1785

De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda

Leonhard Euler

E 591

ous fiet $\frac{c\,dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(-cc-xx)}} = -\frac{c\,dx}{\sqrt{(cc+xx)}}$, quod ergo erit reale, etiamſi radius circuli ſit imaginarius, eiusque adeo integrale erit $c\,l\frac{\sqrt{(cc+xx)}-x)}{c}$, vbi maxime mirum videri poteſt, quod arcus circuli imaginarii nihilo minus ſint reales et quidem per logarithmos aſſignabiles. Atque hinc iam tuto concludere poterimus, quemadmodum praeter circulum nullae aliae dantur lineae curuae, cuius ſingulos arcus per circulares metiri liceat, ita etiam praeter circulum imaginarium nullas dari curuas algebraicas, quarum ſingulos arcus per logarithmos metiri liceat. Quoniam autem circulus imaginarius plane exiſtere nequit, prorſus nullae curuae algebraicae exhiberi poſſe ſunt cenſendae, quarum ſingulos arcus per logarithmos exprimere liceat.

DE

it reale, etiamſi
integrale erit
poteſt, quod
reales et qui-
iam tuto con-
circulum nullae
cus per circula-
imaginarium nul-
arcus per loga-
ulus imaginarius
algebraicae ex-
s arcus per lo-

DE

DE RELATIONE
INTER TERNAS PLVRESVE
QVANTITATES
INSTITVENDA.

§. 1.

Propoſitis duabus quantitatibus A et B, earum relatio, ſeu ratio definitur, dum quaeruntur duo numeri integri α et β, iique minimi, vt fiat $\alpha A = \beta B$; vnde ſi quantitates A et B fuerint inter ſe commenſurabiles, iſtos numeros α et β ſemper accurate aſſignare licebit; ſin autem ſint incommenſurabiles, numeros α et β ita dare licebit, vt diſcrimen inter formulas αA et βB ſit minimum, vel ita paruum, vt propius ad aequalitatem inter has formulas αA et βB accedi nequeat, niſi pro α et β maiores numeri adhibeantur. Hocque modi ſolui ſolet problema olim a Walliſio propoſitum, quo, propoſitis duobus numeris quantumuis magnis A et B, rationes in minoribus numeris requiruntur, qui tam exacte eorum rationem exprimant, quam fieri poteſt numeris non maioribus adhibendis.

§. 2. Simili modo ſi tres proponantur quantitates A, B et C, reperiri poterunt tres numeri integri α, β et γ, vt vt fiat $\alpha A = \pm \beta B \mp \gamma C$; et quidem omnes possibiles valores pro his numeris α, β, γ assignare licebit, quibus inuentis haud difficile erit, minimos numeros pro α, β et γ exhibere, atque hoc modo relatio inter ternas quantitates propositas A, B et C planissime indicari videtur. Methodus autem hos tres numeros α, β, γ inuestigandi similis erit illi, qua relatio inter duas tantum quantitates definiri solet, et quae eiusmodi operationibus absoluitur, quibus maximus communis diuisor duorum numerorum indagari solet, id quod sequenti exemplo illustremus.

§. 3. Propositae igitur sint tres sequentes quantitates: $A = 49$, $B = 59$ et $C = 75$, et quaerantur numeri a, b, c, vt fiat $49a + 59b + 75c = 0$, vbi quidem a, b, c numeros integros, siue positiuos, siue negatiuos significent. Iam diuidatur aequatio illa per minimam propositarum quantitatum, scilicet per 49, et quoti ex posterioribus terminis oriundi resoluantur in partes integras et fractas, ac seorsim exhibeantur, quae quoniam iunctim sumtae nihilo debent aequari, partes integras statuamus aequales numero integro $+d$, fractae autem eidem numero negatiuo $-d$; hocque modo duae hinc nascentur aequationes

$$a + b + c = d \text{ et } \frac{10b + 26c}{49} = -d.$$

Iam ex postrema aequatione fit $10b + 26c + 49d = 0$, quae prorsus vt prima tractetur, scilicet per 10 diuisa dabit

$$b + 2c + 4d = +3e \text{ et } \frac{6c + 9d}{10} = -3e.$$

Hic scilicet, quia numeri 6 et 9 communem diuisorem habent 3, loco simplicis litterae e statim scripsimus $3e$, sicque noua aequatio erit $2c + 3d + 10e = 0$, quae, per 2 di-

ies possibiles
bit, quibus
pro α, β et γ
quantitates
r. Methodus
milis erit illi,
ri solet, et
us maximus
solet, id quod

ntes quantita-
ntur numeri
uidem a, b, c
os significent.
sitarum quan-
bus terminis
s, ac seorsim
ihilo debent
mero integro
$-d$; hocque

$+ 49d = 0$,
10 diuisa dabit
$3e$.

diuisorem ha-
us $3e$, sic-
, quae, per
2 di-

uisa, similique modo distributa, suppeditat has aequationes:

$$c + d + 5e = +f \text{ et } \frac{d}{2} = -f,$$

quae vltima statim dat $d = -2f$, atque hic operationes terminantur, quoniam nullae amplius insunt fractiones.

§. 4. Cum igitur esse debeat $d = -2f$, littera autem e non sit determinata, per has duas litteras e et f praecedentes sequenti modo regrediendo definientur:

$$c = 3f - 5e,\ b = 13e + 2f \text{ et } a = -8e - 7f.$$

Solutio ergo generalis nostrae quaestionis, siue relatio inter ternos numeros propositos 49, 59, 75 sequenti aequatione continebitur:

$$-(8e + 7f)49 + (13e + 2f)59 + (3f - 5e)75 = 0$$

vbi pro e et f numeros quoscunque accipere licet.

§. 5. Videamus igitur, quales numeros pro e et f accipi conueniat, vt haec aequatio fiat simplicissima. Sumatur primo $f = 1$ et $e = -1$, et relatio inuenta erit

$$1.49 - 11.59 + 8.75 = 0;$$

at si sumamus $e = 0$ et $f = -1$, relatio erit

$$7.49 - 2.59 - 3.75 = 0,$$

quae sine dubio est simplicissima forma relationis. Atque ex hoc exemplo iam satis perspicuum est, quantumuis magnae fuerint quantitates A, B et C, quoniam continuo ad diuisores minores deuenimus, tandem omnes plane fractiones tolli, ac pro numeris a, b, c semper numeros integros obtineri.

§. 6.

§. 6. Cum igitur res ſit manifeſta, quando quantitates propoſitae A, B, C, D ſunt rationales, ſiue commenſurabiles inter ſe, etiam euidens eſt, ſi iſtae quantitates fuerint irrationales, vel adeo tranſcendentes, tum operationes hic vſitatas nunquam terminari, neque idcirco talem relationem exactam vllo modo exhiberi poſſe; veruntamen, quod his caſibus imprimis eſt notandum, ſi memoratae operationes alicubi abrumpantur, tum eiusmodi relationes eſſe prodituras, quae quidem rem non exacte, attamen vero proxime exhibeant, id quod ſaepenumero vſui eſſe poterit, quando inter huiusmodi quantitates relatio tantum proxime vera, et quidem in minimis deſideratur. Quomodo autem huiusmodi caſibus calculum tractare conueniat nonnullis exemplis oſtendemus.

§. 7. Sint igitur ternae quantitates $A = 1$, $B = \sqrt{2}$ et $C = \sqrt{3}$, ac primo, vt operationes ante adhibitae locum inuenire poſſint, has quantitates irrationales in fractiones decimales conuertamus, quas quidem non vltra ſextam notam continuemus. Eſt vero

$$\sqrt{2} = 1,414214 \text{ et } \sqrt{3} = 1,732051.$$

Iam per 1000000 multiplicando tota inueſtigatio ad numeros integros reuocetur, quandoquidem tota relatio in rationibus, quas hae quantitates inter ſe tenent ſubſiſtit, hocque modo aequatio principalis $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ transformabitur in hanc:

$$1000000.a + 1414214.b + 1732051.c = 0$$

quae diuiſa per 1000000 et vt ſupra in binas partes diſtributa dabit

$$a + b + c = +d \text{ et } \frac{414214.b + 732051.c}{1000000} = -d;$$

poſtrema

nifeſta, quando quan-
nales, ſiue commenſu-
i iſtae quantitates fue-
tes, tum operationes
e idcirco talem rela-
i poſſe; veruntamen,
m, ſi memoratae ope-
iusmodi relationes eſſe
exacte, attamen vero
nero vſui eſſe poterit,
latio tantum proxime
ur. Quomodo autem
conueniat nonnullis
titates A = 1, B = √2
ante adhibitae locum
tionales in fractiones
non vltra ſextam no-
,732051.
inueſtigatio ad nume-
tota relatio in ratio-
nent ſubſiſtit, hocque
2 + c√3 = 0 trans-
732051. c = 0
in binas partes di-
= − d;
poſtrema

poſtrema igitur ad integros reducta praebet

$$414214.b + 732051.c + 1000000\,d = 0,$$

haecque aequatio per 414214 diuiſa codemque modo tractata deducit ad his aequationes:

$$b + c + 2d = +e \text{ et } \frac{317837.c + 171572.d}{414214} = -e$$

quarum poſtrema reducitur ad hanc:

$$\frac{317837.c + 171572.d}{171572} + 414214.e = 0.$$

Tractetur iſta aequatio eodem modo, vt prodeant hae aequationes:

$$d + c + 2e = +f \text{ et } \frac{146265.c + 71070.e}{171572} = -f$$

quarum poſtrema ad integros reducta ita ſe habet:

$$146265.c + 71070.e + 171572\,f = 0,$$

quae per 71070 diuiſa praebet

$$e + 2c + 2f = +g \text{ et } \frac{4125.c + 29432.f}{71070} = -g;$$

poſterior reducta fit

$$4125.c + 29432.f + 71070\,g = 0,$$

vnde per 4125 diuidendo ſe produnt hae duae aequationes:

$$c + 7f + 17g = +h \text{ et } \frac{575.f + 945.g}{4125} = -h,$$

at haec poſterior ad integros reducta praebet iſtam:

$$575.f + 945.g + 4125.h = 0.$$

Diuidatur nunc per 575 prodibitque

$$f + g + 7h = +i \text{ et } \frac{370.g + 100.h}{575} = -i$$

ſiue $\frac{74.g + 20.h}{115} = -i$, quae reducta fit

$$74.g + 20.h + 115\,i = 0,$$

vnde

vnde per 20 diuidendo hae oriuntur aequationes:

$$h + 3g + 5i = +k \text{ et } \frac{14.g + 15.i}{20} = -k.$$

§. 8. Hoc modo has operationes continuari liceret, quousque libuerit; verum quia fractiones decimales non vltra sextam figuram sunt productae, per has operationes vltimae numerorum nostrorum figurae continuo magis fiunt incertae, vnde in vltima aequatione binos numeros 14 et 15 tanquam aequales inter se spectare licebit, vnde capi poterit $g = 1$ et $i = -1$, fietque $k = 0$, atque hinc regrediendo sequentes valores reperientur:

$h = 2, f = -16, c = 97, e = -161, d = +209, b = -676, a = -788,$

sicque relatio quaesita ita se habebit:

$$788 - 676.\sqrt{2} + 97\sqrt{3} = 0, \text{ siue}$$
$$676\sqrt{2} - 97.\sqrt{3} = 788$$

cuius error vix vltra sextam figuram decimalem exsurget.

§. 9. Quantumuis autem haec relatio ad veritatem accedat: tamen inde neutiquam concludere licet, eam penitus veritati esse consentaneam. Si enim, denotantibus a, b, c numeros rationales, esset exacte $a = b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, tum sumtis quadratis foret $aa = 2bb + 3cc + 2bc\sqrt{6}$, hincque $\sqrt{6} = \frac{aa - 2bb - 3cc}{2bc}$, ideoque $\sqrt{6}$ foret numerus rationalis, quod vtique maxime esset absurdum; atque hoc idem etiam de omnibus aliis numeris radicalibus cuiuscunque ordinis est tenendum, ita vt quaelibet quantitas irrationalis natura sua tantopere discrepet ab omnibus aliis irrationalibus tam eiusdem quam diuersorum graduum, vt nulla plane relatio rationalis inter plures huiusmodi quantitates surdas diuersas locum habere possit.

§. 10.

tari liceret, nales non)perationes nagis fiunt ros 14 et vnde capi hinc regre- , a = -788, exsurget. veritatem eam penitus a, 2 + c√3, 2bc√6, umerus ra- e hoc idem cunque or- irrationalis irrationali- nulla pla- itates sur- §. 10.

§. 10. Verum autem quantitates transcendentes, veluti qui peripheriam circuli inuoluunt, siue logarithmi, etiam cum nullis quantitatibus radicalibus comparari queant, adhuc maxime incertum videtur, siquidem a nemine adhuc talis impossibilitas est ostensa. Tantum quidem satis cunctum videtur, peripheriam π, circuli cuius diameter $= 1$, nullam comparationem cum formulis radicalibus quadraticis simplicibus admittere, quoniam aliter fractio continua ipsi π aequalis indices periodicos habere deberet, quod tamen neutiquam euenire videtur. Num autem quantitas π cum talibus formulis compositis nullo prorsus modo comparari queat, in dubio relinquere cogimur; quamobrem talem inuestigationem pro relatione quantitatum π, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ methodo modo exposita suscipiamus.

§. 11. Euoluamus igitur modo explicato hanc aequationem:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c.\pi = 0,$$

quae in numeris integris proxime veris ita se habet:

$$1414214.a + 1732051.b + 3141593.c = 0,$$

quae per minimum numerum diuisa praebet has aequationes:

$$a + b + 2c = d \text{ et } \frac{317837.b + 313165.c}{1414214} = -d.$$

Postrema aequatio ergo in integris fit

$$317837.b + 313165.c + 1414214.d = 0,$$

quae iterum per minimum numerum diuidatur, quo facto produnt hae duae aequationes:

$$c + b + 4d = e \text{ et } \frac{4672.b + 161554.d}{313165} = -e,$$

quae posterior reducta fit

$$4672.b + 161554.d + 313165.e = 0.$$

 Diuiden-

Diuidendo per 4672 hae colliguntur aequationes:

$$b + 34\,d + 67\,e = f \text{ et } \frac{2706.\,d + 141.\,e}{4672} = -f.$$

§. 12. Operationes has vlterius non prosequor, quoniam, si exacta daretur relatio, ea sine dubio non adeo complicata esset futura. Prope veras autem tales relationes exhibuisse parum iuuaret. Vnde sententia satis certa videtur, quod peripheria circuli tam peculiare genus quantitatum transcendentium constituat, vt cum nullis aliis quantitatibus, siue surdis, siue alius generis transcendentibus, nullo modo se comparari patiatur.

§. 13. Infinita autem alia dantur transcendentium genera, quae neque ad circulum neque ad logarithmos reduci possunt, etiamsi quampiam affinitatem cum his quantitatibus tenere videantur; ac si forte tales quantitates cum hactenus cognitis exactam quandam relationem tenerent, quam directe ex principiis analyticis definire non licet, haec methodus vnicam viam suppeditare videtur, cuius beneficio huiusmodi relationes quasi diuinando explorare licebit.

§. 14. Huiusmodi igitur casum singularem, qui talem relationem non respuere videtur, hic accuratius euoluam, scilicet summam seriei reciprocae cuborum

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \text{ etc.},$$

quam nullo adhuc modo siue ad circulum siue ad logarithmos reducere potui, cum tamen summae potestatum parium omnes per potestates pares ipsius π exhiberi queant, summa autem primarum potestatum

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{ etc.}$$

loga-

lo ...s:
: $-f$.
cul ... osequor, quo- ... non adeo ... es relationes ... erta videtur,
in ... quantitatum
oc ... quantitatibus,
qu ... nullo modo
se
bu
ascendentium ... arithmos re- ... his quan-
sus ... ntitates cum
qu ... m tenerent,
m ... on licet, haec ... ius beneficio ... licebit.
ae
rem, qui ta-
se ... tius euoluam,
vr ... ue ad loga-
se ... otestatum pa- ... beri queant,
qu
rc
loga-

logarithmum binarii exprimat.

§. 15. Cum igitur haec series reciproca cuborum

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{ etc.}$$

cubum huius seriei

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ etc.}$$

in se complectatur, probabile videtur, in eius summa (log. 2)[3] occurrere debere, neque tamen cuipiam multiplo huius quantitatis aequari certum est. Deinde vero, cum eadem series in se complectatur productum ex binis praecedentibus, scilicet:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.} = l\,2 \text{ et}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}:$$

suspicari licet, ibidem quoque productum $\frac{\pi\pi}{6}\,l\,2$ occurrere; quamobrem operae pretium erit inquirere, num forte summa seriei reciprocae cuborum tali formulae compositae:

$$\alpha\,(l\,2)^3 + \beta.\frac{\pi\pi}{6}.\,l\,2$$

aequetur, ita vt α et β sint numeri rationales.

§. 16. Per approximationes autem olim summam seriei reciprocae cuborum ita assignaui:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{ etc.} = 1,202056903,$$

vnde si eius pars quarta subtrahatur, prodit summa huius seriei:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{etc.} = 0,901542677$$

quam breuitatis gratia ponamus $= A$, et quaeramus numeros a, b, c, vt fiat

$$a\,A + b\,(l\,2)^3 + c\,l\,2.\frac{\pi\pi}{6} = 0,$$

N 2 vbi

vbi cum fit

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1,644934066 \text{ et } l2 = 0,693147180$$

colligimus fore proxime

$$(l2)^2 = 0,333025 \text{ et } l2.\frac{\pi\pi}{6} = 1,140182$$

vnde relatio euoluenda erit

$$901543.a + 333025.b + 1140182.c = 0.$$

§. 17. Pro hac igitur aequatione operationes instituantur vt supra, eritque diuidendo per 333025

$$b + 2a + 3c = d \text{ et } \frac{235493.a + 141107.c}{333025} = -d;$$

at posterior ad integros reducta praebet

$$235493.a + 141107.c + 333025.d = 0,$$

vnde diuidendo per 141107 deducimus has aequationes:

$$a + c + 2d = e \text{ et } \frac{94386.a + 50811.d}{141107} = -e, \text{ siue}$$

$$94386.a + 50811.d + 141107.e = 0$$

qua aequatione diuisa per 50811 colligitur

$$a + d + 2e = f \text{ et } \frac{43575.a + 39485.e}{50811} = -f;$$

at haec posterior reducta ad integros fit

$$43575.a + 39485.e + 50811.f = 0,$$

vnde porro diuidendo per minimum numerum oriuntur hae aequationes:

$$a + e + f = +g \text{ et } \frac{4090.a + 11326.f}{39485} = -g, \text{ siue}$$

$$4090.a + 11326.f + 39485.g = 0,$$

vnde formentur hae aequationes:

$$a + 2f + 9g = +h \text{ et } \frac{3146.f + 2675.g}{4090} = -h$$

etc. etc.

§. 18.

10
82
0.
ones insti-
-d;
0,
ationes:
, siue
;
iuntur hae
, siue
- h
§. 18.

§. 18. Superfluum foret, has operationes vlterius continuare, quoniam hinc iam satis intelligere licet, nullam dari relationem tam concinnam inter ternas quantitates assumtas, vt veritati consentanea censeri posset. Cum igitur inuestigationem huius summae reciprocae cuborum tot variis modis frustra explorare tentassem, atque haec methodus etiam inutiliter sit in vsum vocata, merito de tali inuentione desperandum videtur.