



1785

Considerationes super theoremate Fermatiano de resolutione numerorum in numeros polygonales

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Considerationes super theoremate Fermatiano de resolutione numerorum in numeros polygonales" (1785). *Euler Archive - All Works*. 586.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/586>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



CONSIDERATIONES

SUPER

THEOREMATE FERMATIANO

DE RESOLUTIONE NUMERORVM IN NUMEROS
POLYGONALES.

§. I.

Hoc theorema *Fermatianum* in se complectitur sequentes
assertiones numero infinitas :

- I. Omnem numerum esse summam trium trigonalium vel pauciorum.
 - II. Omnem numerum esse summam quatuor tetragonalium seu quadratorum, vel pauciorum.
 - III. Omnem numerum esse summam quinque pentagonalium, vel pauciorum.
 - IV. Omnem numerum esse summam, sex hexagonalium; vel pauciorum.
 - V. Omnem numerum esse summam septem heptagonalium, vel pauciorum.
- etc. etc.

A 2

Quorum

Quorum theorematum cum *Fermatius* assereret, demonstrationem a se esse inuentam, dubitari certe nequit, eius demonstrationem certissimis principis fuisse innixam; ex quo eo magis dolendum est, eam post eius obitum proflus perisse, vt nullum plane vestigium reperiri poterit, cum sine dubio plerique Geometrae in his demonstrationibus inuestigandis frustra desudauerint. Hinc quidem excipienda est secunda assertio de resolutione numerorum in quatuor quadrata, cuius perfecta demonstratio ab Ingeniosissimo *La Grange* in lucem est protraxta, quae autem ex eiusmodi principis est deducta, vt inde nullum plane subsidium ad reliqua demonstranda expectari possit.

§. 2. Ingens igitur discrimen inter resolutionem in quadrata et reliquos numeros polygonales intercedere est censendum, quod potissimum in hoc consistit, quod resolutio in quaterna quadrata ad omnes plane numeros, tam fractos quam integros se extendat, cum resolutio in alios polygonales tantum ad numeros integros restringatur, atque adeo non nisi sub certa limitatione veritati sit consentanea. Resolutio enim in ternos trigonales manifeste tantum ad numeros integros adstringitur, cum infinitae deuntur fractiones, quas nullo modo in ternas partes, in formula $\frac{x^2+y^2+z^2}{3}$ contentas, resolvere licet; veluti si pro fractione $\frac{1}{3}$ statuere vellemus

$$\frac{1}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

multiplicando per 8 deberet esse

$$4 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

hincque tribus unitatibus additis fieret

$$7 = (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2$$

Demon-

Dei sum tior me sibi tag me ros ten in num Pei 2 vn. Ci qu mi at ni ta p q

demon-
quit, eius
m; ex quo
proflus pe-
ri, cum sine
us inuesti-
ipienda est
r quadrata,
Grange in
incipis est
aliqua de-

itionem in
cedere est
quod reso-
neros tam
o in alios
gar, at
e consenta-
so tantum
ae deuntur
in formula
tione $\frac{1}{3}$ sta-

$$+ 4z^2,$$

$$1)^2$$

Demon-

Demonstratum autem est, numerum 7 nullo modo esse posse summam trium quadratorum. Quocirca si quis demonstrationem huius partis ita intrinsece voluerit, vt, proposito numero quocunque N, hanc aequationem:

$$N = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} + \frac{2y^2+z^2}{2} + \frac{2x^2+y^2}{2}$$

sibi resolvendam proponeret, oleum atque operam perdidit.

§. 3. Porro vero etiam resolutio in quinque pentagonales ad numeros integros adstringitur, sed longe alio modo atque in trigonalibus visu venit. Nam si inter numeros pentagonales etiam fractiones in formula $\frac{1+x^2}{5}$ contentas admittere velimus, tum omnes plane numeros adeo in quatuor pentagonales discernere liceret. Proposito enim numero quocunque N si statuerimus

$$N = \frac{1+x^2}{5} + \frac{12y^2+z^2}{2} + \frac{12x^2-y^2}{2} + \frac{3y^2-z^2}{2}$$

per 24 multiplicando fiet

$$24N = 36x^2 - 12x + 36yy - 12y + 36z^2 - 12z + 36yy - 12y$$

vide quatuor unitatibus additis fiet

$$24N + 4 = (6x-1)^2 + (6y-1)^2 + (6z-1)^2 + (6y-1)^2$$

Cum igitur numerus 24N + 4 certo sit summa quatuor quadratorum, quae sit a a + b b + c c + d d, hinc reperiemus

$$x = \frac{a+1}{6}, y = \frac{b+1}{6}, z = \frac{c+1}{6}, v = \frac{d+1}{6}$$

atque horum radicum numeri pentagonales iunctim summi numero proposito N aequabuntur. Nihilominus ve:9 minus si tantum numeros integros admittamus, vt *Fermatius* manifeste postulat, vique dantur eiusmodi numeri, quos in pauciores quam quinque pentagonales nequaquam resolvere licet.

§ 4. Praeterea vero, etiam si hinc fractiones excludamus et tantum numeros integros admittere velimus, tamen novam limitationem adiciere, atque ex ordine pentagonalium omnes eos, quorum radices sunt numeri negativi, excludere debemus. Cum enim formula generalis numerorum pentagonalium $\frac{x(x-1)}{2}$ pro radicibus x negativae sumptis praebet hos numeros: 2, 7, 15, 26, 40, etc. si etiam hos admittere vellemus, non amplius quinque, sed tantum tres numeri pentagonales sufficerent omnibus plane numeris producendis, atque talis genita limitatio multo magis pro sequentibus numeris polygonalibus est necessaria, ut theorema *Fermatiana* veritati sine contentanea, quae limitatio sine dubio in causa est, quod nulli adhuc Geometrae post *Fermatium* ad demonstrationem horum casuum penetrare liceret.

§ 5. Cum igitur in demonstrationibus, quae desiderantur, harum restrictionum ratio necessario sit habenda, ipsa Theorema *Fermatiana* sub alia forma representemus, quae istas limitationes iam in se contineat, quod commodissime sequenti modo fieri posse videtur.

Pro resolutione in numeros trigonales.

§ 6. Consideretur series potestatum
 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47} + x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58} + x^{59} + x^{60} + x^{61} + x^{62} + x^{63} + x^{64} + x^{65} + x^{66} + x^{67} + x^{68} + x^{69} + x^{70} + x^{71} + x^{72} + x^{73} + x^{74} + x^{75} + x^{76} + x^{77} + x^{78} + x^{79} + x^{80} + x^{81} + x^{82} + x^{83} + x^{84} + x^{85} + x^{86} + x^{87} + x^{88} + x^{89} + x^{90} + x^{91} + x^{92} + x^{93} + x^{94} + x^{95} + x^{96} + x^{97} + x^{98} + x^{99} + x^{100}$
 in qua potestates ipsius x progrediuntur secundum ipsos numeros trigonales

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc.
 ac primo manifestum est, si huius seriei quadratum capiatur, alias potestates ipsius x occurrere non posse, nisi quarum exponentes sint summae duorum numerorum trigonalium. Eodem

Eodem modo intelligitur, si eiusdem seriei capiatur cubus, in eo alias potestates non occurrere, nisi quarum exponentes sint summae trium numerorum trigonalium. Quocirca primum theorema *Fermatii* hinc reduciatur, ut si pro cubo assumptae seriei sumatur haec series per omnes potestates ipsius x ascendens:

$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + \text{etc.}$
 demonstretur in hac serie nullum plane coefficientem nihil fore aequalem. Ex ipsa autem formatione manifestum est, nullum horum coefficientium fieri posse negativum.

Pro resolutione in numeros tetragonales, seu quadratos.

§ 7. Hic consideretur ista series potestatum:

$P = 1 + x + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{20} + x^{22} + x^{24} + x^{26} + x^{28} + x^{30} + x^{32} + x^{34} + x^{36} + x^{38} + x^{40} + x^{42} + x^{44} + x^{46} + x^{48} + x^{50} + x^{52} + x^{54} + x^{56} + x^{58} + x^{60} + x^{62} + x^{64} + x^{66} + x^{68} + x^{70} + x^{72} + x^{74} + x^{76} + x^{78} + x^{80} + x^{82} + x^{84} + x^{86} + x^{88} + x^{90} + x^{92} + x^{94} + x^{96} + x^{98} + x^{100}$
 cuius biquadratum P^2 , si evolvatur, omnes complectetur potestates ipsius x , quarum exponentes sunt summae quatuor quadratorum; atque adeo cuiusque coefficientis ostendet, quod variis modis exponentis ipsius x in quatuor quadrata distribui queat; quare pro hoc casu demonstrari oportet, si potest

$P^2 = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + \text{etc.}$
 quae scilicet series per omnes potestates ipsius x ascendat, nullum coefficientium A, B, C, D, E esse evaniturum. Hoc enim si fuerit demonstratum, simul erit evidens, omnes plane numeros in quatuor quadrata resoluti posse.

Pro

Excludamus, tamen pentagonalium, excludere potestates praeter hos admittentes numeris producendis, sequentibus *Fermatiana* in dubio in demonstratione horum casuum penetrare liceret.

capitur, quarum potestates ipsius x occurrere non posse, nisi quarum exponentes sint summae duorum numerorum trigonalium. Eodem

Pro resolutione in numeros pentagonales.

§ 8. Consideretur series potestatum ipsius x, quarum exponentes secundum numeros pentagonales ascendunt, quae sit

P = 1 + x + x^2 + x^5 + x^7 + x^12 + etc.

cuiusque evolvatur potestas quinta, quae sit

P^5 = 1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + E x^5 + etc.

per omnes plane potestates ipsius x ascendens, ac demonstrandum est, in hac serie nullum prorsus coefficientem reperiri, qui sit nihilo aequalis.

Pro resolutione in numeros polygonales quoscunque.

§ 9. Sit π numerus laterum polygonorum, et cum formula generalis istos numeros polygonales complectens sit = 1/2 (π - 2) x x - 1/2 (π - 4) x^2, postea scilicet residue = x, sint omnes numeri polygonales hinc ordine resulantes 0, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, etc. vbi quidem constat esse

α = 1, β = π, γ = 3π - 3, δ = 6π - 8, ε = 10π - 15, ζ = 15π - 24;

rum vero confiderentur series infinita

P = 1 + x^α + x^β + x^γ + x^δ + x^ε + x^ζ + etc.

Iniisque serie sumatur potestas exponentis = π, quae sit

P^π = 1 + A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + E x^5 + etc.

per omnes plane potestates ipsius x ascendens, ac demonstrandum erit, in hac serie nullum occurrere coefficientem nihilo aequalis; vnde patet, si modo hoc demonstrari in genere possit, simul omnia theoremata Fermatiana fore demonstrata.

nales.

derit, si evolutioem istius potestatis P^π in genere docuerit, simulque ostendero, quomodo omnes coefficientes seriei evoluae a praecedentibus pendant, ex istisque determinentur.

Hunc in finem coefficientes singularium potestatum ipsius x idoneis characteribus designemus, sicut potestatis x^r coefficientem [n]; quandoquidem hoc modo seriem perspicitur, ad quamnam potestatem quisque coefficientis referatur. Nunc igitur investigemus, quomodo quilibet coefficientis [n] ex praecedentibus, qui sunt [n-1], [n-2], [n-3], [n-4], etc. determinentur. Hoc enim modo iudicium facillime instituetur, num quis coefficientis nihilo aequalis fieri possit, id quod forsitan eo facilius ostendi poterit, cum certum sit, nullum coefficientem fieri posse negativum.

talibus

um, et cum tales complerentur residue constat esse

- 24;

pro

qua

ner

per

§ 10. In hoc igitur negotio non parum fortasse proderit, si evolutioem istius potestatis P^π in genere docuerit, simulque ostendero, quomodo omnes coefficientes seriei evoluae a praecedentibus pendant, ex istisque determinentur. Hunc in finem coefficientes singularium potestatum ipsius x idoneis characteribus designemus, sicut potestatis x^r coefficientem [n]; quandoquidem hoc modo seriem perspicitur, ad quamnam potestatem quisque coefficientis referatur. Nunc igitur investigemus, quomodo quilibet coefficientis [n] ex praecedentibus, qui sunt [n-1], [n-2], [n-3], [n-4], etc. determinentur. Hoc enim modo iudicium facillime instituetur, num quis coefficientis nihilo aequalis fieri possit, id quod forsitan eo facilius ostendi poterit, cum certum sit, nullum coefficientem fieri posse negativum.

§ 11. Cum igitur posito

P = 1 + x^α + x^β + x^γ + x^δ + x^ε + x^ζ + etc.

quateni debeat istius seriei potestas exponentis π, hauriamus S = P^π, eritque finis logarithmis 1/S = π/P, hincque differentiando dS/dx = -πx/dP, vnde formetur ista aequatio:

P * dS/dx = -πx/dP

pro qua ergo erit

dS/dx = α x^α + β x^β + γ x^γ + δ x^δ + ε x^ε + ζ x^ζ + etc.

quae ergo series per λ S multiplicata idem productum generare debet, quod oritur, si ipsa series

P = 1 + x^α + x^β + x^γ + x^δ + x^ε + x^ζ + etc.

per formulam dS/dx multiplicetur.

§. 12. Ponatur igitur secundum characteres ante descriptos:

$$R = 1 + [1]x + [2]x^2 + [3]x^3 + [4]x^4 + \text{etc.}$$

Vbi notetur, primum terminum x aequivalere termino [0], unde fiet

$$\frac{x^2 d^5}{dx^2} = 1 [1]x^1 + 2 [2]x^2 + 3 [3]x^3 + 4 [4]x^4 + \text{etc.}$$

hisque feriebatur confectus perpendamus, quot modis producta potestas x^n in vitroque producto P = \frac{x^2 d^5}{dx^2} et \pi \frac{x^2 d^p}{dx^2} occurrat.

§. 13. Cum igitur ambo multiplicatores P et \frac{x^2 d^p}{dx^2} alias potestates ipsius x non contineant, nisi quarum exponentes sunt \alpha, \beta, \gamma, \delta, etc. manifestum est, feriet S terminum [n] x^n ex aliis terminis praecedentibus resultare non posse, praeter hos:

$$[n - \alpha] x^\alpha, [n - \beta] x^\beta, [n - \gamma] x^\gamma,$$

quamobrem omniss reliquis terminis consideremus tantum istos, ita vt habeamus:

$$S = [n] x^n + [n - \alpha] x^\alpha + \dots$$

$$+ [n - \beta] x^\beta + \dots + [n - \gamma] x^\gamma + \dots \text{ etc.}$$

Vbi per se manifestum est, hos terminos tantum eo vsque continari debere, quoad exponentes [n - \alpha], [n - \beta], [n - \gamma], etc. non sunt negativi. Multiplicetur igitur ista forma per

$$\frac{x^2 d^p}{dx^2} = \pi \alpha x^\alpha + \pi \beta x^\beta + \pi \gamma x^\gamma + \pi \delta x^\delta + \text{etc}$$

et productum sequentes terminos potestatem x^n continentes suppediabit:

$$\pi \alpha [n - \alpha] x^n + \pi \beta [n - \beta] x^n + \pi \gamma [n - \gamma] x^n + \text{etc.}$$

§. 14.

terres ante

etc.

mino [0],

q + etc.

odis pro-

P et \frac{x^2 d^p}{dx^2}

n expo-

tantum

... etc.

o vsque

- \gamma], etc.

per

+ etc.

identies

+ etc.

§. 14.

§. 14. Deinde isdem terminis retentis, erit

$$\frac{x^2 d^5}{dx^2} = n [n] x^n + (n - \alpha) [n - \alpha] x^{n - \alpha} + (n - \beta) [n - \beta] x^{n - \beta} + \dots + (n - \gamma) [n - \gamma] x^{n - \gamma} + \dots + (n - \delta) [n - \delta] x^{n - \delta} + \dots + \text{etc.}$$

quae forma ducta in feriem

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \text{etc.}$$

sequentes praebit terminos potestatem x^n continentes:

$$n [n] x^n + (n - \alpha) [n - \alpha] x^\alpha + (n - \beta) [n - \beta] x^\beta + (n - \gamma) [n - \gamma] x^\gamma + \text{etc.}$$

Quamobrem cum hoc productum priori debeat esse aequale, obtinebimus sequentem aequationem:

$$n [n] + (n - \alpha) [n - \alpha] + (n - \beta) [n - \beta] + (n - \gamma) [n - \gamma] + \text{etc.} = \pi \alpha [n - \alpha] + \pi \beta [n - \beta] + \pi \gamma [n - \gamma] + \pi \delta [n - \delta] + \text{etc.}$$

§. 15. Hinc igitur patet, coefficientem [n] ab iis tantum praecedentium, quorum characteres sunt

$$[n - \alpha], [n - \beta], [n - \gamma], \text{ etc.}$$

pendere, ita vt sit

$$n [n] = \pi \alpha [n - \alpha] + \pi \beta [n - \beta] + \pi \gamma [n - \gamma] + \dots \text{ etc.}$$

Vbi quidem primo non est memendum, ne ob terminos negatios vniquam valor ipsius [n] prodiciatur sit negativus, quandoquidem hoc naturae rei repugnaret; et quia valor ipsius [n] certe est numerus integer, evidens est omnes terminos in dextro membro iunctim sumtos semper valorem praebere debere vel n, vel 2n, vel 3n, vel 4n, vel etc. nisi forte inde prodeat o, quod igitur demonstrandum est nunquam eueniri posse, si quidem theorema *Fermatianum* fuerit veritati condentaneum, atque licetiae \alpha, \beta, \gamma, \delta, etc. deno-

denotent ordine omnes numeros polygonales pro numero laterum = π .

§. 16. Manifestum autem est, hanc determinationem coefficientis [n] maxime esse generalem, neque tantum ad numeros polygonales extendi. Quaecunque enim series numerorum pro literis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. accipiantur, aequatio inventa semper habebit locum, et coefficientis [n] indicabit quae varis modis numerus n possit esse summa π terminorum istius seriei:

$$0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \text{ etc. ,}$$

hincque numerus π ita definiti poterit, ut nullus huiusmodi coefficientis [n] prodeat nihil aequalis. Evidens enim est numerum π semper tantum accipi posse, ut dextrum membrum nostrae aequationis nunquam prodeat negativum. Quare autem semper solet minimus valor, qui pro π assumitur hoc sit praestaturus; unde patet hanc methodum ad infinitas alias quaestiones huius generis pari fortasse successu applicari posse.

§. 17. Caeterum in genere notasse iuvabit, nisi fuerit $\alpha = 1$, semper fore [n] = 0, quamdiu fuerit $n < \alpha$; unde in omnibus huiusmodi quaestionibus necesse est ut sit $\alpha = 1$, quem quidem terminum semper praecedere solet terminus = 0, siquidem series pro P assumta ab unitate incipiat.

Applicatio ad numeros trigonales.

§. 18. Quo natura aequationis inventae clarius percipiatur, eam ad numeros trigonales applicemus, pro quibus erit $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 6, \delta = 10, \epsilon = 15$, etc. cum vero, summo

pro numero

terminationem ut tantum ad in series numerum [n] indicabitur π terminorum

is huiusmodi ens enim est krum membrum. Quare π assumitur 1 ad infinitas alii applicari

si, nisi fuerit $< \alpha$; unde ut sit $\alpha = 1$, et terminus incipiat.

clarius percipiatur, summo pro quibus summo

summo exponente $\pi = 3$, nostra formula inventa hanc indiget formam:

$$n[n] = (4-n)[n-2] + (12-n)[n-3] + (24-n)[n-6] + (40-n)[n-10] + \text{etc.}$$

Hinc ergo, a numeris minimis incipiendo, sequentes nanciscemur reductiones:

- 1 [1] = 3 [0], ergo [1] = 3
- 2 [2] = 2 [1] = 6, ergo [2] = 3
- 3 [3] = 1 [2] + 9 [0] = 12, ergo [3] = 4
- 4 [4] = 0 [3] + 8 [1] = 24, ergo [4] = 6
- 5 [5] = -1 [4] + 7 [2] = 15, ergo [5] = 3
- 6 [6] = -2 [5] + 6 [3] + 18 [0] = 36, ergo [6] = 6
- 7 [7] = -3 [6] + 5 [4] + 17 [1] = 63, ergo [7] = 9
- 8 [8] = -4 [7] + 4 [5] + 16 [2] = 24, ergo [8] = 3
- 9 [9] = -5 [8] + 3 [6] + 15 [3] = 63, ergo [9] = 7
- 10 [10] = -6 [9] + 2 [7] + 14 [4] + 30 [0] = 90, ergo [10] = 9
- 11 [11] = -7 [10] + 1 [8] + 13 [5] + 29 [1] = 66, ergo [11] = 6
- 12 [12] = -8 [11] + 0 [9] + 12 [6] + 28 [2] = 108, ergo [12] = 9
- 13 [13] = -9 [12] - 1 [10] + 11 [7] + 27 [3] = 117, ergo [13] = 9
- 14 [14] = -10 [13] - 2 [11] + 10 [8] + 26 [4] = 84, ergo [14] = 6
- 15 [15] = -11 [14] - 3 [12] + 9 [9] + 25 [5] + 45 [0] = 90, ergo [15] = 6
- 16 [16] = -12 [15] - 4 [13] + 8 [10] + 24 [6] + 44 [1] = 240, ergo [16] = 15
- 17 [17] = -13 [16] - 5 [14] + 7 [11] + 23 [7] + 43 [2] = 153, ergo [17] = 9
- 18 [18] = -14 [17] - 6 [15] + 6 [12] + 22 [8] + 42 [3] = 126, ergo [18] = 7
- 19 [19] = -15 [18] - 7 [16] + 5 [13] + 21 [9] + 41 [4] = 228, ergo [19] = 12
- 20 [20] = -16 [19] - 8 [17] + 4 [14] + 20 [10] + 40 [5] = 60, ergo [20] = 3

B 3

Hinc

Hinc igitur patet, feriei $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14}$ cubum evolvi in hanc feriem:

$$1 + 3x^3 + 3x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 9x^7 + 3x^8 + 7x^9 + 9x^{10} + 6x^{11} + 9x^{12} + 9x^{13} + 6x^{14} + 6x^{15} + 15x^{16} + 9x^{17} + 7x^{18} + \text{etc.}$$

§. 19. In hac evolutione non inveniendum erat videre, quomodo priora membra negativa a sequentibus posituis semper superentur, atque excessus semper per numerum n divisibilis prodierit, id quod etiam perinde in forma generali necessario vili venire debet. Quod quo clarius in oculos incurrat, aequationem generalem sub hac forma exhibeamus:

$$n[n] = ((\pi + 1)\alpha - n)[n - \alpha] + ((\pi + 1)\beta - n)[n - \beta] + ((\pi + 1)\gamma - n)[n - \gamma] \text{ etc.}$$

vnde paribus negativis ad sinistram translatis erit

$$n[n] + [n - \alpha] + [n - \beta] + [n - \gamma] + [n - \delta] + \text{etc.} = (\pi + 1)(\alpha[n - \alpha] + \beta[n - \beta] + \gamma[n - \gamma] + \delta[n - \delta] + \text{etc.})$$

Hinc igitur intelligimus: primo summam omnium horum valorum $\alpha[n - \alpha] + \beta[n - \beta] + \gamma[n - \gamma] + \delta[n - \delta] + \text{etc.}$ semper fore divisibilem per numerum n , nisi forte $\pi + 1$ fuerit per n divisibile; deinde summam horum valorum

$$[n] + [n - \alpha] + [n - \beta] + [n - \gamma] + \text{etc.}$$

semper esse divisibilem per numerum $\pi + 1$, nisi forte ipse numerus n per eum divisionem admittat.

§. 20. Neque vero haec eximie proprietates tantum in numeris polygonalibus, quos hic positissimum contemplan-

$$x^{10} + x^{15} + \text{etc.} \\ - 6x^6 + 9x^7 \\ - 9x^{11} + 6x^{14}$$

dam erat videndum sequentibus semper per n dividemur. Quod quoniam sub hac

$$[n - n][n - \beta]$$

rit

$$[n] + \text{etc.} = -\delta + \text{etc.}$$

iam horum semper fore fuerit per n

etc.

n forte ipse

tres tantum conceptum

mur, locum habent, sed etiam generalissime observari debent, quaecumque numerorum series pro litteris α, β, γ , etc. assumantur, etiam si ea nulli certae legi fuerit adstricta. At vero haec ipsa circumstantia non multum pro scopo nostro polliceri videntur, quandoquidem theorematum *Fermatianum* de numerum veritatis confirmata censeri debent, quando pro litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ipsi numeri polygonales ordine scribuntur; ita ut, si eorum ordo tamillum perturbaretur, demonstratio etiam ipsa hinc petenda claudicare deberet; quocirca ad legitimam demonstrationem horum theorematum inveniendam necessarium opus erit, ut simul etiam ipsa lex progressionis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. in computum dicatur, id quod vtrum cum ista methodo commode coniungi queat, nec ne, non tam facile perspicitur. Inveniri tamen istae considerationes fortasse aliis aliquam lucem accendere poterunt, quo felicis ad has veritates penetrare valeant.