University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works
Euler Archive

1785

Summatio fractionis continuae cuius indices progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation
Euler, Leonhard, "Summatio fractionis continuae cuius indices progressionem arithmeticam constituunt dum numeratores omnes sunt unitates ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur" (1785). *Euler Archive - All Works*. 595.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/595

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

E 595

$$\cfrac{n+1}{3n+\cfrac{1}{5n+\cfrac{1}{7n+\cfrac{1}{9n+\text{etc.}}}}} = \frac{e^{\frac{2}{n}}}{e^{\frac{2}{n}}-1} \text{ et}$$

$$\cfrac{n-1}{3n-\cfrac{1}{5n-\cfrac{1}{7n-\cfrac{1}{9n-\text{etc.}}}}} = \cot.\tfrac{1}{n}$$

Harum fractionum prior cum formulis postremi exempli collata praebet $m-b=n$, $2m-b=3n$, ideoque $m=2n$ et $b=n$, vnde fit

$$A = \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}\, e^{\frac{1+xx}{2nx}}} \text{ et}$$

$$B = \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\, e^{\frac{1+xx}{2n}}},$$

vnde iam discimus si hae duae formulae integrentur à termino $x=0$ vsque ad terminum $x=\infty$, tum fore

$$\frac{A}{B} = \frac{1+e^{\frac{2}{n}}}{1-e^{\frac{2}{n}}},$$

quanquam nulla adhuc via analytica patet, hanc conuenientiam demonstrandi.

SVM-

exempli
$m=2n$
ur à ter-
ore
conueni-
SVM-

SVMMATIO FRACTIONIS CONTINVAE, CVIVS INDICES PROGRESSIONEM ARITHMETICAM CONSTITVVNT, DVM NVMERATORES OMNES SVNT VNITATES;

VBI SIMVL RESOLVTIO AEQVATIONIS RICCATIANAE PER HVIVSMODI FRACTIONES DOCETVR.

§. 1.

Cum in praecedente dissertatione methodum exposuissem; fractiones continuas ad duas formulas integrales reducendi, ea quidem infinitis casibus feliciter successit: at vero casus, qui simplicissimus videtur, vbi omnes numeratores inter se ponuntur aequales, ad eiusmodi formulas integrales perduxit, quas nullo adhuc modo euoluere et inter se comparare licuit, cum tamen ex hoc genere binae fractiones continuae habeantur, quarum valores satis commode exhiberi possunt:

$$\cfrac{n+1}{3n+\cfrac{1}{5n+\cfrac{1}{7n+\text{etc.}}}} = \frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1} \text{ et}$$

$$n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \text{etc.}}}} = \cot.\frac{1}{n}$$

quarum quidem altera ex altera facile deducitur, si loco n scribatur $n\sqrt{-1}$.

§. 2. Quando autem indices aliam quamcunque progressionem arithmeticam sequuntur, summationem talium fractionum continuarum iam olim in Tomo XI veterum Commentar. nostrae Academiae singulari prorsus modo ad aequationem Riccatianam reduxi. Methodus autem, qua hoc praestiti, ibi nimis succincte est exposita; quare, cum ea plurimum in recessu habere videatur, eam hic operae pretium erit vberius explicare; praecipue cum non solum nemo vim illius methodi animaduertisse videatur, sed etiam ipse eius penitus essem oblitus.

§. 3. Quo isthanc inuestigationem clarius ob oculos ponam, exordiar a fractione generali, cuius quidem omnes numeratores sint vnitates, indices autem in genere litteris $a, b, c, d, e, f,$ etc. designentur, ita vt ipsa fractio continua hanc habeat formam:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor littera S indicetur, ad quem proxime saltem cognoscendum, ex indicibus $a, b, c, d, e,$ etc. formetur more solito series sequentium fractionum:

qu do loco n 𝔄, ue pro- talium Com- aequa- ia hoc atq ea plu- ant pretium 1 nemo im ipse His ob ocu- quidem con genere fitae fractio qual spici quid A′= B′= e saltem formetur a b

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & \\ \frac{A}{\mathfrak{A}} & \frac{B}{\mathfrak{B}} & \frac{C}{\mathfrak{C}} & \frac{D}{\mathfrak{D}} & \frac{E}{\mathfrak{E}} & \text{etc.} \end{matrix}$$

quarum tam numeratores quam denominatores sequenti modo ex binis praecedentibus determinantur:

$$A = a,\ B = Ab + 1,\ C = Bc + A,\ D = Cd + B, \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{A} = 1,\ \mathfrak{B} = \mathfrak{A}b,\quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}c + \mathfrak{A},\ \mathfrak{D} = \mathfrak{C}d + \mathfrak{B}, \text{ etc.}$$

§. 4. Nunc autem loco litterarum A, B, C, D, et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, alias in calculum introducamus, quae sint

$$A' = \tfrac{A}{a},\ B' = \tfrac{B}{ab},\ C' = \tfrac{C}{abc},\ D' = \tfrac{D}{abcd}, \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{A}' = \tfrac{\mathfrak{A}}{a},\ \mathfrak{B}' = \tfrac{\mathfrak{B}}{ab},\ \mathfrak{C}' = \tfrac{\mathfrak{C}}{abc},\ \mathfrak{D}' = \tfrac{\mathfrak{D}}{abcd}, \text{ etc.}$$

atque hae nouae litterae sequenti modo per indices et binos antecedentes terminos determinabuntur:

$$A' = 1,\ B' = A' + \tfrac{1}{ab},\ C' = B' + \tfrac{A'}{bc},\ D' = C' + \tfrac{B'}{cd}, \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{A}' = \tfrac{1}{a},\ \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}',\quad \mathfrak{C}' = \mathfrak{B}' + \tfrac{\mathfrak{A}'}{bc},\ \mathfrak{D}' = \mathfrak{C}' + \tfrac{\mathfrak{B}'}{cd}, \text{ etc.}$$

His igitur valoribus pro quouis casu euolutis, istae fractiones

$$\tfrac{A}{\mathfrak{A}},\ \tfrac{B}{\mathfrak{B}},\ \tfrac{C}{\mathfrak{C}},\ \tfrac{D}{\mathfrak{D}},\ \tfrac{E}{\mathfrak{E}} \text{ etc.}$$

continuo propius ad valorem S fractionis continuae propositae accedent, et in infinitum continuatae ei prorsus aequabuntur.

§. 5. Quo formae harum litterarum, melius perspiciantur, eos simpliciter per indices euoluamus, ac primo quidem pro numeratoribus reperiemus sequentes formulas:

$A' = 1$

$B' = 1 + \frac{1}{ab}$

$C' =$

$C' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc}$

$D' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd}$

$E' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{bcde}$

$F' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} + \frac{1}{abcd} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{abef} + \frac{1}{bcef} + \frac{1}{cdef} + \frac{1}{abcdef}$

etc. etc.

Pro denominatoribus vero prodibunt ſequentes formulae:

$\mathfrak{A}' = \frac{1}{a}$

$\mathfrak{B}' = \frac{1}{a}$

$\mathfrak{C}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{abc}$

$\mathfrak{D}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd}$

$\mathfrak{E}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{ade} + \frac{1}{abcde}$

$\mathfrak{F}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{ade} + \frac{1}{aef} + \frac{1}{abcde} + \frac{1}{abcef} + \frac{1}{acdef}$

etc. etc.

in quibus poſterioribus formulis ſinguli termini factorem habent $\frac{1}{a}$, quo omiſſo reliqui factores eodem modo per indices b, c, d, e, f, etc. definientur, quo litterae latinae antecedentes per omnes indices a, b, c, d, e ſunt determinati.

§. 6. Accommodemus nunc iſtas euolutiones ad caſum qui hic nobis eſt propoſitus, vbi indices a, b, c, d, e, ſecundum progreſſionem arithmeticam procedere aſſumimus. Statuamus igitur differentiam, qua hi indices continuo creſcunt $= \Delta$, eruntque indices poſt primum ſequentes

$$b = a + \Delta,\ c = a + 2\Delta,\ d = a + 3\Delta,\ e = a + 4\Delta,\ \text{etc.}$$

Hos quidem valores in denominatoribus noſtrarum formularum non ſubſtituemus, ſed iis praecique vtemur ad formulas contrahendas.

§. 7.

$\frac{1}{cdef} + \frac{1}{abcdef}$

formulae.

i factorem
odo per in-
latinae an-
determinati.

lutiones ad
a, b, c, d, e,
aſſumimus.
ontinuo cre-
ientes
$a+4\Delta$, etc.
cum formu-
mur ad for-

§. 7.

§. 7. Hac igitur progreſſione ſtabilita euoluamus primo numeratores noſtrarum fractionum ſequenti modo:

$A' = 1$

$B' = 1 + \frac{1}{ab}$

$C' = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} = 1 + \frac{2}{ac}$

$D' = 1 + \frac{2}{ac} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{abcd} = 1 + \frac{3}{ad} + \frac{1}{abcd}$

$E' = 1 + \frac{3}{ad} + \frac{1}{de} + \frac{1}{abcd} + \frac{2}{acde} = 1 + \frac{4}{ae} + \frac{3}{abde}$

$F' = 1 + \frac{5}{af} + \frac{6}{abdf} + \frac{1}{abcdef}$

$G' = 1 + \frac{6}{ag} + \frac{10}{abfg} + \frac{4}{abcefg}$

$H' = 1 + \frac{7}{ah} + \frac{15}{abgh} + \frac{10}{abcfgh} + \frac{1}{abcdefgh}$

$I' = 1 + \frac{8}{ai} + \frac{21}{abhi} + \frac{20}{abcghi} + \frac{5}{abcdfghi}$

$K' = 1 + \frac{9}{ak} + \frac{28}{abik} + \frac{35}{abchik} + \frac{15}{abcdghik} + \frac{1}{abcdefghik}.$

§. 8. Quemadmodum in his formis omnes termini primi ſunt vnitates, ita numeratores ſecundorum ſecundum numeros naturales, tertiorum ſecundum trigonales, quartorum ſecundum pyramidales primos, tum ſecundos, tertios etc. progrediuntur. In denominatoribus ordo pariter ſatis eſt manifeſtus. Hinc igitur in genere eam formulam exhibere poterimus, quae indefinite reſpondeat indici i. Ita ſi iſta expreſſio deſignetur littera Z', tum vero in ordine litterarum a, b, c, d, e, etc. fuerit $z = a + i\Delta$, antecedentes vero

$$y = a + (i-1)\Delta,\ x = a + (i-2)\Delta,\ v = a + (i-3)\Delta,\ \text{etc.}$$

habebimus

$$Z' = 1 + \frac{i}{az} + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2.ab.yz} + \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.abcxyz} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{1.2.3.4.abcdvxyz} + \text{etc.}$$

§. 9.

§. 9. Quod iam ad litteras germanicas $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, etc. attinet, earum quaelibet ex antecedente latina formatur, dum litterae a, b, c, d, e vno gradu promouentur, tum vero finguli termini per $\frac{i}{a}$ multiplicentur, ita erit vt sequitur:

$\mathfrak{A}' = 1$

$\mathfrak{B}' = \frac{1}{a}$

$\mathfrak{C}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{abc}$

$\mathfrak{D}' = \frac{1}{a} + \frac{2}{abd}$

$\mathfrak{E}' = \frac{1}{a} + \frac{3}{abe} + \frac{1}{abcde}$

$\mathfrak{F}' = \frac{1}{a} + \frac{4}{abf} + \frac{3}{abcef}$

$\mathfrak{G}' = \frac{1}{a} + \frac{5}{abg} + \frac{6}{abcfg} + \frac{1}{abcdefg}$

$\mathfrak{H}' = \frac{1}{a} + \frac{6}{abh} + \frac{10}{abcbh} + \frac{4}{abcdfgh}$

$\mathfrak{I}' = \frac{1}{a} + \frac{7}{abi} + \frac{15}{abcbi} + \frac{10}{abcdgbi} + \frac{1}{abcdefghi}$

etc. etc.

vnde in genere, si indici i respondeat $\mathfrak{Z}'$, erit

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{a} + \frac{(i-1)}{abz} + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2.abcyz} + \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1.2.3.abcdxyz} + \frac{(i-4)(i-5)(i-6)(i-7)}{1.2.3.4.abcdevxyz} + \text{etc.}$$

§. 10. Augeamus nunc indicem z in infinitum, vt fractio $\frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$ exprimat ipsum valorem fractionis continuae, quem vocauimus S, ita vt futurum sit $S = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$, atque reductio formularum inuentarum sequenti modo peragetur. Primo scilicet pro Z' erit $\frac{i}{z} = \frac{i}{a+i\Delta} = \frac{1}{\Delta}$, ob $i = \infty$; pro termino tertio erit

$$\frac{(i-1)(i-2)}{yz} = \frac{(i-1)(i-2)}{(a+(i-1)\Delta)(a+i\Delta)} = \frac{1}{\Delta^2};$$

porro

is $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, ite latina for- promouentur, , ita erit vt rit ...+ etc. in infinitum, vt continuae, quem atque reductio eragetur. Primo . ∞; pro termino ; porro

porro autem simili modo

$$\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{xyz} = \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{(a+(i-2)\Delta)(a+(i-1)\Delta)(a+i\Delta)} = \frac{1}{\Delta^3} \text{ et}$$

$$\frac{(i-3)(i-4)(i-5)(i-6)}{vxyz} = \frac{1}{\Delta^4}, \text{ etc.}$$

Pari modo pro formula $\mathfrak{Z}'$ erit etiam

$$\frac{i-1}{z} = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{(i-2)(i-3)}{yz} = \frac{1}{\Delta^2}$$

et ita porro; quamobrem pro casu $i = \infty$ ambae nostrae formulae ita commode contrahuntur, vt fiat

$$Z' = 1 + \frac{1}{a\Delta} + \frac{1}{1.2\,ab\Delta^2} + \frac{1}{1.2.3\,abc\Delta^3} + \frac{1}{1.2.3.4\,abcd\Delta^4} + \text{etc.}$$

similique modo

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab\Delta} + \frac{1}{1.2\,abc\Delta^2} + \frac{1}{1.2.3\,abcd\Delta^3} + \frac{1}{1.2.3.4\,abcde\Delta^4} + \text{etc.}$$

§. 11. Cum igitur sit valor quaesitus $S = \frac{Z'}{\mathfrak{Z}'}$, videamus quomodo ambas series infinitas inuentas ad expressiones finitas reuocare queamus. Hunc in finem ambas series generaliores reddamus, dum loco numeratorum, qui omnes sunt 1, progressionem quandam geometricam substituimus. Statuamus igitur

$$p = 1 + \frac{x^{\Delta}}{a\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1.2\,ab\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1.2.3\,abc\Delta^3} \text{ etc. et}$$

$$q = \frac{1}{a} + \frac{x^{\Delta}}{ab\Delta} + \frac{x^{2\Delta}}{1.2\,abc\Delta^2} + \frac{x^{3\Delta}}{1.2.3\,abcd\Delta^3} \text{ etc.}$$

Quod si autem hinc valores p et q eruerimus in genere, tum vero ponamus $x = 1$, vtique proueniet $S = \frac{p}{q}$. Hic autem manifestum est, ambas has series egregiam inter se tenere affinitatem, ac per differentiationem vnam in alteram conuerti posse, quam inuestigationem sequenti modo instituamus.

§. 12.

§. 12. Primo igitur series prior simpliciter differentiata dat

$$\frac{x\,dp}{dx}=\frac{x^{\Delta}}{a}+\frac{x^{2\Delta}}{ab\Delta}+\frac{x^{3\Delta}}{1.2\,abc\Delta^2}+\frac{x^{4\Delta}}{1.2.3\,abcd\Delta^3}\text{ etc.}$$

quae series cum altera q comparata manifesto praebet

$$\frac{x\,dp}{dx}=x^{\Delta}q,$$

vnde patet, si modo summa alterius harum duarum serierum esset cognita, alteram quoque assignari posse, quandoquidem ex cognito valore p prodit $q=\frac{dp}{x^{\Delta-1}dx}$; contra vero ex cognito valore q fit $dp=x^{\Delta-1}q\,dx$, ideoque $p=\int x^{\Delta-1}q\,dx$, quod integrale ita sumi debet, vt posito $x=0$ fiat $p=1$.

§. 13. Ante autem quam alteram seriem differentiemus, eam multiplicemus per x, atque ob

$$a+\Delta=b,\ a+2\Delta=c,\ a+3\Delta=d,\text{ etc. erit}$$

$$x^a q=\frac{x^a}{a}+\frac{x^b}{ab\Delta}+\frac{x^c}{1.2\,abc\Delta^2}+\frac{x^d}{1.2.3\,abcd\Delta^3}+\text{ etc.}$$

Nunc ista aequatio differentiata, iterumque per x multiplicata dabit

$$x\,d.\frac{x^a q}{dx}=x^a+\frac{x^b}{a\Delta}+\frac{x^c}{1.2\,ab\Delta^2}+\frac{x^d}{1.2.3\,abc\Delta}+\text{ etc.}$$

at vero prior series p itidem qer x multiplicata praebet

$$x^a p=x^a+\frac{x^b}{a\Delta}+\frac{x^c}{1.2\,ab\Delta^2}+\frac{x^d}{1.2.3\,abc\Delta^3}+\text{ etc.}$$

quae

quae ideoq tione que vnde sicque quatio quam Vbi pr integrat cum ve altera c fiat fu x=o Euler
...liciter diffe- ...cdΔ³ etc. praebet duarum serie- posse, quando- ...dx ; contra q dx, ideoque ebet, vt posito seriem differen- , etc. erit bcdΔ³ + etc. per x multipli- 3abcΔ + etc. licata praebet abcΔ³ + etc. quae

quae series cum sint perfecte aequales, erit $\frac{x}{dx}d.x^a q=x^a p$, ideoque $d.x^a q=px^{a-1}dx$, sicque duas nacti sumus aequationes differentiales inter p et q, ex quibus valorem vtriusque eruere licebit.

§. 14. Cum ex priore aequatione sit

$$q=\frac{dp}{x^{\Delta-1}dx},\text{ erit } x^a q=\frac{x^{a-\Delta+1}dp}{dx},$$

vnde sumto elemento dx constante fiet

$$d.\,x^a q=\frac{x^{a-\Delta+1}ddp+(a-\Delta+1)x^{a-\Delta}dp}{dx}$$

sicque elisa quantitate q pro altera p nanciscimur hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$px^{a-1}dx=\frac{x^{a-\Delta+1}ddp+(a-\Delta+1)x^{a-\Delta}dp}{dx}$$

quam si resoluere licuerit, totum negotium erit confectum. Vbi probe notandum, cum sit

$$p=1+\frac{x^{\Delta}}{a\Delta}+\frac{x^{2\Delta}}{1.2\,ab\Delta^2}+\text{ etc.}$$

integrationem ita instituti debere, vt posito $x=0$ fiat $p=1$; cum vero quia est

$$\frac{dp}{dx}=\frac{x^{\Delta-1}}{a}+\frac{x^{2\Delta-1}}{ab\Delta}+\text{ etc.}$$

altera conditio integrationis postulat vt posito $x=0$ etiam fiat $\frac{dp}{dx}=0$, siquidem fuerit $\Delta>1$, si enim esset $=1$, casu $x=0$ fieri debet $\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}$. At si $\Delta<1$, fieri debebit $\frac{dp}{dx}=\infty$.

 §. 15.

§. 15. Cum fractio $\frac{p}{q}$ posito $x = 1$ praebeat valorem nostrae fractionis continuae S, ponamus in genere esse $\frac{p}{q} = z$, ita vt posito $x = 1$ fiat $z = S$, vnde patet, casu $x = 0$ fieri debere $z = a$. Cum igitur sit $p = q z$, erit $d p = q\, d z + z\, d q$; erat autem ex prima aequatione

$$q = \frac{d p}{x^{\Delta - 1} d x},$$

quamobrem habebimus

$$q = \frac{q\, d z + z\, d q}{x^{\Delta - 1} d x},$$

siue $x^{\Delta - 1} q\, d x = q\, d z + z\, d q$, vnde fit

$$d q = \frac{x^{\Delta - 1} q\, d x - q\, d z}{z};$$

erat autem $d p = x^{\Delta - 1} q\, d x$.

§. 16. Haec igitur sequuntur ex priori aequatione differentiali inuenta $\frac{d p}{x^{\Delta - 1} d x} = q$. Altera vero, quae est

$d.\, x^a q = p\, x^{a-1} d x$, quia
$d.\, x^a q = a\, x^{a-1} q\, d x + x^a d q$

loco $d q$ posito valore modo inuento prodit

$$d.\, x^a q = a x^{a-1} q\, dx + \frac{x^{a+\Delta-1} q\, dx - x^a q\, dz}{z},$$

habebimus

$$p x^{a-1} d x = a x^{a-1} q\, dx + \frac{x^{a+\Delta-1} q\, dx - x^a q\, dz}{z},$$

quae

quae aequatio, ob $p = q z$, per q diuisa suppeditat istam aequationem differentialem primi gradus:

$$x^{a-1} z\, d x = a x^{a-1} d x + \frac{x^{a+\Delta-1} d x - x^a d z}{z},$$

quae per z multiplicata et per x^{a-1} diuisa praebet

$$z z\, d x = a z\, d x + x^{\Delta} d x - x\, d z,$$

cuius ergo resolutio si ita instituatur, vt posito $x = 0$ fiat $z = a$, tum vero fiat $x = 1$, valor ipsius z dabit ipsum valorem fractionis continuae quem quaerimus.

§. 17. Totum igitur negotium perductum est ad resolutionem aequationis differentialis primi gradus

$$z z\, d x = a z\, d x + x^{\Delta} d x - x\, d z,$$

quae manifesto in celeberrima illa aequatione Riccatiana continetur. Vt enim ad tres tantum terminos reducatur, ponatur $z = x^a y$, ita vt sit $y = \frac{z}{x^a}$, vnde fit

$$d z = a\, x^{a-1} y\, d x + x^a d y,$$

quibus valoribus substitutis nostra aequatio hanc induet formam:

$$x^{a+1} d y + x^{2a} y y\, d x = x^{\Delta} d x,$$

quam ergo ita integrari oportet, vt posito $x = 0$, siue infinite paruo, fiat $y = \frac{a}{x^a}$, hoc est $y = \infty$, quo facto, si post integrationem statuatur $x = 1$, valor ipsius y dabit summam fractionis continuae propositae.

§. 18.

§. 18. Quo hanc expressionem simpliciorem reddamus, diuidamus per x^{a+1}, vt habeamus

$$dy + x^{a-1} yy\,dx = x^{\Delta-a-1}\,dx;$$

nunc vero statuamus $x^a = t$, ita vt casu $x = 0$ fiat quoque $t = 0$, et casu $x = 1$ etiam $t = 1$, vnde si t euanescat, fieri debet $y = \frac{a}{t}$, siue $y = \infty$. Hoc autem valore introducto, ob $x = t^{\frac{1}{a}}$ et

$$dx = \frac{t^{\frac{1-a}{a}}\,dt}{a},$$

aequatio nostra fiet

$$a\,dy + yy\,dt = t^{\frac{\Delta-2a}{a}}\,dt;$$

quae est forma maxime vsitata aequationis Riccatianae.

§. 19. Quando ergo proposita fuerit talis fractio continua:

$$a+\cfrac{1}{a+\Delta+\cfrac{1}{a+2\Delta+\cfrac{1}{a+3\Delta+\cfrac{1}{a+4\Delta+\text{etc.}}}}}$$

pro eius valore inuestigando resolui debet ista aequatio Riccatiana:

$$a\,dy + yy\,dt = t^{\frac{\Delta-2a}{a}}\,dt;$$

vbi integrationem ita institui oportet, vt sumta t infinite parua fiat $y = \frac{a}{t}$, quo facto statuatur $t = 1$, et valor pro y resultans erit valor huius fractionis continuae.

§. 20

n redda-
: quoque
uanescat,
ıtroducto,
anae.
ılis fractio
-4Δ+ etc.
sta aequatio
mta t infinite
et valor pro
:.
§. 20

§. 20. Euoluamus casum simplicissimum, quo ad dextram partem exponens ipsius t fit nihilo aequalis, quod ergo euenit, si $\Delta = 2a$, ideoque ipsa fractio continua

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\text{etc.}}}}$$

pro cuius summa habebimus hanc aequationem differentialem:

$$a\,dy + yy\,dt = dt,\ \text{vnde}\ dt = \frac{a\,dy}{1-yy},$$

et integrando

$$t = \tfrac{a}{2}\,l\,\frac{1+y}{1-y} + C,$$

quae constans C ita est capienda, vt posito $t = 0$ fiat $y = \frac{a}{t}$, ideoque $t = \frac{a}{y}$; vnde patet hoc casu fieri $y = \infty$, ex quo statim intelligitur, aequationem integralem ita instrui debere:

$$t = \tfrac{a}{2}\,l\,\frac{y+1}{y-1} + C.$$

siue integrationem ita institui, vt facto $t = 0$ fiat y infinitum. Nunc vero si y infinitum, erit $l\frac{y+1}{y-1} = \frac{2}{y}$, quare cum fieri debeat $t = \frac{a}{y}$ fit $C = 0$, ita vt iusta aequatio integralis fit $t = \frac{a}{2}\,l\frac{y+1}{y-1}$, vnde, denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, fiet $e^{\frac{2t}{a}} = \frac{y+1}{y-1}$, hincque porro $y = \frac{e^{\frac{2t}{a}}+1}{e^{\frac{2t}{a}}-1}$, vnde posito $t = 1$ summa nostrae fractionis continuae erit $\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}$, qui est idem valor, quem iam dudum inueneram.

§. 21.

§. 21. Contemplemur nunc etiam reliquos casus integrabilitatis aequationis Riccatianae, quibus exponens ipsius t ad partem dextram est vel -4, vel $-\frac{4}{3}$, vel $-\frac{8}{3}$, vel $-\frac{8}{5}$, vel $-\frac{12}{5}$, vel $-\frac{12}{7}$ etc. Sit igitur primo $\frac{\Delta-2a}{a}=-4$, vel $\Delta=-2a$, vnde nascitur haec fractio continua:

$$a+\cfrac{1}{-a+\cfrac{1}{-3a+\cfrac{1}{-5a+\cfrac{1}{-7a+\text{etc.}}}}}$$

quae manifesto a praecedente pendet. Si enim ponamus

$$-a+\cfrac{1}{-3a+\cfrac{1}{-5a+\text{etc.}}}=s,$$

mutatis signis erit

$$-s=a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\text{etc.}}}}$$

cuius valor cum iam sit inuentus, iste casus nihil noui nobis offert.

§. 22. Si sumatur $\frac{\Delta-2a}{a}=-\frac{4}{3}$, siue $\Delta=\frac{2}{3}a$, inde sequens nascitur fractio continua:

$$a+\cfrac{1}{\frac{5}{3}a+\cfrac{1}{\frac{7}{3}a+\cfrac{1}{\frac{9}{3}a+\text{etc.}}}}$$

siue

liquos casus ponens ipsius $-\frac{8}{3}$, vel $-\frac{8}{5}$, $=-4$, vel a: ponamus nihil noui no- e $\Delta=\frac{2}{3}a$, inde siue

siue statuendo $a=3\alpha$, erit fractio

$$3\alpha+\cfrac{1}{5\alpha+\cfrac{1}{7\alpha+\cfrac{1}{9\alpha+\text{etc.}}}}$$

quae est ipsa ipsa forma superior primo membro truncata. Idem vsu venit, si sumatur $\frac{\Delta-2a}{a}=-\frac{8}{3}$, siue $\Delta=-\frac{2}{3}a$, vnde oritur haec fractio continua, ponendo scil. $a=3\alpha$

$$3\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{-\alpha+\cfrac{1}{-3\alpha+\cfrac{1}{-5\alpha+\text{etc.}}}}}$$

sicque semper ad principalem formam reducimur.

§. 23. Casus autem integrabilitatis in genere hoc continentur exponente: $-\frac{4i}{2i\pm1}$. Posito igitur

$$\frac{\Delta-2a}{a}=-\frac{4i}{2i\pm1},\ \text{fiet}\ \Delta=\frac{\pm2a}{2i\pm1},$$

vnde posito $\frac{a}{2i\pm1}=\alpha$, erit $\Delta=\pm2\alpha$, ergo ob $a=(2i\pm1)\alpha$ fractio continua erit

$$(2i\pm1)\alpha+\cfrac{1}{a\pm2\alpha+\cfrac{1}{a\pm4\alpha+\cfrac{1}{a\pm6\alpha+\text{etc.}}}}$$

vbi manifesto iterum omnes numeri impares occurrunt, ita vt fractio continua inde nata semper formari possit ex nostra principali

$a+1$

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\text{etc.}}}}$$

si vel aliquot membris truncetur, vel retro ad aliquot membra superne continuetur.

§. 24. Cum igitur omnes casus integrabilitatis aequationis Riccatianae ad eandem fractionem continuam perducant; praeterea vero nulli adhuc alii casus euolui potuerint, hinc manifesto sequitur, si indices fractionis continuae a, b, c, d, e, f etc. quamcunque aliam progressionem arithmeticam constituant, tum summam nullo plane modo assignari posse; quandoquidem ea pendet a casu irresolubili aequationis Riccatianae. Ita si proponatur haec fractio continua:

$$a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{4a+\text{etc.}}}}$$

vbi est $\Delta = a$, summatio pendebit ab ista aequatione differentiali: $a\,dy + yy\,dt = \frac{dt}{t}$, cuius resolutio cum per nullas quantitates transcendentes etiamnunc vsu receptas expediri possit, valorem huius fractionis continuae frustra inter quantitates a circulo vel a logarithmis pendentes, vel adeo inter omnes quadraturas curuarum algebraicarum quaerimus; vnde mirum non est, quod methodus in superiori dissertatione vsitata pro talibus casibus omni successu caruerit.

§. 25. Quoniam tamen in dissertatione superiore summam talium fractionum continuarum per binas formulas inte-

aliquot mem-
rabilitatis ae-
ntinuam per-
euolui potue-
is continuae
sionem arith-
: modo assi-
rresolubili ae-
ctio continua:
equatione diffe-
cum per nullas
eptas expediri
stra inter quan-
vel adeo inter
uaerimus; vnde
ri dissertatione
ierit.
atione superiore
binas formulas
inte-

integralas expressam dedimus, illa ipsa expressio etiam ad aequationem Riccatianam pro iisdem casibus accommodari poterit, id quod vtique maximam attentionem meretur, cum nullo adhuc modo ista aequatio praeter casus integrabiles tractari potuerit. Quamobrem maxime operae erit pretium solutiones inter se comparare, quandoquidem hinc haud contemnendum subsidium, aequationem Riccatianam feliciori successu tractandi, expectari poterit.

§. 26. In superiori autem dissertatione ostendi, si haec proposita fuerit fractio continua:

$$m-b+\cfrac{1}{2m-b+\cfrac{1}{3m-b+\cfrac{1}{4m-b+\text{etc.}}}}$$

eius valorem exprimi per hanc fractionem: $-\frac{A}{B}$, existente

$$A = \int \frac{dx}{x^{2+\frac{b}{m}} \cdot e^{\frac{1+xx}{mx}}} \text{ et}$$

$$B = \int \frac{dx}{x^{1+\frac{b}{m}} \cdot e^{\frac{1+xx}{mx}}},$$

siquidem haec duo integralia a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = \infty$ extendantur.

§. 27. Comparemus nunc hanc fractionem continuam cum generali, quam hic tractauimus:

$a+1$

$$a+1\over a+\Delta+1\over a+2\Delta+1\over a+3\Delta+\text{etc.}$$

cuius valor continetur in hac aequatione:

$$a\,dy+yy\,dt=t^{\frac{\Delta-2a}{a}}\,dt,$$

integratione scilicet ita instituta, vt casu $t=0$ fiat $y=\infty$; tum vero statuatur $t=1$, vnde valor ipsius y summam istius fractionis continuae exprimet.

§. 28. Comparatione igitur instituta fiet $m=\Delta$ et $b=\Delta-a$, quibus valoribus introductis formulae illae integrales erunt

$$A=\int\frac{dx}{x^{3-\frac{a}{\Delta}}.e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}\text{ et}$$

$$B=\int\frac{dx}{x^{2-\frac{a}{\Delta}}.e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}},$$

integralibus iterum sumtis ab $x=0$ ad $x=\infty$; quamobrem valor ipsius y, qui ex aequatione

$$a\,dy+yy\,dt=t^{\frac{\Delta-2a}{a}}\,dt$$

pro casu $t=1$ resultat, aequalis erit isti fractioni: $-\frac{A}{B}$, siue erit

$$y=\int\frac{dx:x^{3-\frac{a}{\Delta}}.e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}{dx:x^{2-\frac{a}{\Delta}}.e^{\frac{1+xx}{\Delta x}}}.$$

Quanquam autem haec aequalitas tantum casus speciales, quibus ibi fit $t=1$, hic vero $x=\infty$, spectat, tamen fortasse

tasse eiusmodi relatio inter binas variabiles t et x inueniri poterit, vt in genere quantitas y illi formulae aequetur.

§. 29. Quemadmodum consideratio fractionis nostrae continuae nos ad resolutionem aequationis Riccatianae perduxit, ita vicissim datur methodus directa, qua ista aequatio per fractiones continuas resolui potest. Quod quo facilius ostendatur, aequatio Riccatiana, quae vulgo hac forma proponi solet:

$$dy+ayy\,dx=acx^{2m}\,dx,$$

in aliam formam ad praesens institutum magis accommodatam transfundatur, ponendo $y=x^m z$ et $x^{m+1}=t$; tum enim, si loco $\frac{a}{m+1}$ scribatur b, prodit ista aequatio:

$$dz+\frac{mz\,dt}{(m+1)t}+bzz\,dt=bc\,dt.$$

§. 30. Ponamus porro $\frac{m}{m+1}=-n$, vt fit $m=-\frac{n}{1+n}$ et nobis proposita sit ista aequatio:

$$dz-n\frac{z\,dt}{t}+bz\,dt=bc\,dt,$$

quae, si adhibeamus hanc substitutionem: $z=\frac{n+1}{bt}+\frac{c}{v}$, transmutatur in hanc formam:

$$dv-(n+2)\frac{v\,dt}{t}+bvv\,dt=bc\,dt,$$

quae a priore hoc tantum differt, vt hic numerus n binario maior sit factus; quare si porro faciamus $v=\frac{n+3}{bt}+\frac{c}{u}$, prodibit haec aequatio:

$$du-(n+4)u\,dt+buu\,dt=bc\,dt,$$

vnde patet, si prima aequatio resolutionem admittat casu $n=k$, tum etiam eius resolutionem in potestate fore casibus

$$n=k+2,\ n=k+4,\ n=k+6,\text{ etc.}$$

et

et in genere casu $n = k + 2i$, denotante i numerum integrum quemcunque.

§. 31. Quod si iam successiue loco v et u et sequentium litterarum valores istos debitos substituamus, pro quantitate z sequens prodibit fractio continua:

$$z = n + \cfrac{1}{bt + \cfrac{c}{\cfrac{n+2}{bt} + \cfrac{c}{\cfrac{n+4}{bt} + \text{etc.}}}}$$

quae ergo expressio exhibet valorem quantitatis z, qui ipsi conuenit vi huius aequationis:

$$dz - n\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

si scilicet ita integretur, vt posito $t = 0$ fiat $z = \infty$.

§. 32. Liberemus hanc formam a fractionibus partialibus, et obtinebimus hanc formam:

$$\frac{1}{z} = \cfrac{bt}{n+1 + \cfrac{bbctt}{n+3 + \cfrac{bbctt}{n+5 + \cfrac{bbctt}{n+7 + \text{etc.}}}}}$$

vnde statim patet, posito $t = 0$ fore $\frac{1}{z} = 0$ ideoque $z = \infty$. Simili modo resolutionem ab aequatione transformata exordiri possumus, quae erat

$$dv - (n+2)\frac{vdt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

quae in primam transformatur ponendo $v = \frac{bct}{-n-1+btz}$; prodibit enim

dz

i numerum inte-
co v et u et se- ubstituamus, pro nua:
itatis z, qui ipsi
fiat $z = \infty$.
a fractionibus par-
etc.
= 0 ideoque $z = \infty$. ransformata exordiri
$= bcdt$,
lo $v = \frac{bct}{-n-1+btz}$;
dz

$$dz - \frac{nzdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

in qua aequatione numerus n binario redditus est minor; vnde patet, si aequatio resolutionem admittat casu $n = k$, tum etiam resolutionem esse successuram casibus

$$n = k - 2,\ n = k - 4,\ n = k - 6$$

et in genere $n = k - 2i$. Quare cum resolutio nulla labores difficultate casu $n = 0$, sumto $k = 0$ omnes casus resolutionem admittentes continebuntur in hac formula: $n = \pm 2i$ hincque pro forma consueta fiet

$$m = \frac{\mp 2i}{\pm 2i + 1} = -\frac{2i}{2i \pm 1},$$

quae continet casus notissimos integrabilitatis.

§. 33. Ponamus $n + 2 = -\nu$, vt aequatio, a qua hic inchoamus, fit

$$dv = \frac{\nu v dt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

quae ergo, posito $v = \frac{bct}{\nu+1+btz}$ transmutatur in hanc formam:

$$dz + (\nu + 2)\frac{zdt}{t} + bzzdt = bcdt,$$

in qua nunc numerus ν binario augetur. Quare si vlterius ponamus $z = \frac{bct}{\nu+3+bty}$, orietur haec aequatio:

$$dy = + (\nu + 4)\frac{ydt}{t} + byydt = bcdt,$$

sicque vlterius progrediendo peruenietur ad $\nu+5, \nu+7$ etc.

§. 34. Substituamus ergo istos valores in superiore aequatione, quae est

$$dv + \frac{\nu v dt}{t} + bvvdt = bcdt,$$

ac pro v prodibit sequens fractio continua:

$v =$

$$v = \cfrac{bct}{v+1+\cfrac{bbctt}{v+3+\cfrac{bbctt}{v+5+\cfrac{bbctt}{v+7+\text{etc.}}}}}$$

Haec igitur expressio locum habet, si aequatio differentialis ita integretur, vt posito $t = 0$ fiat $v = 0$.

§. 35. Geminas igitur ex aequatione Ricciatiana elicuimus fractiones continuas, quas quo facilius inter se comparare queamus, loco v scribamus iterum n, vt habeamus has duas aequationes differentiales:

I. $dz - n\frac{z\,dt}{t} + bzz\,dt = bc\,dt$,

II. $dv + n\frac{v\,dt}{t} + bvv\,dt = bc\,dt$,

atque ex priore nascetur ista fractio continua:

$$\frac{1}{z} = \cfrac{bt}{n+1+\cfrac{bbctt}{n+3+\cfrac{bbctt}{n+5+\text{etc.}}}}$$

ex altera vera oritur

$$v = \cfrac{bct}{n+1+\cfrac{bbctt}{n+3+\cfrac{bbctt}{n+5+\text{etc.}}}}$$

quae ergo fractiones prorsus inter se conueniunt, cum hinc fiat $v = \frac{c}{z}$, quippe quo modo altera aequatio in alteram actu conuertitur, ita vt hae duae formae pro vnica sint habendae.

§. 36.

io differentialis

ne Ricciatiana
icilius inter se
n n, vt habea-

a:

eniunt, cum hine
) in alteram actu
nica sint habendae.
§. 36.

§. 36. Ista resolutio aequationis Riccatianae in fractionem continuam eo magis est attentione digna, quod haec aequatio nullo adhuc modo in seriem infinitam regularem resolui potuerit. Quae enim series olim pro eius resolutione exhibui, ita sunt comparatae vt vna series infinita per aliam diuisa resolutionem aequationis Riccatianae suppeditet; hic autem de vnica serie simplici sermo instituitur. Hinc igitur nascitur quaestio, num forte non etiam aliae aequationes differentiales dentur, quarum resolutionem pariter per fractiones continuas expedire liceat.

DE