

Corollarium 2.

§. 34. Quando dicimus, omnes diuisores numerorum formae propositae $pp + 30qq$ in forma $120i + a$ contineri, id non ita est intelligendum, quasi omnes numeri in formula $120i + a$ contenti essent diuisores, sed inde excludi debent omnes illi, qui per quempiam numerum formae $120i + a$ sunt diuisibiles. His autem sublatis maxime probabile videtur, omnes reliquos numeros formulae $120i + a$, ideoque imprimis numeros primos, certe fore diuisores cuiuspiam numeri formae $pp + 30qq$. Isti autem numeri primi in formula $120i + a$ contenti facili negotio quousque libuerit assignari possunt, quippe qui hoc ordine vsque ad 240 progrediuntur

1, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 59, 67, 79, 101, 113;
131, 137, 149, 151, 157, 163, 167, 179, 199, 233.

Corollarium 3.

§. 35. Quoniam omnes diuisores sunt quadruplicis generis, inde etiam valores ipsius a in quatuor classes distribui conueniet, prouti inde oriuntur diuisores vel primae, vel secundae, vel tertiae, vel quartae classis, quibus ergo subscribamus characteres cuiusque classis 1, 2, 3, 6, hoc modo:

1,	11,	13,	17,	23,	29,	31,	37,	43,	47,	49,	59,	67,	79,	101,	113
1,	6,	3,	2,	2,	6,	1,	3,	3,	2,	1,	6,	3,	1,	6,	2.

Hic igitur notari meretur, singulas classes quater occurrere.

Exem-

IV. 5D=F;
etiam fore
, erit etiam
)=F.
fores numero-
120i+a con-
mnes numeri
fed inde ex-
numerum for-
latis maxime
nulae 120i+a,
diuifores cu-
autem numeri
tio quousque
ine vsque ad
, 79, 101, 113;
233.
it quadruplicis
r claffes diftri-
s vel primae,
, quibus ergo
, 6, hoc modo:
7, 79, 101, 113
, 1, 6, 2.
ater occurrere.
Exem-

Exemplum II.

§. 36. *Inuenire omnes diuisores primos numerorum in hac forma:* $pp - 30qq$, *siue in hac:* $30pp - qq$ *contentorum.*

Solutio.

Cum hic sit $\sqrt{\frac{30}{3}} < 3$, pro littera g habemus tantum tres valores 0, 1, 2. Hinc cum sit $fh = 30 - gg$, pro primo casu erit $fh = 30$, pro secundo $fh = 29$ et pro tertio $fh = 26$, quos igitur casus euoluamus.

I. Sit $g = 0$ et hinc nascuntur sequentes valores:

1°. $D = rr - 30ss$,

2°. $D = 2rr - 15ss$,

3°. $D = 3rr - 10ss$,

4°. $D = 5rr - 6ss$.

II. Si $g = 1$ vnica forma nascitur

$$D = rr + 2rs - 29ss = (r+s)^2 - 30ss,$$

quae ergo est ipsa forma proposita.

III. Si $g = 2$ oriuntur duae formulae

1°. $D = rr + 4rs - 26ss = (r+2s)^2 - 30ss$:

iterum ipsa proposita;

2°. $D = 2rr + 4rs - 13ss$,

cuius duplum fit numerus formae propositae. Hinc ergo nascuntur quadruplicis generis diuisores, qui posita littera F pro formula proposita sunt

I. $D = E$. II. $2D = F$. III. $3D = F$. IV. $6D = F$.

Deinde vero pro formula omnes diuisores continente $120i + a$ erit primo vel $a = pp$, vel $a = \frac{pp}{2}$ vel $a = \frac{pp}{3}$ vel $a = \frac{pp}{6}$,

vnde

vnde alii numeri ad 30 primi oriri nequeunt nisi ex prima forma $a = pp$, ideoque duo tantum valores hinc nascuntur: scilicet 1 et 49. Altera autem forma erat $a =$ vel $30 - pp$, vel $\frac{30-pp}{2}$, vel $\frac{30-pp}{3}$, vel $\frac{30-pp}{5}$, quarum prima $a = 30 - pp$ praebet hos numeros: 29, 19, 91. Quia autem loco 30 ponere possumus $30qq$, formula $a = 120 - pp$ praebet insuper hos valores: 119, 71. Secunda ad formam $a = 2tt - 15$ reducta dat hosce numeros: 13, 7, 17, 83, 113, 107. Huic vero formulae aequiualet $15pp - 2qq$, ergo sumto $p = 3$ erit quoque $a = 135 - 2qq$; vnde prodeunt 13, 7, 103; ideoque insuper nouus 103 accedit. Ex tertia forma $a = 3tt - 10$ hosce nouos numeros nanciscimur: 7, 17, forma autem affinis $a = 10tt - 3$ praebet insuper 37. Ex vltima forma $5tt - 6$ nascuntur hi valores: 1, 119; ex forma vero affini $a = 6tt - 5$ isti: 1, 19, 49, 91. Hinc imprimis notandum est, eosdem numeros ex diuersis classibus oriri posse. Prodierunt autem hactenus

1, 7, 13, 17, 19, 29, 37, 49, 71, 83, 91, 103, 107, 113, 119

quorum valorum numerus quidem tantum est 15, cum esse deberet 16; quia autem nouimus, cuiusque numeri complementum ad 120 etiam occurrere debere, iste defectus facile suppletur. Deerat scilicet 101 tanquam complementum ipsius 19. Quia autem numeri a tam positiue quam negatiue accipi possunt, complementa reiicere licet, ita vt pro a habeamus octo sequentes valores:

1, 7, 13, 17, 19, 29, 37, 49

reliqui igitur numeri praebent valores litterae α, qui erunt totidem

11, 23, 31, 41, 43, 47, 53, 59.

Corol-

Corollarium 1.

§. 37. Hoc igitur casu, admisso meo Theoremate, quod omnes numeri primi in forma $4ni + a$ contenti simul sint diuisores numerorum formae $pp \pm nqq$; numeri primi ex nostra formula $120i \pm a$ orti vsque ad 240 sunt sequentes:

1, 7, 13, 17, 19, 29, 37, 71, 83, 101, 103, 107, 113, 127, 137, 139, 149, 157, 191, 223, 227, 233.

Corollarium 2.

§. 38. Quoniam in hac euolutione vidimus, eosdem numeros ex diuersis classibus ortos esse, manifestum est nequicquam quatuor classes diuersas esse constitutas, sed binas earum in vnam coalescere posse. Primo enim omnes diuisores quartae classis, pro quibus erat $5D = F$, siue etiam $6D = F$, iam in prima classe $D = F$ reperiuntur, ita vt semper, quoties fuerit $5D = F$, etiam futurum sit $D = F$. Simili modo diuisores tertiae classis etiam continentur in classe secunda. Quod si enim fuerit $3D = F$, semper etiam erit $2D = F$, quamobrem omnes diuisores pro forma proposita $pp - 30qq$, vel $30pp - qq$ ad duas tantum classes priores reuocari possunt: semper enim erit vel $D = F$ vel $2D = F$.

Corollarium 3.

§. 39. Omnes igitur numeri primi ex nostra forma $120i + a$ oriundi duplicis erunt generis, dum vel ipsi vel eorum dupla formam propositam haberi possunt, quos simili modo vt ante distingui conueniet, subscribendo singulis valoribus characteres vel 1 vel 2

1, 7,

1,	7,	13,	17,	19,	29,	37,	49
1,	2,	2,	2,	1,	1,	2,	1.

Vbi notetur, ambos characteres totidem occurrere.

Scholion.

§. 40. Quod si ergo pro numeris cuiuscunque formae $pp \pm nqq$ omnes diuisores primi desiderentur, eos facillime ex nostra forma generali $4ni + a$ assignare licet, dum contra, si formulis ab Illustri *La Grange* exhibitis vti vellemus, opus foret maxime molestum, ex singulis formis $frr + 2grs + hss$ omnes numeros primos elicere; quamobrem maxime est optandum, vt demonstratio firma illius mei asserti detegatur, quippe quo demum ista Theoria ad summum perfectionis gradum euehetur. Arbitror autem, talem demonstrationem mox fortasse sperari posse, si sequentia momenta probe perpendantur.

1). Postquam pro formula proposita quacunque $pp \pm nqq$ ambae meae formulae $4ni + a$ et $4ni + \alpha$ fuerint constitutae, eae simul omnes plane numeros impares ad propositum n primos complectuntur; tum vero omnes diuisores ad formam priorem $4ni + a$ referuntur; nulli autem numeri alterius formae $4ni + \alpha$ possunt esse diuisores propositae, siue omnes numeri posterioris formae ex classe diuisorum penitus excluduntur.

2). Probe perpendatur, quouis casu omnes valores ipsius a egregia lege inter se cohaerere, ita vt omnes coniunctim quasi ambitum quendam completum constituant, in quo nihil deficiat nihilque abundet, quandoquidem omnia producta ex binis pluribusue horum numerorum iterum in eadem classe occurrunt, ita vt simul atque aliqui valores idonei pro a fuerint inuenti, ex iis reliqui omnes facile definiri queant, praecipue quoniam omnes numeri quadrati eorumue residua respectu diuisoris $4n$ certe ingrediuntur. Vnde si hoc modo omnia producta, atque etiam potestates numerorum iam inuentorum inserantur, mox tota ista classis ita adimplebitur, vt multitudo omnium numerorum huc pertinentium semper sit semissis omnium plane numerorum ad $4n$ primorum eoque minorum; altera vero semissis praebebit classem numerorum α, qui nullo modo diuisores euadere possunt.

3). Hinc igitur patet, ambas istas classes discrimine maxime memorabili et in natura ipsa numerorum fundato a se inuicem discrepare, atque adeo essentialiter a se inuicem distingui, ita vt numeri alterius classis natura sua ab altera classe prorsus sint diuersi.

4). Quoniam nulli numeri classis $4ni + \alpha$ vnquam esse possunt diuisores vllius numeri formae $pp \pm nqq$: ista classis tanquam origo spectari debet omnium numerorum, quorum natura ab indole diuisorum abhorret, quae repugnantia quoque ad omnes numeros extendi debet, qui diuisibiles sunt per vllum numerum classis $4ni + \alpha$. Si enim tales numeri possent esse diuisores, etiam isti huius classis numeri forent diuisores, id quod naturae rei repugnat.

5). Cum autem producta ex binis numeris classis $4ni + \alpha$ in classem diuisorum $4ni + a$ transeant, manifestum est, in prima classe plurimos occurrere debere ab indole diuisorum alienas; omnes scilicet eos, qui per vllum numerum alterius classis sunt diuisibiles.

Qq 2 6).

6). Quod si iam omnes isti numeri in classe $4ni+a$ deleantur siue excludantur, qui natura diuisorum refragantur, maxime probabile videtur, reliquos numeros omnes indole diuisorum fore praeditos. Cum hoc modo tantum numeri compositi expungantur, euidens est omnes plane numeros primos in forma $4ni+a$, contentos reuera fore diuisores cuiuspiam numeri formae $pp \pm nqq$. Totum ergo negotium huc redit, vt isti probabilitati vis perfectae demonstrationis concilietur. Haec autem veritas si qua est elegantius ita proponi potest.

Theorema demonstrandum.

§. 41. Si fuerit a diuisor cuiuspiam numeri formae $pp+nqq$, ita vt sit $aD = pp+nqq$, cum quoties $4ni+a$ est numerus primus, toties quoque erit $D(4ni+a)$, numerus formae $pp+nqq$. Hic autem sequentia notari oportet. 1) Numeros p et q inter se esse debere primos. 2) Diuisorem a etiam primum esse debere ad n, quoniam diuisores ipsius n hinc excluduntur. 3) Quod si forte eueniat, vt numerus $D(4ni+a)$ non videatur in forma $pp+nqq$ contineri, tum semper eius quadruplum, vel etiam eius productum per aliud quadratum, certe in ea contineri. Quoniam igitur hoc casu erit

$$D(4ni+a) = (\tfrac{p}{2})^2 + n(\tfrac{q}{2})^2,$$

haec resolutio nullam exceptionem mereri est censenda. Ita cum sit $27 = 4^2 + 11 \cdot 1^2$, erit $a = 27$ et $n = 11$ et $D = 1$, vnde formula $4ni+a$ euadit $44i+27$, quae casu $i = 1$ praebet 71, hoc est numerum primum; neque tamen in integris esse potest $71 = pp + 11qq$. Est vero

$$4 \cdot 71 = 284 = 3^2 + 11 \cdot 5^2 \text{ ideoque}$$
$$71 = (\tfrac{3}{2})^2 + 11 \cdot (\tfrac{5}{2})^2.$$

Tales autem casus raro occurrunt et ideo non sunt excipiendi, quia numeri formulae $4ni+\alpha$ ita ex classe diuisorum excluduntur, vt, etiamsi pro p et q numeri fracti accipiantur, tamen nunquam diuisores esse queant.

Scholion.

§. 42. Superfluum foret has inuestigationes ad huiusmodi formulas: $mpp \pm nqq$ extendere, cum omnes diuisores numerorum formae $mpp \pm nqq$ semper sint etiam diuisores numerorum formae $pp \pm mnqq$. Quae igitur olim in Tomo XIV Comment. Vet. Academiae de diuisoribus numerorum formae $mpp \pm nqq$, sum commentatus et magnam partem ex sola inductione conclusi, nunc per egregias proprietates ab illustri *La Grange* demonstratas non solum plurimum illustrantur, sed etiam ad multo maiorem certitudinis gradum perducuntur, ita vt iam nihil amplius desideretur, nisi vt solida demonstratio Theorematis allati detegatur, quam nunc quidem mox exspectare licebit. Mea autem methodus imprimis hac gaudet praerogatiua, quod eius ope omnes plane diuisores huiusmodi formularum $mpp \pm nqq$ assignari et, quousque libuerit, continuari possunt, id quod insuper sequenti exemplo declarabo.

Exemplum.

§. 43. *Inuenire omnes diuisores formae* $pp+39qq$.

Primo igitur per formulas illustris *La Grange* quaeramus omnes diuersas formas horum diuisorum, et cum sit

 $n =$

$n = 39$ ideoque $\sqrt{\frac{39}{3}} < 4$, ſufficiet pro g aſſumere hos quatuor valores: 0, 1, 2, 3.

I. Valor igitur $g = 0$ praebet $fh = 39$, vnde hae duae formae naſcuntur:

$$1^\circ.\ rr + 39ss, \quad 2^\circ.\ 3rr + 13ss;$$

quarum prior dat diuiſores $D = F$ et altera $3D = F$; denotante F formam propoſitam.

II. Valor $g = 1$ dat $fh = 40$, vnde naſcuntur iſtae formae:

$$1^\circ.\ D = rr + 2rs + 40ss = (r+s)^2 + 39ss,$$

ideoque $D = F$.

$$2^\circ.\ D = 2rr + 2rs + 20ss,$$

quae forma autem numerus primus eſſe nequit.

$$3^\circ.\ D = 4rr + 2rs + 10ss,$$

quae forma itidem non dat numeros primos.

$$4^\circ.\ D = 5rr + 2rs + 8ss,$$

vnde fit $5D = F$, vel etiam $8D = F$.

III. Caſus $g = 2$ dat $fh = 43$, vnde vnica forma oritur

$$D = rr + 4rs + 43ss = (r + 2s)^2 + 39ss$$

ideoque $D = F$.

IV. Caſus denique $g = 3$ praebet $fh = 48$, vnde ſequentes formae numeros primos continentes oriuntur:

$$1^\circ.\ D = rr + 6rs + 48ss = (r + 3s)^2 + 39ss,$$

ideoque $D = F$.

$$2^\circ.\ D = 3rr + 6rs + 16ss$$

dat

dat $3D = F$, vel etiam $16D = F$. Hinc igitur patet, omnino dari tria genera diuiſorum:

$$1)\ D = F, \quad 2)\ 3D = F, \quad 5D = F.$$

Quibus conſtitutis euoluamus formulam $4ni + a = 156i + a$, vbi primo notetur, omnium numerorum ad 156 primorum ipſoque minorum multitudinem eſſe 48, vnde vsque ad ſemiſſem 78 erunt 24, quorum ſinguli vel poſitiue vel negatiue ſumti praebent valores pro littera a. Iſti ergo numeri erunt.

1, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 51, 43,
47, 49, 53, 55, 59, 61, 67, 71, 73, 77

vbi primo quadrata habent ſignum +, qui ergo ſunt

$$+1, +25, +49;$$

reliquorum vero numerorum quadrata diuiſione per 156 deprimantur infra 78, vnde fiet

$$11^2 = -35, \quad 17^2 = -23, \quad 19 = +49, \quad 23^2 = +61.$$

Pro reliquis numeris conſideremus formam $pp + 39$, vnde ſumto $p = 1$ prodit 40, cuius numeri ad genus tertium pertinentis diuiſor 5 habet ſignum +. Iam quia praecedentes numeri ad genus primum ſunt referendi, eorum producta per 5 etiam ad genus tertium referri debebunt, vnde naſcentur ſequentes numeri:

$$+5, +41, -31, -19, -67, -7.$$

Sit nunc $p = 2$ eritque $4 + 39 = 43$, qui eſt diuiſor primae claſſis, vnde etiam numeri huius claſſis iam inuenti per 43 multiplicati dabunt diuiſores primae claſſis, qui autem, cum numerus 43 ſit nimis magnus, facilius ex ſequentibus reperiuntur. Sumatur igitur $p = 3$ eritque $pp + 39 = 48$, cuius diuiſor 3 iam eſt excluſus. Sit ergo $p = 4$, eritque

que $16+39=55$, cuius diuiforem 5 iam tractauimus; alter vero diuifor 11 etiam ad tertiam classem pertinet, per hunc ergo numeri primae classis multiplicati erunt

$$+11, +59, -37, -73, +71, +47.$$

Multiplicentur etiam numeri tertiae classis per 11 et producta depressa, qui sunt

$$+55, -17, -29, -53, +43, -77.$$

reuertentur ad classem primam. Hoc modo omnes nostri numeri signa sua debita sunt adepti, qui cum vel ad primam vel ad tertiam classem referantur, manifestum est nullos diuisores secundae classis relinqui. Omnes scilicet hi numeri iam in prima classe continentur, quamobrem omnes valores ipsius a cum characteribus suis I vel III subscriptis ita se habebunt:

+1,	+5,	−7,	+11,	−17,	−19,	−23,	+25,	−29,	−31,	35,	−37
I	III	III	III	I	III	I	I	I	III	I	III
+41,	+43,	+47,	+49,	−53,	+55,	+59,	+61,	−67,	+71,	−73,	−77
III	I	III	I	I	I	III	I	III	III	III	I.

Neque vero classis secunda prorsus est inutilis: dantur enim numeri primi, quos ad primam classem retulimus, quorum resolutio in integris non succedit, atque adeo denominatorem quadratum 16 postulat, cuiusmodi numerus est 61, qui aliter ad primam classem redigi nequit, nisi hoc modo: $61=(\frac{25}{4})^2+39(\frac{3}{4})^2$. Est vero $3.61=183=12^2+39.1^2$. Quod si iam valores negatiui pro a inuenti in positiuos conuertantur, sumendis complementis ad 156, sequentes valores prodibunt:

1,	5,	11,	25,	41,	43,	47,	49,	55,	59,	61,	71,	79,	83,	89,	113,
I	III	III	I	III	I	III	I	I	III	I	III	I	III	III	I
119,	121,	125,	127,	133,	137,	139,	149								
III	I	III	I	I	III	I	III.								

Nunc

Nunc igitur omnes numeri primi in forma $156i+a$ contenti certe erunt diuisores cuiuspiam numeri formae $pp+39qq$, atque adeo vel ipsi, vel eorum quintupla, vel etiam tripla erunt numeri huius formae. Hinc ergo omnes diuisores primi ab 1 vsque ad 312 erunt sequentes:

1, 5, 11, 41, 43, 47, 59, 61, 71, 79, 83, 89, 113, 127, 137, 139, 149, 157, 167, 181, 197, 199, 211, 227, 239, 269, 277, 281, 283, 293.

Corollarium 1.

§. 44. Quo facilius intelligatur, cur hoc casu classis secunda ad primam sit reuoluta, iam supra ostendimus, si diuisor fuerit

$$D=frr+2grs+hss,$$

existente $fh=gg+n$, tum non solum Df, sed etiam Dh ad formam $pp+nqq$ reduci posse. Hinc autem generalius si fuerit

$$k=ftt+2gtu+huu,$$

tum productum Dk etiam erit numerus formae $pp+nqq$; facto enim calculo reperitur

$$Dk=(frt+g(ts+ru)+hsu)^2+n(ts-ru)^2.$$

Quod si ergo k fieri queat quadratum, vel diuisibile per quadratum, tum hoc quadratum omitti poterit. Nam si fuerit $Dkll$ numerus formae $pp+nqq$, tum, etiam admissis fractionibus, erit quoque Dk eiusdem formae. Ita nostro casu pro diuisoribus secundae classis erat

$$D=3rr+13ss,$$

ideoque $k=3tt+13uu$, cuius valor sumto $t=1$ et $u=1$ fiet $k=16$, qui cum sit numerus quadratus, haec forma ad primam reducitur.

Corol-

Corollarium 2.

§. 45. Nunc igitur omnia Theoremata, quae circa huiusmodi diuisores olim in Comment. veter. Tomo XIV. dederam, multo maiorem gradum certitudinis sunt adepta, postquam a celeb. *la Grange* formae istorum diuisorum sunt demonstratae; atque nullum dubium esse videtur, quin mox quod in hoc genere adhuc desideratur perfecta Demonstratione muniatur.

Corollarium 3.

§. 46. Antequam hoc argumentum penitus deseram, memorabilem adhuc obseruationem adiungam circa signa numerorum n, dum scilicet omnes eius valores infra $2n$ deprimuntur. Cum enim horum numerorum primus et vltimus simul sumti fiant $2n$, dispiciendum est, vtrum hi duo numeri habeant vel paria signa vel disparia, vtroque enim casu bini quicunque horum numerorum ab extremis aequidistantes, quorum ergo summa semper est $2n$, etiam habebunt siue eadem signa siue contraria. Ita nostro casu, quo erat $2n = 78$, vltimus 77 habebat signum $-$, dum primus 1 semper habet signum $+$, vnde etiam signa binorum ab extremis aeque distantium perpetuo erunt contraria. E contrario autem in Exemplo 11, vbi erat $2n = 60$, vltimus numerus 59 habebat signum $+$, vnde etiam bini quicunque alii ab extremis aequidistantes eodem signo affecti deprehenduntur, cuius quidem phaenomeni ratio haud difficulter inuestigari poterit. Huiusmodi autem obseruationes laborem inuestigationis Diuisorum non mediocriter subleuant.

SO-

SOLVTIO QVAESTIONIS AD CALCVLVM PROBABILITATIS PERTINENTIS.

QVANTVM DVO CONIVGES PERSOLVERE DEBEANT, VT SVIS HAEREDIBVS POST VTRIVSQVE MORTEM CERTA ARGENTI SVMMA PERSOLVATVR.

§. 1.

Assumimus hic eiusmodi aerarium publicum esse constitutum, cuius facultates quotannis vicesima sui parte augeri queant, ita vt summa 100 Rubellonum post annum ad 105 Rub. excrescat; quare si breuitatis gratia ponamus $\frac{105}{100} = \lambda$, praesens pecuniae summa $= C$ post n annos aestimanda erit $\lambda^n C$. Vicissim autem quaeuis pecuniae summa C post n annos soluenda praesenti tempore valorem habere censenda est $= \frac{C}{\lambda^n}$.

 §. 2.