



1785

De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenta

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda" (1785). *Euler Archive - All Works*. 591.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/591>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

§ 90 (§ 89)

ous fiet $\frac{a^2 + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a^2 x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, quod ergo erit reale, etiam si radius circuli sit imaginarius, eiusque adeo integrale erit $c / \sqrt{(a^2 + x^2) - x^2}$, vbi maxime mirum videri potest, quod arcus circuli imaginarii nihil minus sint reales et quidem per logarithmos assignabiles. Atque hinc iam tuto concludere poterimus, quemadmodum præter circulum nullæ aliæ dantur lineæ curvæ, cuius singulos arcus per circulas metiri liceat, ita etiam præter circulum imaginarium nullas dari curvas algebraicas, quarum singulos arcus per logarithmos metiri liceat. Quoniam autem circulus imaginarius plane existere nequit, prorsus nullæ curvæ algebraicæ exhiberi posse sunt censendæ, quarum singulos arcus per logarithmos exprimere liceat.



DE

§ 91 (§ 90)

DE RELATIONE

INTER TERNAS PLVRESVE

QUANTITATES

INSTITVENDA.

it reale, etiam si integrabile erit potest, quod reales et quidem iam tuto concludere nullæ imaginarium nullæ arcus per logarithmos imaginarius erit arcus per logarithmos

§. 1.

Propositis duabus quantitatibus A et B, earum ratio, seu ratio definitur, dum quaeruntur duo numeri integri α et β , ique minimi, ut fiat $\alpha A = \beta B$; unde si quantitates A et B fuerint inter se commensurabiles, istos numeros α et β semper accurate assignare licebit; sin autem sint incommensurabiles, numeros α et β ita dare licebit, ut discrimen inter formulas αA et βB sit minimum, vel ita parvum, ut propius ad æqualitatem inter has formulas αA et βB accedi nequeat, nisi pro α et β maiores numeri adhibeantur. Hocque modi solvi solet problema olim a Wallisio propositum, quo, propositis duobus numeris quantumvis magnis A et B, rationes in minoribus numeris requiruntur, qui tam exacte eorum rationem expriment, quam fieri potest numeris non maioribus adhibendis.

§. 2. Simili modo si tres proponantur quantitates A, B et C, reperiri poterunt tres numeri integri α , β et γ , ut

DE

M 2

VE

ut fiat $\alpha A = \pm \beta B \mp \gamma C$; et quidem omnes possibiles valores pro his numeris α, β, γ assignare licet, quibus inductis haud difficile erit, minimos numeros pro α, β et γ exhibere, atque hoc modo relatio inter remas quantitates propositas A, B et C planissime indicari videatur. Methodus autem hos tres numeros α, β, γ investigandi similis erit illi, qua relatio inter duas tantum quantitates definiti solet, et quae eiusmodi operationibus absoluitur, quibus maximus communis divisor duorum numerorum indagari solet, id quod sequenti exemplo illustremus.

§. 3. Propositae igitur sint tres sequentes quantitates: $A = 49$, $B = 59$ et $C = 75$, et quaerantur numeri a, b, c , ut fiat $49a + 59b + 75c = 0$, ubi quidem a, b, c numeros integros, sine negativis significent. Tam dividantur aequatio illa per minimam propositarum quantitarum, scilicet per 49, et quoti ex posterioribus terminis oriundi resolvantur in partes integras et fractas, ac seorsim exhibeantur, quae quoniam in eandem summat nihil debent aequari, partes integras statimius aequales numero integro $-d$, fractae autem eidem numero negativo $-d$; haecque modo duae hinc nascuntur aequationes

$$a + b + c = d \text{ et } \frac{10b + 26c}{49} = -d.$$

Iam ex postrema aequatione fit $10b + 26c + 49d = 0$, quae prorsus ut prima tractetur, scilicet per 10 dividit dabit

$$b + 2c + 4d = +3e \text{ et } \frac{6c + d}{10} = -3e.$$

Hic scilicet, quia numeri 6 et 9 communem divisorem habent 3, loco simplicis litterae e statim scriptissimus $3e$, per quae nova aequatio erit $2c + 3d + 10e = 0$, quae, per

possibiles valores, quibus pro α, β et γ quantitates r. Methodus similis erit illi, uti solet, et nus maximus solet, id quod

nes quantitates numeri quidem a, b, c os significant. hanc quantitates terminis s, ac seorsim nihil debent aequari numero integro $-d$; haecque

$$+ 49d = 0, \\ + 10d = 0, \\ 3e.$$

divisorem habent 3e, per quae, per 2 di-

e divisa, similique modo distributa, suppediat has aequationes:

$$c + d + 5e = +f \text{ et } d = -f,$$

quae vltima statim dat $d = -2f$, atque hic operationes terminantur, quoniam nullae amplius insunt fractiones.

§. 4. Cum igitur esse debeat $d = -2f$, littera autem e non sit determinata, per has duas litteras e et f praecedentes sequenti modo regressendo definiuntur:

$$c = 3f - 5e, \quad b = 13e + 2f \text{ et } a = -8e - 7f.$$

Solutio ergo generalis nostrae quaestionis, sine relato inter terminos numeros propositos 49, 59, 75 sequenti aequatione coniechitur:

$$-(8e + 7f)49 + (13e + 2f)59 + (3f - 5e)75 = 0$$

ubi pro e et f numeros quoscunque accipere licet.

§. 5. Videmus igitur, quales numeros pro e et f accipi conueniat, ut haec aequatio fiat simplicissima. Statimur primo $f = 1$ et $e = -1$, et relato inuenta erit

$$1.49 - 11.59 + 8.75 = 0;$$

at si firmamus $e = 0$ et $f = -1$, relato erit

$$7.49 - 2.59 - 3.75 = 0,$$

quae sine dubio est simplicissima forma relationis. Atque ex hoc exemplo iam facis perspicuum est, quantumvis magis fuerint quantitates A, B et C, quoniam continuo ad divisores minores devenimus, tandem omnes plane fractiones tolli, ac pro numeris a, b, c semper numeros integros obtineri.

§. 6. Cum igitur res sit manifesta, quando quantitates proportionales A, B, C, D sunt rationales, sine commentariis irracionales, vel adeo transcendentes, cum operationes hinc viderentur nunquam terminari, neque idcirco talem relationem exactam villo modo exhiberi posse; veruntamen, quod his casibus imprimis est notandum, si memoratae operationes alicubi abrumpantur, tum eiusmodi relationes esse profuturas, quae quidem rem non exacte, aramen vero proxime exhibeant, id quod saepe numero vili esse poterit, quando inter huiusmodi quantitates relatio tantum proxime vera, et quidem in minimis deficiatur. Quomodo autem huiusmodi casibus calculum tractare conveniat nonnullis exemplis ostendamus.

§. 7. Sint igitur ternae quantitates $A=1$, $B=V2$ et $C=V3$, ac primo, ut operationes ante adhibita locum inveniunt possint, has quantitates irracionales in fractiones decimales converteremus, quos quidem non vltra sexam notam contineremus. Est vero $V2=1,414214$ et $V3=1,732051$.

Iam per 1000000 multiplicando tota inuestigatio ad numeros integros renouetur, quandoquidem tota relatio in rationibus, quas hae quantitates inter se tenent subsistit, hocque modo aequatio principalis $a + bV2 + cV3 = 0$ transformabitur in hanc:

$$1000000a + 1414214b + 1732051c = 0$$

quae diuisa per 1000000 et ut supra in duas partes distributa dabit

$$a + b + c = +d \text{ et } \frac{1414214b + 1732051c}{1000000} = -d;$$

postrema

manifesta, quando quantitates, sine commentariis, hae quantitates fuerint, cum operationes hinc idcirco talem relationem exactam villo modo exhiberi posse; veruntamen, si memoratae operationes alicubi abrumpantur, tum eiusmodi relationes esse profuturas, quae quidem rem non exacte, aramen vero proxime exhibeant, id quod saepe numero vili esse poterit, quando inter huiusmodi quantitates relatio tantum proxime vera, et quidem in minimis deficiatur. Quomodo autem huiusmodi casibus calculum tractare conveniat nonnullis

§. 7. Sint igitur ternae quantitates $A=1$, $B=V2$ et $C=V3$, ac primo, ut operationes ante adhibita locum inveniunt possint, has quantitates irracionales in fractiones decimales converteremus, quos quidem non vltra sexam notam contineremus. Est vero $V2=1,414214$ et $V3=1,732051$.

Iam per 1000000 multiplicando tota inuestigatio ad numeros integros renouetur, quandoquidem tota relatio in rationibus, quas hae quantitates inter se tenent subsistit, hocque modo aequatio principalis $a + bV2 + cV3 = 0$ transformabitur in hanc:

$$1000000a + 1414214b + 1732051c = 0$$

quae diuisa per 1000000 et ut supra in duas partes distributa dabit

$$a + b + c = +d \text{ et } \frac{1414214b + 1732051c}{1000000} = -d;$$

postrema

postrema igitur ad integros redunda praebet

$$414214b + 732051c + 1000000d = 0,$$

haecque aequatio per 414214 diuisa eodemque modo tractata deducit ad has aequationes:

$$b + c + 2d = -e \text{ et } \frac{1414214b + 1732051c}{414214} = -e$$

quarum postrema reducitur ad hanc:

$$\frac{1414214b + 1732051c}{1732051} + 414214e = 0.$$

Trahentur ista aequatio eodem modo, ut procedant hae aequationes:

$$d + c + 2e = +f \text{ et } \frac{1414214b + 1732051c}{1732051} = -f$$

quarum postrema ad integros redunda ita se habet:

$$146265c + 71070e + 171572f = 0,$$

quae per 71070 diuisa praebet

$$e + 2c + 2f = +g \text{ et } \frac{146265c + 171572f}{71070} = -g;$$

posterior redunda fit

$$4125c + 29432f + 71070g = 0,$$

unde per 4125 diuisa se produunt hae duae aequationes:

$$c + 7f + 17g = +h \text{ et } \frac{575f + 29432g}{4125} = -h,$$

at haec posterior ad integros redunda praebet istam:

$$575f + 945g + 4125h = 0.$$

Diuisa nunc per 575 prodibique

$$f + g + 7h = +i \text{ et } \frac{37g + 100h}{575} = -i$$

sive $\frac{37g + 100h}{575} = -i$, quae redunda fit

$$74g + 20h + 115i = 0,$$

unde

vnde per 20 dividendo hae oriuntur aequationes:

$$h + 3g + 5i = +k \text{ et } \frac{14e + 11f}{20} = -k.$$

§ 8. Hoc modo has operationes continuari liceret, quousque liberit; verum quia fractiones decimales non ultra sextam figuram sine productae, per has operationes vltimae numerorum nostrorum figurae continuo magis sunt incertae, vnde in vltima aequatione binos numeros 14 et 15 tanquam aequales inter se spectare licet, vnde capi poterit $g = 1$ et $i = -1$, ferque $k = 0$, arque hinc regrediendo sequentes valores reperientur:

$$h = 2, f = -16, c = 97, e = -161, d = +209, b = -676, a = -788,$$

siueque relatio quaevis ita se habebit:

$$788 - 676\sqrt{2} + 97\sqrt{3} = 0, \text{ siue}$$

$$676\sqrt{2} - 97\sqrt{3} = 788$$

cuius error vix ultra sextam figuram decimalem exsurgit.

§ 9. Quantumvis autem haec relatio ad veritatem accedat: tamen inde nevigam concludere licet, eam penitus veritati esse confensam. Si enim, denotantibus a, b, c numeros racionales, esset exacte $a = b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, tum sumis quadratis foret $aa = 2bb + 3cc + 2bc\sqrt{6}$, hincque $\sqrt{6} = \frac{aa - 2bb - 3cc}{2bc}$, ideoque $\sqrt{6}$ foret numerus rationalis, quod vitique maxime esset absurdum; arque hoc idem etiam de omnibus aliis numeris radicalibus euisque ordinis est tenendum, ita vt quaelibet quantitas irrationalis natura sua tanopere discrepet ab omnibus aliis irrationalibus cum eiusdem quam diversorum graduum, vt nulla plane relatio rationalis inter plures huiusmodi quantitates fueras diversas locum habere possit.

§. 10.

h
n
c
d
i
r
h
d
c
c
q
q
n
r
r
n
n

ari liceret, nales non operationes magis sunt ros 14 et vnde capi hinc regre-
a = -788,

q
q
q
q
p
q
q
p
q

exsurgit.
veritatem eam penitus $a, 2 + c\sqrt{3}, 2bc\sqrt{6}$, unerus racionis hoc idem unque or- irrationalis irrationali- nulla pla- ritates fir-
§. 10.

§ 10. Verum autem quantitates transcendentes, vbi hui qui peripheriam circuli involuunt, sine logarithmi etiam cum nullis quanticibus radicalibus comparari queant, adhuc maxime incertam videntur, siquidem a mente adhuc talis impossibilitas est ostensa. Tamen quidem satis certum videtur, peripheriam π , circuli cuius diameter = 1, nullam comparationem cum fermulis radicalibus quadratis simplicibus admittere, quantum aliter fractio continua ipsi π ac quilibet indices periodicos habere deberet, quod tamen nevisquam evenire videtur. Num autem quantitas π cum talibus formulis compositis nullo provis modo comparari queat, in dubio relinquere cogimur; quumobrem eadem investigationem pro relatione quantum π , $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ metodo modo expoliam suscipiamus.

§ 11. Euclannus igitur modo explicato hanc aequationem:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\pi = 0,$$

quae in numeris integris proxime veris ita se habet:

$$1414214a + 1732051b + 3141593c = 0,$$

quae per minimum numerum divisam praebet has aequationes:

$$a + b + 2c = d \text{ et } \frac{1277272b + 117085c}{1414214} = -d.$$

Potissima aequatio ergo in integris fit

$$317837b + 319165c + 1414214d = 0,$$

quae iterum per minimum numerum dividatur, quo facto produunt hae duae aequationes:

$$c + b + 4d = e \text{ et } \frac{16912b + 161554d}{319165} = -e,$$

quae posterior reducta fit

$$4672b + 161554d + 319165e = 0.$$

Euleri Op. Anal. Torr. II.

N

Dividen-

Dividendo per 4672 hae colliguntur aequationes:

$$b + 34d + 67e = f \text{ et } \frac{3706d + 111e}{4672} = -f.$$

§. 12. Operationes has vterius non profequor, quoniam, si exacta darentur relatio, ea sine dubio non adeo complicata esset futura. Prope veras autem tales relationes exhibuisse parum iuaret. Unde sententia satis certa videtur, quod peripheria circuli tam peculiare genus quantitarum transcendendum constituat, ut cum nullis aliis quantitatibus, siue furdis, siue aliis generis transcendendis, nullo modo se comparari possit.

§. 13. Infinita autem alia dantur transcendendum genera, quae neque ad circulum neque ad logarithmos reduci possunt, etiam si quampiam affirmatam cum his quantitatibus tenere videantur; ac si forte tales quantitates cum haecentis cognitis exactam quandam relationem tenerent, quam directe ex principiis analyticis definire non licet, haec methodus vnicam viam suppeditare videtur, cuius beneficio huiusmodi relationes quasi diuinando explorare licebit.

§. 14. Huiusmodi igitur casum singularem, qui talem relationem non recipere videtur, hic accuratius euoluam, scilicet summam feriei reciprocae cuborum

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \text{etc.},$$

quam nullo adhuc modo siue ad circulum siue ad logarithmos reducere potui, cum tamen summae potestatum paruum omnes per potestates parces ipsius π exhiberi queant, summa autem primarum potestatum

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

loga-

log

:-f.

cul

in
oc
qu
fer
bu

ful
qu
nr

ae

fo

vr
fo

qr
rc

aliquor, quoniam non adeo es relationes certa videtur, quantitarum quantitatibus, nullo modo

transcendentium generis reducti ad circulum, quoniam cum his quantitatibus tenere non licet, haec methodus vnicam viam suppeditare licebit.

rem, qui talem relationem non recipere videtur, hic accuratius euoluam, scilicet summam feriei reciprocae cuborum

loga-

logarithmum binarii exprimat.

§. 15. Cum igitur haec series reciproca cuborum

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.}$$

cubum huius feriei

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

in se complectatur, probabile videtur, in eius summa (log. 2) occurrere debere, neque tamen culpam multiplo huius quantitatis aequari certum est. Deinde vero, cum eadem series in se complectatur productum ex binis praecedentibus, scilicet:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = \frac{1}{2} \text{ et } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6};$$

suspiciari licet, ibidem quoque productum $\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{2}$ occurrere; quoniam breuem operae pretium erit inquirere, num forte summa feriei reciprocae cuborum tali formulae composuisse:

$$\alpha (12)^x + \beta \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

aequeatur, ita ut α et β sint numeri rationales.

§. 16. Per approximationes autem olim summam feriei reciprocae cuborum ita assignauit:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = 1,202056903,$$

unde si eius pars quarta subtrahatur, prode summa huius feriei:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = 0,901542677$$

quam breuitatis gratia ponamus = A, et quaeramus numeros a, b, c, ut fiat

$$aA + b(12)^x + c \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 0,$$

N 2

vbi

vbi cum sit

$$\pi^{\pi} = 1, 644524065 \text{ et } 1/2 = 0, 693147180$$

colligimus fore proxime

$$(1/2)^{\pi} = 0, 333025 \text{ et } 1/2 \cdot \pi^{\pi} = 1, 140182$$

unde relatio euoluenda erit

$$901543 \cdot a + 333025 \cdot b + 1140182 \cdot c = 0,$$

§. 17. Pro hac igitur aequatione operationes instituantur ut supra, erique dividendo per 333025

$$b + 2a + 3c = d \text{ et } \frac{271 \cdot 91 \cdot a + 11107 \cdot c}{333 \cdot 25} = -d;$$

at posterior ad integros redunda praebet

$$235493 \cdot a + 141107 \cdot c + 333025 \cdot d = 0,$$

unde dividendo per 141107 deducimus has aequationes:

$$a + c + 2d = e \text{ et } \frac{94386 \cdot a + 2811 \cdot d}{141107} = -e, \text{ siue}$$

$$94386 \cdot a + 50811 \cdot d + 141107 \cdot e = 0$$

qua aequatione diuisa per 50811 colligitur

$$a + d + 2e = f \text{ et } \frac{13775 \cdot a + 13481 \cdot e}{50811} = -f;$$

at haec posterior redunda ad integros fit

$$43575 \cdot a + 39485 \cdot e + 50811 \cdot f = 0,$$

unde porro dividendo per minimumum numerum orientur haec aequationes:

$$a + e + f = +g \text{ et } \frac{1992 \cdot a + 11176 \cdot f}{9435} = -g, \text{ siue}$$

$$4090 \cdot a + 11326 \cdot f + 39485 \cdot g = 0,$$

unde formantur haec aequationes:

$$a + 2f + 9g = +h \text{ et } \frac{3146 \cdot f + 3675 \cdot g}{1093} = -h$$

etc. etc.

§. 18.

§. 18. Superfluum foret, has operationes vterius continuare, quoniam hinc iam satis intelligere licet, nullam dari relationem tam concinnam inter ternas quantitates assumptas, ut veritati consentanea censeri possit. Cum igitur investigationem huius summae reciprove ciborum tot variis modis frustra explorare tentassem, atque haec methodus etiam inutiliter sic in usum vocata, merito de tali inuentione desperandum videtur.

nes insti-

-d;

2,

ationes:

siue

;

inuntur haec

siue

-h

§. 18.