1785

Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur

Leonhard Euler

E590

THEOREMATA QVAEDAM ANALYTICA QVORVM DEMONSTRATIO ADHVC DESIDERATVR.

§. 1.

In Analysi diophantea, quae circa proprietates numerorum versatur, notissimum est, plurima occurrere theoremata, de quorum veritate dubitare non licet, etiamsi ea demonstratione rigida confirmare non valeamus. In Geometria autem nemo adhuc eiusmodi theoremata in medium produxit, quorum vel veritatem vel falsitatem demonstrare non liceat. At vero in Analysi sublimiori iam dudum etiam eiusmodi theoremata se mihi obtulerunt, quorum demonstrationem nullo modo etiamnunc inuenire potui, etiamsi eorum veritas nequaquam in dubium vocari videatur. Talia igitur theoremata vtique summam attentionem merentur, cum nullum plane sit dubium, quin si eorum demonstrationem adhuc frustra anquisitam detexeremus, inde maximi momenti incrementa in Analysin sint redundatura.

§. 2. Inter huiusmodi autem veritates analyticas merito primum locum tribuo insigni illi proprietati quantitatum imaginariarum, quod, vbicunque tales quantitates natura sua impossibiles occurrant, eae semper in formula hac $a +$

.TA
ALYTICA
.TIO ADHVC
VR.

proprietates numerorum occurrere theoremata, etiamsi ea demonstratio- In Geometria autem medium produxit, quo- emonstrare non liceat. dudum etiam eiusmodi m demonstrationem nul- etiamsi eorum veritas ne- Talia igitur theore- erentur, cum nullum demonstrationem adhuc maximi momenti in- a.

m veritates analyticas illi proprietati quanti- ae tales quantitates na- semper in formula hac $a +$

$a+b\sqrt{-1}$ comprehendi queant. Huic quidem veritati innititur resolutio omnium aequationum algebraicarum, quippe quarum radices nisi fuerint reales, omnes in tali formula $a+b\sqrt{-1}$ contineri perhibentur, id quod etiam illustris *d'Alembert* demonstratione perquam ingeniosa confirmauit, quae autem quoniam ex consideratione infinite paruorum est petita, haud immerito adhuc demonstratio planior ex ipsa natura imaginariorum petenda desideratur. Praeterea vero ista demonstratio tantum ad expressiones algebraicas patet, cum tamen aeque certum sit, eam etiam in omnis generis quantitatibus transcendentibus locum habere, vbi ratiocinium, quo vir celeberr. est vsus, non semper adhiberi potest, id quod operae pretium erit clarius ostendisse.

§. 3 Consideretur curua algebraica ex quotcunque ramis fuerit composita, cuiusmodi sit ramus FNLMH, qui ad axem AK relatus, postquam ab F dextrorsum vsque ad L processerit, hinc iterum sinistrorsum per LMH porrigatur; ita vt, si applicata KL hanc curuam in extremitate L tangat, abscissae cuilibet AP, minori quam AK, duplex respondeat applicata PM et PN. Vnde si ponatur abscissa $AP = x$, applicata y duplicem habebit valorem, ex tali aequatione quadratica: $yy = 2py - q$ determinandum, ita vt hinc sit altera applicata $PM = p - \sqrt{(pp-q)}$, altera vero $PN = p + \sqrt{(pp-q)}$, vbi pro indole curuae litterae p et q functiones quascunque abscissae x denotare possunt. Quamdiu igitur fuerit $pp > q$, reuera gemina orietur applicata PM et PN. Dum autem abscissa x vsque in K augetur, vbi fiat $pp = q$, ibi ambae applicatae in vnam KL coalescent, ita vt hic applicata KL euadat curuae tangens. Quod si ergo, abscissam x vlterius augendo, fiat $q > pp$, ambae applicatae euadent imaginariae. Tab. Fig.

 Vnde

Vnde intelligitur, si capiatur abscissa A X > A K, in hoc loco nullam prorsus dari applicatam, seu rectam in hoc loco perpendicularem XY, vtrinque etiam in infinitum productam, nusquam curuae F L H esse occursuram, id quod more loquendi in Analysi recepto idem significat ac applicatam in hoc loco X esse imaginariam; vnde simul notio imaginariorum, vti in Analysi adpellantur, clarius intelligitur. Cum enim haec applicata X Y curuae nusquam occurrat, etiamsi a puncto X, vbi est $=0$, tam sursum vsque in infinitum positiuum, quam deorsum vsque in infinitum negatiuum continuetur: euidens est eius valorem inuentum neque esse $=0$, neque maiorem quam 0, neque minorem quam 0, qua conditione definitio ipsa quantitatum imaginariarum continetur. Quod si ergo pro hoc loco sumamus fieri $q = pp + rr$, gemina expressio applicatae euadet $y = p \pm r \sqrt{-1}$.

§. 4. Hic igitur quaeritur, num hinc certo in genere concludi possit, quotiescunque imaginaria occurrant, ea semper huiusmodi formula: $p \pm r \sqrt{-1}$ exprimi posse. Primo enim haec demonstratio tantum ex ramo F L H est petita, dum tota curua aequatione inter x et y contenta fortasse plures insuper alios ramos inuoluat, quos in hoc negotio penitus negligere fortasse non licet. Hanc autem obiectionem Vir excell. vtique ipse praeuidit, dum hoc ratiocinium tantum ad portiunculam curuae infinite paruam N L M extendit, vbi vlteriorem ramorum extensionem tuto negligere liceat, quod autem non adeo in aprico situm videtur, vt non planiorem demonstrationem a tali conceptu immunem merito desiderare queamus. Tum vero etiam hinc plus non sequeretur, quam applicatas X Y, extremae K L infinite propinquas, tali formula $p \pm r \sqrt{-1}$ exprimi posse; ac

> A K, in hoc lo- ectam in hoc loco nfinitum productam, , id quod more it ac applicatam in il notio imaginario- elligitur. Cum enim ccurrat, etiamsi a e in infinitum posi- n negatiuum conti- m neque esse $=0$, quam 0, qua condi- n continetur. Quod $pp + rr$, gemina -1.

hinc certo in ge- ginaria occurrant, -1 exprimi posse. x ramo F L H est : et y contenta for- t, quos in hoc icet. Hanc autem uidit, dum hoc ra- e infinite paruam n extensionem tuto aprico situm vide- tali conceptu im- n vero etiam hinc Y, extremae K L -1 exprimi posse; ac

ac non immerito dubitare liceret, an pro interuallis maioribus K X etiam applicatae tali formula comprehendi queant, et annon reliquae curuae partes hactenus neglectae indolem imaginarii in his locis penitus immutare valeant.

§. 5. Praeterea vero ista consideratio tantum ad aequationes et curuas algebraicas est accommodata, in quibus vtique alii rami non dantur, nisi qui vel in se redeant, vel vtrinque in infinitum excurrant, ita vt circa terminum L portio curuae hic semper binas portiones L M et L N exhibeat, vnde aequatio illa quadratica $yy = 2py - q$ est nata, cui tota demonstratio innititur. At vero inter curuas transcendentes eiusmodi rami occurrunt, qui neque vtrinque in infinitum protenduntur, neque in se redeunt, sed subito in quopiam puncto terminantur. Talem casum praebet curua transcendens hac aequatione contenta: $y = a + \frac{bx}{l(c-x)}$, ex qua sequitur, singulis abscissis vnicam tantum applicatam respondere. Posito enim $x = 0$, fit $y = a$; ac si abscissa x continuo augeatur vsque ad valorem $x = c$, perpetuo vnica dabitur applicata; sumta vero abscissa $x = c$, ob $l(c-x) = -\infty$, fiet applicata in hoc loco $y = a$. Statim autem atque abscissa x vltra c augetur, applicata subito fiet imaginaria, propterea quod logarithmi quantitatum negatiuarum certo sunt imaginarii; quare sumta abscissa $x > c$, applicata y, etiamsi vtrinque in infinitum producatur, curuae tamen nostrae nusquam occurret. Hoc autem casu ratio supra allegata et naturae aequationis quadraticae innixa, penitus cessat, ita vt hic merito dubitare possimus, an ista applicata imaginaria etiam in formula $p + q \sqrt{-1}$ comprehendi queat. Saltem hic agnoscere debemus, istud theorema alia demonstratione indigere, ideoque maxime optandum esse vt talis aequa-

aequatio immediate ex ipſa natura imaginariorum deriuetur.

§. 6. Ante autem quam hoc argumentum deſeram, oſtendiſſe iuuabit, quomodo omnia plane imaginaria ſingulari prorſus ratione per circulum repraeſentari poſſint. Ex
Tab. I. Fig. 4. puncto A, pro principio axis A B aſſumto, erigatur perpendiculum $AC = a$; centro C radio $CM = c$ deſcribatur circulus, ac poſita abſciſſa quacunque $AP = x$ eique reſpondente applicata $PM = y$ erit

$$y = AC + QM = AC + \sqrt{(CM^2 - CQ^2)} = a + \sqrt{(cc - xx)},$$

ita vt eius valor ſemper ſit realis quamdiu abſciſſa x minor capitur quam radius c, ſimulac vero abſciſſa x radium c ſuperat, veluti ſi ſumatur $x = AX$, tum applicata XY certe erit imaginaria. At vero, quanquam ob hanc ipſam cauſſam applicata exhiberi nequit, tamen determinatum habet valorem imaginarium (iam enim euictum eſt, notionem determinati notioni imaginarii non aduerſari). Quoniam enim ponitur $x > c$, ſtatuatur $xx = cc + bb$, vt fiat $\sqrt{cc - xx} = b\sqrt{-1}$, ideoque applicata iſta imaginaria $XY = a + b\sqrt{-1}$. Quare cum formula $a + b\sqrt{-1}$ omnes plane quantitates imaginarias contineat, eas per huiusmodi applicatam determinatam XY ad circulum quendam pertinentem repraeſentare licebit. Poſito ſcilicet perpendiculo $AC = a$, centro C, radio pro arbitrio aſſumto c, deſcribatur circulus, ac ſumatur abſciſſa $AX = \sqrt{(bb + cc)}$, tum enim applicata imaginaria XY iſtam formulam $a + b\sqrt{-1}$; exhibebit ſicque mirabili quodam modo omnes adeo formulas imaginarias quaſi geometrice conſtruere licebit.

§. 7.

aginariorum deri-
umentum deſeram,
imaginaria ſingu-
ntari poſſint. Ex
, erigatur perpen-
M = c deſcribatur
= x eique reſpon-
= a + √(cc − xx),
iu abſciſſa x minor
ſciſſa x radium c
pplicata X Y certe
c ipſam cauſſam ap-
habet valorem ima-
determinati notioni
ponitur x > c, ſta-
= b √ − 1, ideo-
+ b √ − 1. Quare
quantitates imagi-
atam determinatam
praeſentare licebit.
o C, radio pro ar-
ic ſumatur abſciſſa
ta imaginaria X Y
ſicque mirabili quo-
arias quaſi geome-
§. 7.

§. 7. Operae pretium erit hoc exemplo quodam declaraſſe. Quaeramus ſcilicet arcum circuli, cuius ſinus duplo maior ſit ſinu toto, qui ergo certe erit imaginarius. Poſito ergo ſinu toto $= 1$ integrari debet formula $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ita vt integrale euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero fieri debebit $x = 2$, et valor integralis dabit ipſum arcum. Hunc in finem formulae differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ tribuamus hanc formam: $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$; conſtat autem eſſe $\int \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} = \frac{l(x+\sqrt{(xx-1)})}{\sqrt{-1}}$, vnde poſito $x = 2$ arcus quaeſitus erit

$$= \sqrt{-1}\, l \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, l(2+\sqrt{3}) - \sqrt{-1}\, l\sqrt{-1}.$$

Nouimus autem huius poſtremi membri valorem eſſe $\frac{\pi}{2}$, vnde arcus circuli, cuius ſinus $= 2$, erit $\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\, l(2+\sqrt{3})$. Quamobrem vt huic arcui imaginario aequalem applicatam XY exhibeamus, in noſtra figura capiatur interuallum $AC = \frac{\pi}{2}$, ac deſcripto circulo radii $CM = c = 1$, quia c arbitrio noſtro relinquitur, poſito breuitatis gratia $l(2+\sqrt{3}) = b$ capiatur abſciſſa $AX = \sqrt{(1 + bb)}$, atque applicata imaginaria XY aequalis erit ipſi arcui quaeſito pariter imaginario, id quod eo magis notatu dignum videtur, quod iſte arcus eſt imaginarium tranſcendens.

§. 8. Primum igitur Theorema analyticum cuius demonſtratio planior, vel ſaltem magis directa, deſideratur, ſiquidem eius veritas quibusdam iam ſatis euicta videatur, hoc modo proponatur:

Theorema I.

Omnes plane quantitates imaginariae, quaecunque in calculo analytico occurrere poſſunt, ad hanc formam ſimpliciſſimam a + b$\sqrt{-1}$ *ita reuocari poſſunt, vt litterae* a *et* b *quan-*

quantitates reales denotent. Eius igitur demonstrationem sagacissimis Analystis imprimis commendare non dubito.

§. 9. Sequentia duo theoremata rectificationem linearum curuarum respiciunt, ideoque ad Geometriam sublimiorem sunt referenda. Cum enim iam pridem a celeb. *Hermanno* methodus geometrica sit reperta, innumerabiles curuas algebraicas inueniendi, quae vel sint rectificabiles, vel quarum rectificatio a data quacunque quadratura pendeat (quam methodum deinceps ad Analysin puram transtuli et plurimum locupletaui, ita vt peculiarem speciem Analyseos infinitorum constituere videatur); inde vtique infinitae curuae algebraicae exhiberi possunt, quarum rectificatio a quadratura circuli pendeat. Omnes autem, excepto circulo, ita comparatae deprehenduntur, vt earum arcus aggregato cuipiam ex quantitate algebraica et arcu circulari aequentur, quantitatem autem illam algebraicam nullo modo ad nihilum redigere liceat; vnde sequens theorema tanquam verum proponere non dubito, etiamsi eius demonstrationem exhibere nondum potuerim.

Theorema II.

Praeter circulum nulla datur curua algebraica, cuius singuli arcus per arcus circulares simpliciter exprimi queant.

§. 10. Hoc theorema igitur eo redit, vt demonstretur, nullam aequationem algebraicam inter binas coordinatas orthogonales x et y exhiberi posse, vt formula integralis $\int \surd (dx^2 + dy^2)$ aequetur arcui cuipiam circulari, cuius sinus vel cosinus sit functio quaepiam ipsarum x et y, solo casu excepto quo aequatio inter x et y circulum indicat.

strationem sagacis-
bito.
ectificationem line-
eometriam subli-
pridem a celeb.
a, innumerabiles
l sint rectificabi-
unque quadratura
alysin puram trans-
rem speciem Ana-
de vtique infinitae
rum rectificatio a
n, excepto circulo,
n arcus aggregato
circulari aequentur,
modo ad nihi-
na tanquam verum
nstrationem exhibe-
algebraica, cuius
r exprimi queant.
redit, vt demon-
inter binas coordi-
, vt formula inte-
cuipiam circulari,
am ipsarum x et y,
et y circulum in-
dicat.

dicat. Quod quo clarius intelligatur denotet ϕ angulum seu arcum quemcunque indefinitum in circulo cuius radius $=1$, ac ponatur $\int \surd (dx^2 + dy^2) = a\phi$, ideoque $dx^2 + dy^2 = aad\phi^2$, fiatque $dx = apd\phi$ et $dy = aqd\phi$, atque necesse est vt sit $pp + qq = 1$. Praeterea vero ambas formulas $apd\phi$ et $aqd\phi$ ita integrabiles esse oportet, vt earum integralia per solos sinus vel cosinus anguli ϕ exprimi queant, quod dico nullo modo fieri posse, nisi curua fuerit ipse circulus.

§. 11. His autem conditionibus manifesto satisfiet si capiatur $p = \sin. (n\phi + \alpha)$ et $q = \cos. (n\phi + \alpha)$, denotante α angulum quemcunque constantem, n vero numerum rationalem quemcunque; tum enim vtique erit $pp + qq = 1$, et cum sit $dx = ad\phi \sin. (n\phi + \alpha)$ et $dy = ad\phi \cos. (n\phi + \alpha)$, hinc integrando elicitur $x = b - \frac{a}{n} \cos. (n\phi + \alpha)$ et $y = c + \frac{a}{n} \sin. (n\phi + \alpha)$, quae formulae, ob litteras α et n arbitrarias, innumeras curuas inuoluere videntur. Verum cum inde fiat $b - x = \frac{a}{n} \cos. (n\phi + \alpha)$ et $y - c = \frac{a}{n} \sin. (n\phi + \alpha)$, semper erit $(b-x)^2 + (y-c)^2 = \frac{aa}{nn}$, quae aequatio manifesto semper est pro circulo. Demonstrandum igitur est, pro conditionibus ante praescriptis loco litterarum p et q alios valores accipi non posse, qui iis satisfaciant.

§. 12. Cum autem nullum vestigium appareat ad talem demonstrationem perueniendi, videamus an per demonstrationem ad absurdum quicquam lucrari possit. Assumamus igitur praeter circulum aliam dari curuam algebraicam, cuius omnes arcus per arcus circulares metiri liceat. Sit igitur $AYym$ talis curua algebraica, cuius quilibet arcus AY ab initio A captus aequetur arcui cuipiam circulari, cuius sinus sit functio quaecunque algebraica abscissae AX, Tab. I. Fig. 5.

 ac

ac simili modo alius arcus quicunque A y etiam aequabitur arcui circulari, cuius sinus erit similis functio abscissae A x; hincque manifestum est, etiam differentiae horum arcuum, Y y, aequalem arcum circularem assignari posse, ita vt huius curuae omnes plane portiones Y y per simplices arcus circulares exprimi queant, sicque demonstrari oportebit, talem curuam algebraicam nullo prorsus modo exhiberi posse.

Tab. II. Fig. 6. §. 13. Primo hic autem obseruo, si daretur talis curua, ea certe non in infinitum extendi posse, id quod ita ostendo: Sit A $bcde$ etc. talis curua cum axe ABCDE in infinitum excurrens, in eaque accipiantur portiones aequales A b, bc, cd, de etc. quarum mensura sit quadrans circuli, atque in applicatis B b, C c, D d etc. abscindantur portiones B β, C γ, D δ, etc. quae sint finibus arcuum A b, A c, A d etc. aequales, id quod etiam in singulis applicatis intermediis fieri intelligatur; ac manifestum est, singula haec puncta β, γ, δ etc. geometrice seu algebraice assignari posse, ita vt curua per omnia haec puncta ducta A $\beta\gamma\delta\varepsilon$ etc. futura esset algebraica. Quoniam vero ea habebit infinitas portiones alternatim supra et infra axem existentes, ea ab axe ipso in infinitis punctis interfecaretur, id quod in nulla curua algebraica locum habere potest. Vnde luculenter sequitur, talem curuam A bcd in infinitum extensam certe non dari posse; atque hinc iam est euictum, si darentur praeter circulum eiusmodi curuae algebraicae, quarum singulae portiones per arcus circulares mensurari queant, necessario eas in se redeuntes esse debere, tum enim absurditas modo ostensa cessare posset, ita vt simili modo nihil absurdi inde inferri possit.

§. 14.

. y etiam aequabi-
ilis functio abscissae
erentiae horum ar-
assignari posse, ita
Y y per simplices
demonstrari oporte-
orsus modo exhi-

), si daretur talis
posse, id quod ita
um axe ABCDE
tur portiones aequa-
nsura sit quadrans
d etc. abscindantur
int finibus arcuum
tiam in singulis ap-
manifestum est, sin-
rice seu algebraice
haec puncta ducta
Quoniam vero ea
ra et infra axem
ctis interfecaretur, id
abere potest. Vnde
d in infinitum exten-
iam est euictum, si
ae algebraicae, qua-
lares mensurari que-
ere, tum enim absur-
vt simili modo nihil

§. 14.

§. 14. Sit igitur ABPQRS talis curua algebraica in se rediens, cuius omnes plane portiones per arcus circulares metiri liceat, quae tamen non sit circulus; tum sumta quacunque portione AB, a quouis alio puncto P abscindi poterit portio PQ illi aequalis, quae tamen illi maxime erit dissimilis, quandoquidem curuamen, seu radius osculi, maxime differre potest in his portionibus, quales sunt AB, PQ, RS etc. Quanquam autem in hoc equidem nullam contradictionem ostendere possum, tamen demonstrari potest, si vnica talis curua daretur, ex ea infinitas alias inter se diuersas geometrice construi posse. Tum vero ex qualibet earum porro simili modo infinitas alias, ex earumque denuo qualibet infinitas alias, sicque in infinitum; ita vt multitudo talium curuarum satisfacientium foret non solum numerus infinitus, sed adeo potestas infinitesima infiniti. Quare cum adhuc nullo modo talis curua reperiri potuerit, nonne hinc iure concludere licebit, nullas plane dari huiusmodi curuas algebraicas? Tab. II. Fig. 7.

§. 15. Ad hoc autem demonstrandum, insignes illae proprietates, quas Vir celeberr. *Ioannes Bernoulli* de motu reptorio et curuis aequae amplis in lucem produxit, summo cum successu in vsum vocari poterunt. Fundamentum autem huius eximiae methodi in hoc consistit. Si habeantur duae curuae vtcunque diuersae aym et $a'y'm'$, in iisque capiantur arcus ay et $a'y'$ aeque ampli, ita vt ductis ad puncta y et y' normalibus yr et $y'r'$, quae axibus ab et $a'b'$ in r et r' occurrant, qui ipsi ad curuas normales supponuntur in a et a', anguli ary et $a'r'y'$ fiant inter se aequales, ex quo hi arcus ay et $a'y'$ aeque ampli sunt appellati; quibus positis, si hinc noua curua AYM Tab. II. Fig. 8 et 9.

L 3 ita

ita construatur, vt sumta abscissa $AX = m.\, ax + n\, a'x'$, constituatur applicata $XY = m.\, xy + n.\, x'y'$, tum etiam huius nouae curuae AM arcus AY erit $= m.\, ay + n.\, a'y'$. Quod si enim pro curuis datis ponamus abscissas $ax = x$ et $a'x' = x'$, applicatas vero $xy = y$ et $x'y' = y'$, erit subnormalis $xr = \frac{y\,dy}{dx}$ et $x'r' = \frac{y'dy'}{dx'}$, hincque tang. $ary = \frac{dx}{dy}$ et tang. $a'r'y' = \frac{dx'}{dy'}$. Quare cum hi anguli sint aequales, posito $\frac{dy}{dx} = p$, seu $dy = p\,dx$, erit etiam $\frac{dy'}{dx'} = p$, siue $dy' = p\,dx'$. Hinc igitur colligitur arcus $ay = \int dx\sqrt{(1+pp)}$ et arcus $a'y' = \int dx'\sqrt{(1+pp)}$. Iam in curua inde constructa AY erit abscissa $AX = X = mx + nx'$, applicata vero $XY = Y = my + ny'$, hincque $dX = m\,dx + n\,dx'$ et $dY = m\,dy + n\,dy' = p(m\,dx + n\,dx')$, ideoque erit $dY = p\,dX$ et arcus AY aeque amplus erit ac duo praecedentes ay et $a'y'$; hinc ergo huius nouae curuae arcus erit

$$AY = \int dX\sqrt{(1+pp)} = m\int dx\sqrt{(1+pp)} + n\int dx'\sqrt{(1+pp)},$$

vnde manifestum est fore arcum $AY = m.\, ay + n.\, a'y'$.

Tab. II. Fig. 10.

§. 16. Hoc iam fundamento stabilito, si ambae curuae ay et $a'y'$ ita fuerint comparatae, vt arcus ay et $a'y'$ per arcus circulares mensurari queant, tum etiam curuae inde descriptae arcus AY etiam per arcum circularem mensurabitur, si modo litterae m et n denotent numeros rationales quoscunque. Ex quo iam intelligitur, ex illis curuis datis ay et $a'y'$ innumerabiles curuas AY eiusdem proprietatis construi posse. Hic autem obseruandum est, si ambae curuae datae ay et $a'y'$ fuerint circuli, curuam illam descriptam AY fore quoque circulum, cuius radius $RA = RY$ erit $= m.\, ra + n.\, r'a'$, ita vt hoc solo casu nulla noua curua resultet, id quod per se est perspicuum. Statim autem ac vel altera earum curuarum ay et $a'y'$, vel etiam ambae non

$a\,x + n\,a'x'$, con- , tum etiam huius $a\,y + n.\,a'y'$. Quod bscissas $ax = x$ et $a'y' = y'$, erit subcque tang. $ary = \frac{dx}{dy}$ li sint aequales, po- $= p$, siue $dy' = p\,dx'$. $\sqrt{(1+pp)}$ et ar- urua inde constructa $+ n\,x'$, applicata $X = m\,dx + n\,dx'$ $d\,x'$), ideoque erit erit ac duo prae- curuae arcus erit $+ n\int dx'\sqrt{(1+pp)}$, $= m.\,ay + n.\,a'y'$.

bilito, si ambae cur- t arcus ay et $a'y'$ m etiam curuae in- circularem men- nt numeros rationa- ex illis curuis datis isdem proprietatis est, si ambae cur- curuam illam de- is radius $RA = RY$ asu nulla noua cur- n. Statim autem ac , vel etiam ambae non

non fuerint circuli, tum quoque curua descripta AY certe non erit circulus, atque adeo in infinitum variari poterit, prouti numeris m et n alii atque alii valores tribuantur.

§. 17. Hinc ergo si pro curua ay accipiatur curua illa supra memorata, cuius scilicet singulos arcus per circulares mensurare posse assumimus, eamque a puncto quocunque A incipientem; pro altera autem $a'y'$ circulum quemcunque, constructio modo tradita nobis suppeditabit innumerabiles curuas AY eadem indole praeditas, vt arcui AY aequalis arcus circularis assignari queat. Tum vero etiam, sumta curua ay aequali, ramo figurae illius a puncto A extenso, pro curua vero $a'y'$ alius quicunque eiusdem curvae ramus ab alio puncto P protensus, hinc etiam innumerabiles aliae nouae curuae AY describi poterunt, quae vtique omnes quoque erunt algebraicae; vnde manifestum est, si harum nouarum curuarum rami in locum alterius curuae datae ay vel etiam vtriusque substituantur; tum hoc modo infinita alia curuarum genera construi posse, quam multiplicationem adeo in infinitum augere licebit. Quare cum nulla adhuc eiusmodi curua a circulo diuersa erui potuerit, maxime verisimile est, ac fortasse tanquam rigide demonstratum spectari potest: nullam prorsus in rerum natura dari huiusmodi curuam algebraicam a circulo diuersam.

Tab. II. Fig. 11.

§. 18. Quod hactenus de circulo est allatum etiam ad logarithmos extendi potest, quippe quos cum arcubus circularibus imaginariis comparare licet, vnde sequens theorema Geometris tanquam aeque certum et memoratu dignum ac praecedens commendare sustineo.

Theo-

Theorema III.

Nulla prorsus datur curua algebraica, cuius singuli arcus simpliciter per logarithmos exprimi queant. Ita vt hoc theorema nullam prorsus exceptionem, quemadmodum praecedens, postulet.

§. 19. Notum est rectificationem parabolae a logarithmis pendere, verum singuli eius arcus non per simplices logarithmos, sed per aggregatum ex logarithmo et quapiam quantitate algebraica exprimuntur, ita vt hinc nulla exceptio theoremati inferatur. Hic autem primo obseruandum est, vt ante, si talis daretur curua algebraica AYy, cuius omnes arcus in puncto A terminati per logarithmos assignari possent, vt verbi gratia esset $AY = a\,l\,P$ et $Ay = a\,l\,p$, ita vt P et p essent certae functiones algebraicae ambarum coordinatarum AX, XY et Ax, xy, tum etiam differentiam horum arcuum logarithmo exprimi posse, quandoquidem foret $Yy = a\,l\frac{p}{P}$. Hinc ergo posita abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$ demonstrandam est, nullam dari aequationem algebraicam inter x et y, vt inde fiat $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = a\,l\,v$, denotante v functionem quampiam algebraicam ipsarum x et y; vnde si ponamus $dx = \frac{a\,p\,dv}{v}$ et $dy = \frac{a\,q\,dv}{v}$, necesse est vt fiat $pp + qq = 1$. Praeterea vero requiritur vt ambae formulae $\int\frac{p\,dv}{v}$ et $\int\frac{q\,dv}{v}$ fiant algebraice integrabiles, cuius ergo impossibilitatem demonstrari oportet.

Tab. I. Fig. 5.

§. 20. Quemadmodum mihi pro praecedente theoremate licuit ostendere, nullam dari curuam in infinitum extensam illi satisfacientem, ita hic simili modo ostendi potest, nullam dari curuam in se redeuntem algebraicam, quae huic theoremati conueniat. Sit enim curua AYBDA curua in se

ius singuli
Ita vt hoc
odum prac-
bolae a lo-
per sim-
mo et qua-
hinc nulla
obseruan-
AYy, cuius
thmos assi-
$Ay = a\,l\,p$,
ambarum
m differen-
ndoquidem
$AX = x$ et
ri aequatio-
$+dy^2) = a\,l\,v$,
ipsarum x
, necesse
quiritur vt
tegrabiles,
dente theo-
n infinitum
tendi potest,
, quae huic
A curua in
se

se rediens, cuius omnes arcus AY per logarithmos exhiberi queant, ita vt in applicata XY, si opus est producta, algebraice assignari possit punctum Z, vt arcus AY fiat $= \log. XZ$; tum ergo, quia curua in se est rediens et arcui AYBDAY eaedem coordinatae AX et XY conueniunt, aliud quoque dabitur punctum Z, cuius logarithmus huic arcui aequetur. Ac si circumferentia totius curuae ponatur $= c$, infinita talia spatia XZ, XZ', XZ'', XZ''', etc. assignari poterunt, quorum logarithmi aequentur arcubus AY, $AY + c$, $AY + 2c$, $AY + 3c$, et in genere $AY + nc$, denotante n numerum integrum quemcunque tam negatiuum quam positiuum; atque quia omnia haec puncta simili formula algebraica continebuntur, omnia quoque in eadem curua algebraica existerent, quae ergo a singulis applicatis XY productis in infinitis punctis secaretur, id quod naturae curuarum algebraicarum aduersatur.

§. 21. Quod si ergo daretur talis curua, cuius singulos arcus logarithmis metiri liceret, ea certe in infinitum excurreret. Iam vero ex vnica tali curua, ope propositionis fundamentalis, circa curuas aeque amplas supra allatae, pari modo, quo ibi processimus, infinities-infinita noua genera talium curuarum exhiberi possent; vnde cum nulla adhuc talis curua erui potuerit, si non prorsus certum, saltem maxime verisimile est, nullas plane dari eiusmodi curuas algebraicas.

§. 22. Ceterum si modo theorema secundum firmiter fuerit demonstratum, etiam huius demonstratio pro confecta esset habenda. Cum enim elementum arcus circuli, cuius radius $= a$ et sinus $= x$, sit $\frac{a\,dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, si radium ita imaginarium concipiamus, vt sit $a = c\sqrt{-1}$, elementum arcus ous fiet $\frac{cdx\sqrt{-1}}{\sqrt{(-cc-xx)}} = -\frac{cdx}{\sqrt{(cc+xx)}}$, quod ergo erit reale, etiamsi radius circuli sit imaginarius, eiusque adeo integrale erit $c\,l\,\frac{\sqrt{(cc+xx)}-x)}{c}$, vbi maxime mirum videri potest, quod arcus circuli imaginarii nihilo minus sint reales et quidem per logarithmos assignabiles. Atque hinc iam tuto concludere poterimus, quemadmodum praeter circulum nullae aliae dantur lineae curuae, cuius singulos arcus per circulares metiri liceat, ita etiam praeter circulum imaginarium nullas dari curuas algebraicas, quarum singulos arcus per logarithmos metiri liceat. Quoniam autem circulus imaginarius plane existere nequit, prorsus nullae curuae algebraicae exhiberi posse sunt censendae, quarum singulos arcus per logarithmos exprimere liceat.

DE

it reale, etiamsi
integrale erit
potest, quod
reales et qui-
iam tuto con-
circulum nullae
cus per circula-
imaginarium nul-
arcus per loga-
ulus imaginarius
algebraicae ex-
s arcus per lo-

DE

DE RELATIONE
INTER TERNAS PLVRESVE
QVANTITATES
INSTITVENDA.

§. 1.

Propositis duabus quantitatibus A et B, earum relatio, seu ratio definitur, dum quaeruntur duo numeri integri α et β, iique minimi, vt fiat $\alpha A = \beta B$; vnde si quantitates A et B fuerint inter se commensurabiles, istos numeros α et β semper accurate assignare licebit; sin autem sint incommensurabiles, numeros α et β ita dare licebit, vt discrimen inter formulas αA et βB sit minimum, vel ita paruum, vt propius ad aequalitatem inter has formulas αA et βB accedi nequeat, nisi pro α et β maiores numeri adhibeantur. Hocque modi solui solet problema olim a Wallisio propositum, quo, propositis duobus numeris quantumuis magnis A et B, rationes in minoribus numeris requiruntur, qui tam exacte eorum rationem exprimant, quam fieri potest numeris non maioribus adhibendis.

§. 2. Simili modo si tres proponantur quantitates A, B et C, reperiri poterunt tres numeri integri α, β et γ,

vt