1785

De effectu frictionis in motu volutorio

Leonhard Euler

DE

EFFECTV FRICTIONIS
IN MOTV VOLVTORIO.

Auctore

L. EVLERO.

Quanquam hoc argumentum iam olim fusius pertractaui, vbi motum globi super plano siue voluentem, siue radentem, siue mixtum ex vtroque sum contemplatus: tamen invtile non erit, hoc argumentum methodo planiori et faciliori denuo euoluere, quo clarius Phaenomena talium motuum perspici queant. Inprimis autem hic etiam eiusmodi globos introducam, quorum centrum grauitatis extra centrum sphaericitatis cadat. Antequam autem has inuestigationes suscipiam, nonnulla de indole frictionis in genere praenotari conueniet.

Definitio.

§. 1. *Frictio* eſt vis, qua motui corporis ſuper alio incedentis ob attritum reſiſtitur, cuius indoles ad ſequentia capita reducitur:

I. Nullum eſt dubium, quin frictio potiſſimum pendeat a quantitate preſſionis, qua ambo corpora inuicem apprimuntur; et vulgo quidem frictio certae parti totius preſſionis aequalis aeſtimari ſolet.

II. Deinde etiam frictio ſine vllo dubio pendet ab aſperitate vel laeuitate vtriusque ſuperficiei, qua ambo corpora ſe mutuo tangunt; vbi quidem vulgaria experimenta probare videntur, neque quantitatem neque figuram baſis, qua corpora ſe mutuo contingunt, quicquam ad frictionem vel augendam vel minuendam conferre, vnde plerique auctores aſſumſerunt frictionem vulgo tertiae parti preſſionis aequalem aeſtimari poſſe, etſi non negant, ſi ſuperficies corporum magis minusue fuerint politae, etiam frictionem vel maiorem vel minorem inde oriri poſſe. Ita ſi P denotet vim, qua ambo corpora ſe mutuo premunt, frictio ſtatui ſolet $= \frac{1}{3} p$; vbi quidem intelligendum eſt, loco fractionis $\frac{1}{3}$ aliam vel maiorem vel minorem locum habere poſſe. Iſta autem vis eatenus tantum effectum exerit, quatenus revera attritus adeſt: quamdiu enim ambo corpora quieſcunt, ob frictionem nulla plane vis exeritur; ſimulac vero attritus contingit, vis illa $\frac{1}{3} p$ totum ſuum effectum exercet ſecundum directionem motui contrariam.

III. Quando autem ſtatuimus in ſtatu quietis nullam adeſſe vim frictionis, hoc tantum locum habere cen-

ſen-

ſendum eſt quando nullae adſunt vires ad motum ſollicitantes. Quod ſi enim adfuerit vis quaepiam Q, alterum corpus ſuper altero promouere tendens, duo caſus ſunt perpendendi: alter quo haec vis $Q > \frac{1}{3}p$, alter vero quo $Q < \frac{1}{3}p$. Priore caſu frictio totam ſuam vim $\frac{1}{3}p$ exerit ſecundum directionem motui contrariam, ita vt motus tantum ab exceſſu vis Q ſuper $\frac{1}{3}p$ producatur: caſu altero quo $Q < \frac{1}{3}p$, frictio non totam ſuam vim exerit, ſed tantum agit vi $= Q$, quo huius vis effectus coerceatur.

IV. Hinc igitur vis frictionis in ſe neutiquam eſt determinata, ſed quouis caſu vi ſollicitanti ſecundum directionem contrariam reluctatur, et quidem vel tota ſua vi $\frac{1}{3}p$, vel minore, ſiquidem minor ſufficiat ad effectum vis Q cohibendum.

V. Vtrum vero quantitas frictionis non etiam a celeritate, qua vnum corpus ſuper altero prorepit, pendeat, quaeſtio eſt nondum penitus deciſa. Sunt enim qui putant, ob auctam celeritatem frictionem adeo diminui, neque deeſſe videntur experimenta huic opinioni fauentia; dum contra alii eiusmodi experimenta allegant, quibus frictio ob auctam celeritatem etiam augeri videatur, niſi forte reſiſtentiae aëris iſte effectus ſit tribuendus.

VI. Ceterum ob infinitam corporum varietatem, qua in contactu in ſe inuicem agere poſſunt, tum vero etiam ob diuerſam asperitatis rationem vix quicquam in genere ſtabiliri poſſe videtur, vnde hoc loco opinionem communem circa frictionem ſum ſecuturus.

Problema I.

§. 2. *Definire motum globi super plano inclinato, motu vtcunque ex radente et voluente mixto, descendentis, cuius quidem centrum grauitatis in ipso centro figurae sit situm.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 6. Sit radius globi $CA = a$, eiusque pondus $= P$, centrum grauitatis vero in ipsius centro C. Tum vero sit eius momentum inertiae respectu axis horizontalis per C transeuntis, circa quem gyratur, $= Pkk$, ita vt, si globus ex materia constet vniformi, sit $kk = \frac{2}{5}aa$. Hic autem eius materiam vtcunque difformem assumamus, dummodo centrum grauitatis in punctum C incidat. Iam descendat iste globus vtcunque super plano inclinato IO, quod ad horizontem HO inclinetur angulo $IOH = \omega$, atque elapso tempore t confecerit iam spatium $IS = s$, globo planum tangente in puncto S. Quia igitur globus ob grauitatem in directione verticali CP vrgetur vi $= P$, hinc nascitur vis globum plano apprimens secundum directionem $CS = P\cos.\omega$, atque insuper vis secundum rectam CB plano IO parallelam motum accelerans $= P\sin.\omega$. Globus igitur in planum IO pressionem exercebit $= P\cos.\omega$, vnde vis frictionis hinc nata erit $= \frac{1}{3}P\cos.\omega$, siquidem detur attritus. At si minor vis sufficiat ad attritum impediendum, etiam minorem exercebit, quae ergo sit $\lambda P\cos.\omega$. Praeterea vero globus motu gyratorio per tempus t angulum iam confecerit $ACS = \Phi$, ita vt celeritas angularis nunc sit $\frac{d\Phi}{dt}$, qua punctum globi S secundum directionem SI ferretur celeritate $= \frac{a\,d\Phi}{dt}$, siquidem centrum C quiesceret, quod cum autem eodem tempore t iam

iam spatium IS $= s$ confecisse ponatur, eius celeritas secundum SO $= \frac{ds}{dt}$. Ob hunc vtrumque motum igitur punctum globi S planum IO radet celeritate differentiae inter illas celeritates aequali, scilicet vel radet in directione SI celeritate $\frac{a\,d\Phi}{dt} - \frac{ds}{dt}$, siquidem fuerit $a\,d\Phi > ds$, vel radet in directione SO celeritate $\frac{ds}{dt} - \frac{a\,d\Phi}{dt}$, si fuerit $ds > a\,d\Phi$. Priore ergo casu globus ob frictionem sollicitabitur in directione SO vi $= \frac{1}{3}$ P cos. ω, posteriore vero casu sollicitabitur in directione SI pari vi $= \frac{1}{3}$ P cos. ω. Verum si fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, nullus dabitur attritus, et globus in contactu S non maiorem exeret vim, quam quanta opus est ad attritum impediendum, quam ergo vim statuamus $= \lambda$ P cos. ω. Hinc igitur tres casus occurrent evoluendi.

I. Ponamus igitur primo esse $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hocque casu frictio exeret vim $= \frac{1}{3}$ P cos. ω, secundum directionem SO, quare cum iam motu progressiuo globus sollicitetur in directione CB plano inclinato parallela vi

$$= \mathrm{P\ sin.}\ \omega + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{P\ cos.}\ \omega,$$

principia motus nobis suppeditant hanc aequationem:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{\mathrm{P\ sin.}\ \omega + \frac{1}{3}\,\mathrm{P\ cos.}\ \omega}{\mathrm{P}} = \mathrm{sin.}\ \omega + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{cos.}\ \omega,$$

vbi littera g significat altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, siquidem tempus t in minutis secundis exprimere velimus. Pro motu autem gyratorio, quem in sensum SA fieri concipimus, ei se opponit vis frictionis $\frac{1}{3}$ P cos. ω, momento $\frac{1}{3}a$ P cos. ω, dum iste motus ob ipsam grauitatem plane non afficitur, vnde principia mechanica hanc praebent aequationem:

$dd\Phi$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{-\frac{1}{3}a\,\mathrm{P}\,\mathrm{cos}.\,\omega}{\mathrm{P}\,b\,b} = \frac{-a\,\mathrm{cos}.\,\omega}{3\,b\,b}.$$

Atque ex his duabus aequationibus motum globi definiri oportet, quamdiu scilicet fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$.

Quoniam angulus ω est constans, prior aequatio ducta in $2g\,dt$ et integrata praebebit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,(\mathrm{sin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{cos}.\,\omega) + f,$$

vbi cum $\frac{ds}{dt}$ exprimat celeritatem centri C secundum directionem I O progredientis, constans adiecta f exprimet istam celeritatem initialem, qua scilicet globus motum initio inchoauerit. Eodem modo altera aequatio in $2g\,dt$ ducta et integrata praebebit $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\mathrm{cos}.\,\omega}{3kk}$, vbi quia $\frac{d\Phi}{dt}$ exprimit celeritatem angularem in sensum S A, elapso tempore t constans hic adiecta ζ denotabit celeritatem angularem in eundem sensum, quae globo initio fuerit impressa. His igitur duabus aequationibus inuentis patet, istum motum tantum valere quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2ga^2t\,\mathrm{cos}.\,\omega}{3kk} > 2gt\,(\mathrm{sin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{cos}.\,\omega) + f; \text{ siue}$$

$$a\zeta - f > 2gt\,(\tfrac{aa\,\mathrm{cos}.\,\omega}{3kk} + \mathrm{sin}.\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{cos}.\,\omega),$$

vnde intelligitur hunc motum locum habere non posse, nisi initio fuerit $a\zeta - f$ quantitas positiua, quae autem, quantumuis fuerit magna, tamen labente tempore t tandem indoles huius motus cessabit, quod scilicet eueniet quando formula

$2gt$

$$2gt\left(\frac{aa\cos\omega}{3kk} + \sin.\omega + \tfrac{1}{3}\cos.\omega\right),$$

aequalis fiet quantitati $a\zeta - f$.

Quodsi has duas aequationes denuo in dt ducamus et integremus, reperiemus has aequationes:

$$s = C + ft + gtt\,(\sin.\omega + \tfrac{1}{3}\cos.\omega) \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta t - \frac{gatt\cos.\omega}{3kk}.$$

II. Ponamus nunc tempore elapso $= t''$ esse $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, ita vt globus in puncto S radat planum secundum directionem S O, hincque frictio aget in directione S I vi $= \frac{1}{3}P\cos.\omega$, quae vis quia est contraria vi ex grauitate oriundae $P\sin.\omega$, qua motus progressiuus globi acceleratur, pro hoc motu progressiuo habebimus

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\omega.$$

At pro motu gyratorio habebimus vim frictionis accelerantem, cuius momentum est $= \frac{1}{3}aP\cos.\omega$, vnde colligitur $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\cos.\omega}{3kk}$. Nunc igitur ex his duabus aequationibus integrando deducimus has aequalitates:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,(\sin.\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2gat\cos.\omega}{3kk},$$

quae autem eatenus tantum valere sunt censendae, quatenus fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, hoc est quatenus

$$f + 2gt\,(\sin.\omega - \tfrac{1}{3}\cos.\omega) > a\zeta + \frac{2gaat\cos.\omega}{3kk}, \text{ siue}$$
$$f - a\zeta > 2gt\left(\frac{aa\cos.\omega}{3kk} - \sin.\omega + \tfrac{1}{3}\cos.\omega\right).$$

Vnde intelligitur, vt talis motus eueniat initio esse debuisse

isse $f > a\zeta$, postea vero continuatio huius motus praecipue pendebit ab hac formula:

$$\frac{aa\,\text{cos}.\,\omega}{3kk} + \tfrac{1}{3}\,\text{cos}.\,\omega - \text{sin}.\,\omega,$$

quae si fuerit positiua, iste motus mox cessabit; sin autem fuerit negatiua, motus perpetuo durabit, quod ergo continget si fuerit

$$\text{sin}.\,\omega > \frac{a\,a\,\text{cos}.\,\omega}{3k\,k} + \tfrac{1}{3}\,\text{cos}.\,\omega, \text{ siue}$$
$$\text{tang}.\,\omega > \frac{a\,a + k\,k}{3k\,k}.$$

Ceterum hae aequationes denuo integratae praebebunt

$$s = C + f\,t + g\,t\,t\,(\text{sin}.\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos}.\,\omega) \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta\,t + \frac{g\,a\,t\,t\,\text{cos}.\,\omega}{3k\,k}.$$

III. Sumamus tandem elapso tempore t'' esse $\frac{d\,s}{d\,t} = \frac{a\,d\,\Phi}{d\,t}$, ita vt iam nullus attritus locum habeat, Frictio igitur hoc casu eatenus tantum aget, quatenus opus est ad attritum impediendum. Ponamus igitur istam frictionis vim esse $= \lambda\,P\,\text{cos}.\,\omega$, ita vt $\lambda < \frac{1}{3}$, eique directionem tribuamus S O, atque pro motu progressiuo habebimus has duas aequationes, vti in casu primo, dummodo loco $\frac{1}{3}$ scribatur λ.

$$\frac{d\,d\,s}{2g\,d\,t^2} = \text{sin}.\,\omega + \lambda\,\text{cos}.\,\omega,$$
$$\frac{d\,d\,\Phi}{2g\,d\,t^2} = -\frac{\lambda\,a\,\text{cos}.\,\omega}{k\,k},$$

quare cum per hypothesin esse debeat $\frac{d\,s}{d\,t} = \frac{a\,d\,\Phi}{d\,t}$, necesse est vt etiam sit $\frac{d\,d\,s}{d\,t^2} = \frac{a\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2}$, haec ergo conditio praebet istam aequationem:

$$\text{sin}.\,\omega + \lambda\,\text{cos}.\,\omega = -\frac{\lambda\,a\,a\,\text{cos}.\,\omega}{k\,k},$$

vnde colligitur

$\lambda =$

$$\lambda = \frac{-kk\,\sin.\omega}{(aa+kk)\cos.\omega} = \frac{-kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega.$$

Dummodo ergo ista fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω non superet $\frac{1}{3}$, motus globi secundum hanc legem absoluetur, & solo motu voluente super plano descendet. Ad quem motum inuestigandum statuamus $\lambda = \frac{-kk}{aa+kk}$ tang. ω, et per integrationem reperiemus hos valores:

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{2gaat\,\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2gat\,\sin.\omega}{aa+kk},$$

vbi autem per ipsam hypothesin esse debet $f = a\zeta$; vnde patet, dummodo initio fuerit $f = a\zeta$ et fractio $\frac{kk}{aa+kk}$ tg. ω non superet $\frac{1}{3}$, globum solo motu voluente super plano inclinato descendere. Repetita autem integratio perducet ad hanc aequationem:

$$s = C + ft + gtt.\frac{aa\,\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et}$$
$$\Phi = \Gamma + \zeta t + gtt.\frac{a\,\sin.\omega}{aa+kk}.$$

Ceterum vero si fuerit $\frac{kk}{aa+kk}$ tang. $\omega > \frac{1}{3}$, tum motus vti casu secundo prosequetur. Hic quidem assumimus, plenam vim, quam frictio exerere valet, esse $= \frac{1}{3}p\cos.\omega$, etiamsi loco fractionis $\frac{1}{3}$ pro varia corporum indole modo maior modo minor fractio accipi debeat. Quod enim hic de $\frac{1}{3}$ dictum est, de alio quouis valore est intelligendum.

Scholion.

§. 3. In omni ergo motu, quo globus super plano inclinato promouetur, hos tres casus sollicite a se inuicem distingui conuenit; vbi imprimis notetur, tertium casum complecti prouolutionem globi perfectam, ita vt nullus attritus in contactu locum inueniat, cuius caracter in hoc conſiſtit vt ſit $ds = a\,d\Phi$. Caſum autem primum pro iis motibus conſtituimus, quibus motus gyratorius motum globi progreſſiuum ſuperat, ita vt ſit $a\,d\Phi > ds$ et attritus ſuper plano retrorſum dirigatur. Secundus vero caſus eos continet motus, vbi celeritas progreſſiua ſuperat celeritatem angularem, ita vt ſit $ds > a\,d\Phi$, et attritus antrorſum ſit directus. Quicunque ergo ſtatus globi initialis fuerit propoſitus, ante omnia diſpiciendum erit, ad quemnam horum caſuum referri debeat. Sumamus autem motus initium conſtitui in ipſo puncto I, ita vt poſito tempore $t = 0$ ſemper ſit etiam $s = 0$, vnde in ſuperioribus formulis conſtans illa C in nihilum abibit. Deinde vero, quia perinde eſt, a quonam termino angulus Φ capiatur, pro initio conſtanter aſſumere poterimus $\Gamma = 0$. Praeterea vero in ſtatu initiali duplex motus, qui globo fuerit impreſſus, perpendi debet, quorum alter eſt progreſſiuus ſecundum ipſam plani directionem, cuius celeritatem indicauimus littera f, qua ſpatium definitur, quod ea celeritate in vno minuto ſecundo percurri poſſet. Denique vero motus angularis in initio deſignatur littera ζ, qua angulus denotatur, qui iſto motu angulari tempore vnius minuti ſecundi abſolueretur. Hic autem ſemper aſſumimus iſtum motum angularem in ſenſum S A B eſſe directum; vnde ſi in ſenſum contrarium vergeret, valor litterae ζ negatiuus ſumi deberet. Quibus notatis perſpicuum eſt, motum initialem ad caſum primum referri debere, ſi fuerit $f < a\zeta$; ad ſecundum vero ſi fuerit $f > a\zeta$; ac denique ad tertium ſi fuerit $f = a\zeta$. Quo autem omnes iſtae varietates clarius perſpici queant, planum I O primum aſſumamus horizontale, deinde vero ei talem inclinationem

tri-

tribuamus, vt sit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, tum vero etiam vt sit tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, vbi casus intermedius tang. $\omega = \frac{aa+kk}{3kk}$ euolutionem peculiarem meretur. Denique vero etiam ipsi plano IO inclinationem sursus directam tribuemus, ita vt angulus ω negatiuum valorem obtineat.

I. De motu globi super plano horizontali.

§. 4. Sit IO planum horizontale, motus vero in ipso puncto I inchoauerit, vbi celeritas progressiua secundum IO fuerit $= f$, celeritas vero angularis in sensum $SAB = \zeta$, radio globi existente $CA = a$ et momento inertiae $= Pkk$, denotante P pondus globi. Hinc autem elapso tempore $= t$ sec. globus confecerit motu progressiuo spatium $IS = s$, motu vero gyratorio angulum $ACS = \Phi$, quibus positis pro nostris tribus casibus habebimus sequentes aequationes differentiales secundi gradus: Tab. II. Fig. 7.

I. Si fuerit $\frac{ds}{dt} < \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \frac{1}{3}$ et

2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a}{3kk}$;

II. Si fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = -\frac{1}{3}$ et

2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = \frac{a}{3kk}$;

III. Si fuerit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, erit 1°. $\frac{dds}{2gdt^2} = \lambda$ et

2°. $\frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a\lambda}{kk}$;

vbi esse debet $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω, ergo $\lambda = 0$. Hos igitur casus pro diuersitate status initialis percurramus.

Exemplum 1.

§. 5. Ponamus igitur primo globo initio in I solum motum progressiuum esse impressum celeritate $= f$.

Statim igitur, ſaltem ab initio, vbi $t = 0$, ob $f > a\zeta$, ſeu $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hic caſus ſecundus locum habebit, vnde binas illas aequationes integrando habebimus $\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{3}gt + f$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$. Hae igitur aequationes tamdiu locum habebunt, quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt donec fiat

$$f - \tfrac{2}{3}gt > \frac{2aagt}{3kk};$$

vnde patet hunc motum eovsque tantum eſſe duraturum, quoad fiat $f - \frac{2}{3}gt = \frac{2aagt}{3kk}$, id quod eueniet elapſo tempore $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Poſt hoc vero tempus motus cadet in caſum tertium, et globus vtroque motu tam progreſſiuo quam angulari, quem hoc momento habuerit, conſtanter in infinitum progredietur. Poſito autem $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$ reperitur celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk}$, celeritas vero angularis $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk}$.

§. 6. Totum ergo huius globi motum in duas partes partiri oportet, quarum prior ſecundum caſum ſecundum abſoluitur, poſterior vero ſecundum caſum tertium, vbi pars prior durabit per tempus $t = \frac{3fkk}{2g(aa+kk)}$. Quare ſi ſtatus globi pro minori tempore t quaeratur, ex formulis ſuperioribus habebimus $\frac{ds}{dt} = f - \frac{2}{3}gt$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt}{3kk}$, pro vtraque globi celeritate. Vnde patet, celeritatem progreſſiuam, quae initio erat $= f$, continuo decreſcere, eiusque decrementa tempori eſſe proportionalia. Contra vero celeritas angularis, quae initio erat nulla, continuo creſcit, atque etiam tempori proportionaliter. Quodſi has formulas differentiales denuo integremus, reperiemus primo totum ſpatium tempore t percurſum, $IS = s = ft - \frac{1}{3}gtt$, et angulum, per quem

quem ab initio iam se conuertit, scil. $ACS = \Phi = \frac{agtt}{skk}$. Hae autem formulae diutius non durant, quam donec fiat $t = \frac{sfkk}{2g(aa+kk)}$; in fine autem huius temporis spatium confectum erit $s = \frac{sffkk(2aa+kk)}{4g(aa+kk)^2}$, totus autem angulus conuersionis erit $\Phi = \frac{9afskk}{4g(aa+kk)^2}$. Posterior autem motus pars nulla laborat difficultate, quia vterque motus est vniformis et perpetuo talis manet.

§. 7. Cum igitur in priore motus parte frictio motui aduersetur, etiam eius vis viua diminuatur necesse est, quam diminutionem expendisse opere etiam erit pretium. Consideremus igitur primo vim viuam globi in ipso motus initio, quae erat Pff, denotante scilicet P massam globi. Deinde vero in genere constat, si eiusdem globi celeritas progressiua fuerit $= \frac{ds}{dt}$, angularis vero $= \frac{d\Phi}{dt}$, eius vim viuam fore $= P(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2})$, quae ergo formula pro posteriori motus parte, vbi vidimus esse

$$\frac{ds}{dt} = \frac{aaf}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{af}{aa+kk},$$

praebet vim viuam

$$\frac{Paaff(aa+kk)}{(aa+kk)^2} = \frac{Paaff}{aa+kk}$$

quae ergo vtique minor est quam initio, eiusque portio, quae periit, est $\frac{Pffkk}{aa+kk}$. Quare si globus ex materia homogenea fuerit confectus, quoniam tum est $kk = \frac{2}{5}aa$, portio vis viuae in hoc motu amissa erit $\frac{2}{7}Pff$, ideoque vis viua superstes $= \frac{5}{7}Pff$, quod scilicet vis viuae decrementum frictioni est tribuendum.

§. 8. Ponamus exempli gratia radium globi a esse vnius digiti, et kk proinde $= \frac{2}{5}$ digitos quadratos, siquidem glo-

globus ex materia constet homogenea; tum vero globo celeritas initio impressa sit, qua singulis minutis secundis percurrere potuisset spatium 5 pedum, siue 60 digitorum, ita vt fuerit $f = 60$. Hoc posito prior motus pars durabit per tempus $t = \frac{15''}{112}$, hoc est aliquanto minus quam $\frac{1''}{7}$; vnde intelligitur partem motus priorem plerumque per quam minimum temporis spatium durare. Deinde vero hoc tempore elapso celeritas progressiua erit $42\frac{6}{7}$ dig. celeritas autem angularis erit etiam $42\frac{6}{7}$ dig. quae per peripheriam circuli 2π diuisa ostendet numerum reuolutionum singulis minutis secundis peractarum, qui ergo numerus erit 7 propemodum; hocque motu globus constanter vlterius progredietur, nisi quatenus ab illis obstaculis tandem exstinguitur. Spatium autem parte priore motus absolutum erit $s = 6\frac{8}{9}$.

Exemplum 2.

§. 9. Ponamus nunc globo initio solum motum gyratorium esse impressum in sensum S A B, cuius celeritas angularis sit $= \zeta$, ita vt fuerit $f = 0$. Hinc patet, saltem statim ab initio motum pertinere ad casum primum, quo $\frac{ds}{dt} < \frac{ad\Phi}{dt}$ vnde formulae semel integratae oriuntur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$$

quae formulae tamdiu valebunt quamdiu fuerit

$$\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt} \text{ h. e. quamdiu } a\zeta - \frac{2aagt}{3kk} > \frac{2}{3} g t.$$

Euidens autem est has duas formulas continuo magis ad aequalitatem adpropinquare, quam adeo attingent elapso tempore $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, tum autem fiet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

dein-

deinceps igitur globus hoc motu voluendo perpetuo vniformiter progredietur.

§. 10. Totum igitur hunc motum in duas partes partiri conuenit, in quarum priore motus gyratorius continuo decrescit secundum formulam $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk}$, contra vero motus progressiuus secundum formulam $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}gt$, et vterque tempori proportionaliter. Hinc igitur porro integrando obtinebimus spatium $s = \frac{1}{3}gtt$ et angulum $\Phi = \zeta t - \frac{agtt}{3kk}$, vnde, quoniam haec motus pars durat per tempus $t = \frac{3akk\zeta}{2g(aa+kk)}$, totum spatium hoc tempore confectum erit $s = \frac{3aak^4\zeta\zeta}{4g(aa+kk)^2}$, angulus autem conuersione absolutus fiet

$$ACS = \Phi = \frac{3akk\zeta\zeta(aa+2kk)}{4g(aa+kk)^2}.$$

Elapso autem hoc tempore motus abibit in prouolutionem perfectam, celeritate progressiua $\frac{akk\zeta}{aa+kk}$ et angulari $= \frac{kk\zeta}{aa+kk}$; vbi imprimis notari meretur, has celeritates plane non a quantitate frictionis pendere, quoniam character frictionis $\frac{1}{3}$ ex calculo abiit, vnde effectus frictionis in hoc tantum consistit, quod motus globi vel citius vel tardius ad vniformitatem perducatur, id quod etiam in casu praecedentis exempli contigit.

§. 11. Consideremus nunc etiam vim viuam globi, quatenus ob frictionem diminuitur, quae cum initio fuisset $Pkk\zeta\zeta$, in motu vniformi fiet $= P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kkd\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae expressio ob

$$\frac{ds}{dt} = \frac{akk\zeta}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{kk\zeta}{aa+kk}$$

ideoque $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, abit in hanc $\frac{Pk^4\zeta\zeta}{aa+kk}$. Periit ergo ob frictiotionem vis viua $\frac{Paakk\zeta\zeta}{aa+kk}$, vbi iterum notasse iuuabit, eandem vim viuam perire, siue frictio fuerit maior siue minor; semper enim pars amissa se habebit ad partem superstitem vt $aa:kk$; in priore exemplo autem haec ratio fuit inuersa.

§. 12. Ponamus exempli gratia globo initio tantum motum gyratorium fuisse impressum, quo tempore vnius minuti secundi confecerit 5 reuolutiones, ita vt fuerit $\zeta = 10\,\pi$. Praeterea vero sumamus fuisse $kk = \frac{2}{5}aa$, pro materiae homogeneitate; et vt ante $a = 1$, vbi eiusmodi mensuras statuimus, vt fuerit $g = 16$ pedum $= 16.12$ digitorum, quibus positis diminutio motus durabit per tempus $t = \frac{5}{224}\pi$ sec. $= 0,0701$, siue proxime $t = \frac{1}{14}$ sec. quo tempore conficietur spatium $s = 8,97$, siue fere 9 dig. Dehinc vero celeritas progressiua erit $\frac{ds}{dt} = 17.952$ digit. siue fere 18 digitos vno minuto secundo conficiet, et tanta etiam erit celeritas angularis, quae per 2π diuisa dat numerum reuolutionem 2, 857 siue 3 proxime, tot scilicet reuolutiones globus singulis minutis secundis absoluet.

Exemplum 3.

§. 13. Ponamus iam generalius globo initio duplicem imprimi motum, alterum progressiuum celeritate $= f$, alterum gyratorium celeritate angulari $= \zeta$, ita tamen vt sit $f > a\zeta$, ideoque motus saltem ab initio ad casum secundum sit referendus. Prima igitur integratio dat

$$\frac{ds}{dt} = f - \frac{2}{3}gt \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta + \frac{2agt}{3kk},$$

haeque formulae valebunt, quamdiu fuerit

$$\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}, \text{ hoc est } f - \frac{2}{3}gt > a\zeta + \frac{2aagt}{3kk}$$

vnde

vnde iſta motus pars durabit per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, quo tempore elapſo motus fiet aequabilis, ita vt ſit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af + \zeta kk)}{aa + kk},$$

quae formula non amplius pendet a quantitate frictionis ſicque effectus frictionis in hoc tantum conſiſtit, vt quo maior ea fuerit, eo citius motus globi ad hanc aequabilitatem pertingat, quam ſimulac attigerit, globus deinceps perpetuo eundem motum ſit conſeruaturus.

§. 14. Cum igitur prior motus pars duret per tempus $t = \frac{3kk(f - a\zeta)}{2g(aa + kk)}$, interea globus percurret ſpatium

$$s = ft - \tfrac{1}{2}gtt = t(f - \tfrac{1}{2}gt).$$

Hoc ſpatium erit

$$s = \frac{3kk(f + a\zeta)(f(2aa + kk) + \zeta akk)}{4g(aa + kk)},$$

quo ergo percurſo motus demum euadet aequabilis. Totus autem angulus motu gyratorio interea abſolutus erit

$$\Phi = \zeta t + \frac{agtt}{3kk} = t\left(\zeta + \frac{agt}{3kk}\right) = \frac{3kk(f - a\zeta)(\zeta(aa + 2kk) + af)}{4g(aa + kk)^2},$$

quae formula per peripheriam circuli ſeu 2π diuiſa praebebit numerum reuolutionum integrarum, quas globus interea peregerit.

§. 15. Denotante P globi pondus ſeu maſſam, eius vis viua ipſo motus initio erit $P(ff + \zeta\zeta kk)$. Pro motu autem aequabili deinceps ſequente vis viua globi erit

$$P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2}\right)^2 = P\frac{d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk),$$

cuius ergo magnitudo erit $\frac{P(af + \zeta kk)^2}{aa + kk}$, quae ergo erit vis viua adhuc ſuperſtes, ſicque vis viua, quae in priore motus

tus parte interiit, erit $\frac{\mathfrak{P}\,kk\,(f-a\,\zeta)^2}{aa+kk}$, quae ergo semper erit positiua, nisi fuerit $f = a\zeta$, hoc est nisi motus globi statim ab initio fuerit aequabilis, globusque statim acceperit prouolutionem perfectam.

§. 16. Omnino autem Phaenomena prorsus singularia se prodent, quando motus gyratorius globo initio impressus in sensum contrarium verget, ita vt angulus ζ negatiuum obtinuerit valorem, ad quae Phaenomena inuestiganda ponamus $\zeta = -\eta$, ita vt η fuerit celeritas angularis in sensum contrarium B A S globo impressa. Tum igitur, cum motus euaserit aequabilis, fiet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\,\Phi}{d\,t} = \frac{a\,(af-\eta\,kk)}{aa+kk},$$

vnde patet, si fuerit $\eta = \frac{af}{kk}$, tum motum globi ad quietem redigi, id quod eueniet post tempus $t = \frac{\mathfrak{s}\,kk\,(f+\eta\,a)}{2g\,(aa+kk)}$, quo tempore globus conficiet spatium

$$s = \frac{\mathfrak{s}\,kk\,(f+\eta\,a)\,(f\,(2aa+kk)-\eta\,akk)}{4g\,(aa+kk)^2}.$$

Quia autem modo sumsimus $\eta = \frac{af}{kk}$, illud tempus erit $\frac{\mathfrak{s}f}{2g}$, spatium autem percursum $s = \frac{\mathfrak{s}ff}{4g}$, vbi notari meretur, quantitatem k ex calculo esse egressam; interim tamen in ipso valore η, quem assumsimus, haec quantitas inest, quandoquidem sumsimus $\eta = \frac{af}{kk}$; vnde si globus ex materia vniformi constet, ob $kk = \frac{2}{5}aa$ hoc Phaenomenon locum habebit si fuerit $\eta = \frac{5f}{2a}$, ideoque $\eta\,a = \frac{5}{2}f$, vbi $\eta\,a$ exprimit celeritatem motus gyratorii in ipso contactu super plano retro directam, quae ergo se ad celeritatem progressiuam habere debet vt 5 : 2.

§. 17.

§. 17. At si motus gyratorius initio impressus fuerit minor, siue $\eta < \frac{af}{kk}$, tum globus retinebit celeritatem quandam in motu aequabili, et phaenomena similia erunt iis quae ante euoluimus. Verum si fuerit $\eta > \frac{af}{kk}$, motus globi ante ad quietem redigetur quam sese ad aequabilitatem composuerit, id quod inde patet, quod pro motu aequabili prodeat

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af - \eta kk)}{aa + kk},$$

ideoque quantitas negatiua, scilicet motus aequabilis retro erit directus. Videamus igitur vbi globus incipiat fieri retrogradus, siue vbi celeritas globi progressiua $\frac{ds}{dt}$ nihilo fiat aequalis, id quod eueniet elapso tempore $t = \frac{3f}{2g}$, quod tempus minus est eo, quo motus euadit aequabilis, quippe quod erat $\frac{3kk(f + \eta a)}{2g(aa + kk)}$, propterea quod ηkk supponitur maius quam af. Spatium autem vsque ad punctum quietis percursum erit $s = \frac{3ff}{4g}$, quod ergo non a quantitate celeritatis pendet. At vero spatium s, ubi motus aequabilis incipit, erit

$$s = \frac{3kk(f + \eta a)(f(2aa + kk) - \eta akk)}{4g(aa + kk)^2},$$

quod igitur spatium esse poterit vel positiuum vel negatiuum; positiuum scilicet erit quamdiu fuerit $\eta < \frac{f(2aa + kk)}{akk}$, hoc est quamdiu η continebitur intra limites $\frac{f(2aa + kk)}{akk}$ et $\frac{af}{kk}$. Sed motus post reuersionem in ipso puncto I incipiet retrouergere, quando fuerit $\eta = \frac{f(2aa + kk)}{akk}$; verum si η hunc valorem superet, globus terminum initialem I transgredietur, antequam motus aequabilis incipiet.

Exemplum 4.

§. 18. Tribuamus primo globo duplicem motum initialem litteris f et ζ contentum; verum iam sit $a\zeta > f$, ita vt motus immediate subsequens referatur ad nostrum casum primum, vnde oritur

$$\frac{ds}{dt} = f + \tfrac{2}{3} g t \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2agt}{3kk},$$

qui motus ergo durabit, donec fiat

$$f + \tfrac{2}{3} g t = a\zeta - \frac{2aagt}{3kk},$$

ideoque $t = \frac{3kk(a\zeta - f)}{2g(aa + kk)}$, quo tempore elapso motus fiet vniformis, eritque

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{a(af + \zeta kk)}{aa + kk},$$

qui ergo semper in consequentia tendet. Ante autem quam globus hunc terminum attingit, spatium tempore t percursum erit $s = ft + \frac{1}{3} g t t$, ergo totum spatium vsque ad aequabilitatem confectum erit

$$s = \frac{3kk(a\zeta - f)(f(2aa + kk) + a\zeta kk)}{4g(aa + kk)}.$$

Hinc autem singularia Phaenomena nulla se offerunt, nisi forte velimus celeritatem f negatiuam accipere. Verum talis hypothesis omnino foret superflua, quia tantum opus esset plagas dextrorsum et sinistrorsum inter se permutare, vnde motus ad casum ante tractatum reduceretur.

§. 19. Tandem cum hoc casu vis viua globo initio impressa sit $= P(ff + \zeta\zeta kk)$, vbi motus aequabilis fieri incipit, vis viua vt supra vidimus erit

$$\frac{P\,d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk) = \frac{P(af + \zeta kk)^2}{aa + kk},$$

quae cum sit vis viua post frictionis effectum residua, erit

vis

vis viua per frictionem amissa $= \frac{Pkk(a\zeta - f)^2}{aa + kk}$. Hoc igitur pacto omnia phaenomena, quae in motu globi super plano locum inuenire possunt, satis dilucide exposuimus. Verum tamen perpetuo ista restrictio subintelligenda est, quod globo alius motus gyratorius non imprimatur, nisi circa axem horizontalem, eumque adeo ad directionem motus progressiui normalem. Quod si enim alios motus gyratorios admittere voluerimus, tota inuestigatio ad longe aliam Mechanicae partem reuolueretur, cuius principia in tractatu meo *De Motu Corporum Rigidorum* fusius pertractaui.

II. De motu globi super plano inclinato descendentis.

§. 20. Sit vt supra inclinatio plani ad horizontem HIO $= \omega$, globi pondus seu massa $= P$, radius AC $= a$ et momentum inertiae $= Pkk$; primo autem ponamus globum initio in I fuisse in perfecta quiete et elapso tempore t peruenisse in S, percurso spatio IS $= s$. Iam si nulla adesset frictio, globus rependo esset descensurus sine vllo motu gyratorio, eiusque motum expressum iri constat hac formula: $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega$, vnde primo deducitur eius celeritas progressiua $\frac{ds}{dt} = 2gt \sin.\omega$ et ipsum spatium percursum $s = gtt \sin.\omega$, ita vt futurum sit tempus $t = \sqrt{\frac{s}{g \sin.\omega}}$, hincque celeritas $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gs \sin.\omega}$, vbi $s \sin.\omega$ exprimit altitudinem lapsu confectam. Tum vero vis viua in S acquisita cum sit $= P\frac{ds^2}{dt^2}$, manifestum est vim viuam tempore t acquisitam fore $P.4ggtt.\sin.\omega^2$, quae per spatium ita exprimitur, vt sit $= P.4gs \sin.\omega$. Tab. II. Fig 8.

Exem-

Exemplum I.

§. 21. Nunc admissa frictione consideremus conditiones, sub quibus globus sine vllo attritu voluendo descendet, ita vt sit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, et quia huiusmodi motus non totam vim frictionis exigit, quae est $\frac{1}{3}$ P cos. ω, sit eius portio ad hoc requisita = λ P cos. ω, vnde motus his duabus formulis exprimetur:

$$\text{I. } \frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega - \lambda \cos.\omega.$$

$$\text{II. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda\,a\cos.\omega}{kk}.$$

Sicque ob $dds = a\,dd\Phi$, per hypothesin, necesse est vt sit $\sin.\omega - \lambda\cos.\omega = \frac{\lambda\,aa\cos.\omega}{kk}$, ideoque

$$\lambda = \frac{kk\sin.\omega}{(aa+kk)\cos.\omega} = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega,$$

quare cum λ non debeat excedere $\frac{1}{3}$, talis prouolutio perfecta locum habebit, quando fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, vnde duo casus perpendendi occurrunt, prout angulus ω fuerit vel minor vel maior isto valore assignato.

§. 22. Sit igitur tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, vt globus prouolutione perfecta descendat, et cum frictio sit vt vidimus $\lambda = \frac{kk\,\text{tang.}\,\omega}{aa+kk}$, erit

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \frac{aa\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\sin.\omega}{aa+kk},$$

vnde integrando nanciscimur

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2g\,aat\sin.\omega}{aa+kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2g\,at\sin.\omega}{aa+kk},$$

hincque porro $s = \frac{g\,aatt\sin.\omega}{aa+kk}$ et angulum $\Phi = \frac{g\,att\sin.\omega}{aa+kk}$. Illa expressio dat $tt = \frac{(aa+kk)s}{g\,aa\sin.\omega}$, quare cum vis viua sit fit $\frac{P d\Phi^2}{d t^2}(aa+kk)$, per tempus t acquiritur haec vis viua: $\frac{P.4gg aa tt \sin.\omega^2}{aa+kk}$, quae ergo minor eft quam fi frictio abeffet idque in ratione $aa:(aa+kk)$. At vero dum globus percurrit fpatium $= s$, vis viua quam acquiret erit $P.4gs \sin.\omega$, quae ergo eadem eft ac fi nulla adeffet frictio. In genere autem perpetuo tenendum eft, quoties motus fine attritu abfoluitur, tum femper eandem vim viuam generari, ac fi plane nulla adeffet frictio, id quod generaliter ita oftendi poteft.

Sint aequationes differentio-differentiales

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = Q - \lambda R \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a R}{kk},$$

ita vt fit $ds = a\,d\Phi$. Iam cum ex pofteriore fit

$$\frac{kk\,dd\Phi}{2g\,a\,dt^2} = \lambda R, \text{ erit addendo}$$

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,a\,dt^2} = Q;$$

haec aequatio ducatur in $2ds = 2a\,d\Phi$, vt fiat

$$\frac{2ds\,dds + 2kk\,d\Phi\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 2Q\,ds,$$

vnde integrando obtinemus

$$\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2} = 4g\int Q\,ds,$$

quae aequatio fi per maffam P multiplicetur, prior pars erit vis viua, quae ergo femper aequalis eft $4gP\int Q\,ds$, prorfus vt regula principii virium viuarum poftulat.

§. 23. *Cafus II.* Perpendamus nunc etiam alterum cafum, quo tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et quia tota vis frictionis impenditur, erit $\lambda = \frac{1}{3}$, ideoque

1°. $\frac{dds}{2g\,dt^2} = \sin.\omega - \frac{1}{3}\cos.\omega$ et

2°. $\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\cos.\Phi}{3kk}$,

vnde

vnde colliguntur celeritates

$$\frac{ds}{dt} = 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2agt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

quarum illa maior erit quam iſta. Tum vero porro erit

$$s = gtt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}gtt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \Phi = \frac{agtt\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore fit $gtt = \frac{3s}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}$.

§. 24. Contemplemur nunc vim viuam tempore t acquiſitam, ſcilicet $P\left(\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{kk\,d\Phi^2}{dt^2}\right)$, quae euadet

$$P.4ggtt\left(\text{ſin}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega^2}{kk}\right),$$

quae expreſſio ad ſpatium s traducta praebet hanc expreſſionem:

$$P.\frac{12gs}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{aa+kk}{kk}\,\text{coſ.}\,\omega^2\right),$$

quae, vti perpendenti facile patebit, minor eſt quam ſi nulla eſſet frictio, hoc eſt minor quam $P.4gs\,\text{ſin.}\,\omega$.

§. 25. Quo hoc clarius appareat, conſtet globus ex materia vniformi, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, et conditio inclinationis poſtulat vt ſit tang. $\omega > \frac{7}{6}$, hinc vis viua per ſpatium s acquiſita erit

$$\frac{12gPs}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\text{coſ.}\,\omega^2\right.,$$

ſicque oſtendi oportet eſſe

$$\frac{3}{3\,\text{ſin.}\,\omega - \text{coſ.}\,\omega}\left(\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\text{coſ.}\,\omega^2\right. < \text{ſin.}\,\omega,$$

hoc eſt

$$\text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{2}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\text{coſ.}\,\omega^2 < \text{ſin.}\,\omega^2 - \tfrac{1}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ h. e.}$$

$$-\tfrac{1}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega + \tfrac{7}{18}\text{coſ.}\,\omega^2 < 0, \text{ ſiue}$$

$$\tfrac{7}{18}\text{coſ.}\,\omega^2 < \tfrac{1}{3}\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega, \text{ ſiue}$$

$\frac{7}{6}$ coſ. ω

$\frac{7}{6}$ cos. $\omega <$ sin. ω, ideoque tang. $\omega > \frac{7}{6}$, quae est ipsa conditio praescripta.

§. 26. *Casus III.* Consideremus etiam ipsum limitem, et sumamus

$$\text{tang. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk}, \text{ siue}$$

$$\text{sin. } \omega = \frac{aa + kk}{3kk} \text{ cos. } \omega,$$

et in descensu ambae celeritates erunt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2gaat \text{ cos. } \omega}{3kk} \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

sicque etiamnunc erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, quandoquidem haec inclinatio est maxima, sub qua globus sine attritu descendit, ideoque etiam per spatium s eadem vis viua acquiritur ac si frictio abesset.

§. 27. Quod si denique planum adeo verticaliter erigatur, vt sit $\omega = 90$, motus vtique ad casum nostrum posteriorem erit referendus; tum igitur erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Hoc scilicet casu nullus plane motus gyratorius orietur, quia, ob pressionem euanescentem, etiam nulla frictio locum habet, sed globus libere verticaliter descendit, vnde etiam vis viua nullam diminutionem patietur, quippe quae pro spatio percurso $= s$ erit P. $4gs$.

Exemplum 2.

§. 27. Ponamus nunc globo initio in I solum motum progressiuum fuisse impressum cum celeritate $= f$, et quia globus rependo descendere incipiet, statim se exeret

tota

tota vis frictionis, vnde habebitur

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{a\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando elicitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{fin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cof.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}.$$

Hic autem motus diutius non durabit quam donec fiat $ds = a\,d\Phi$, vbi prouolutio perfecta incipiet; hoc igitur continget, quando fiet

$$f + 2gt\,\text{fin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cof.}\,\omega = \frac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk},$$

hoc est elapso tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

qui igitur casus locum habere nequit, nisi fuerit

$$(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega > 3kk\,\text{fin.}\,\omega \text{ fiue}$$

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}.$$

Nam si fuerit $\text{tang.}\,\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, motus nunquam plane ad prouolutionem perfectam redibit; vnde duos casus euolui conueniet.

§. 29. *Casus I.* Sit igitur primo $\text{tang.}\,\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$ et noster globus voluendo descendere incipiet elapso tempore

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

tum igitur eius celeritas progressiua erit

$$\frac{ds}{dt} = f + \frac{3fkk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} = \frac{aaf\,\text{cof.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega},$$

ac celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af\,\text{cof.}\,\omega}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega},$$

vnde

vnde patet fore $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, quare cum vis viua sit $\frac{P\,d\Phi^2}{dt^2}(aa + kk)$, erit ea praesenti momento

$$= \frac{P\,aaff\,(aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega^2}{((aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)^2},$$

vnde haud difficulter iudicabitur, quantum vis viua ob frictionem fuerit diminuta.

§. 30. Quoniam igitur inuenimus, quonam temporis momento prouolutio perfecta incipiet; videamus etiam quantum spatium globus hucusque percurrerit. Hunc in finem, quia erat

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt\,\text{fin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{cof.}\,\omega,$$

hinc nanciscimur integrando

$$s = ft + gtt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,\omega) = t(f + gt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cof.}\,\omega)).$$

Fiat nunc

$$t = \frac{3fkk}{2g((aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

et alter factor euadet

$$\frac{(2aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kkf\,\text{fin.}\,\omega}{2((aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

vnde totum istud spatium percursum erit

$$s = \frac{3ffkk((2aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)}{4g((aa + kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)^2}.$$

§. 31. Hinc si globum ex materia vniformi constare assumamus, vt sit $kk = \frac{2}{5}aa$; istud spatium ita prodit expressum: $\frac{gff(2\,\text{cof.}\,\omega - \text{fin.}\,\omega)}{g(7\,\text{cof.}\,\omega - 6\,\text{fin.}\,\omega)^2}$, hoc autem spatio percurso prouolutio fiet perfacta et vterque motus vniformiter accelerabitur.

§. 32. *Casus II.* Sit nunc tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, et iam vidimus, globum nunquam ad prouolutionem perfectam esse perventurum, vnde totus motus his formulis determinabitur:

$$\frac{ds}{dt} = f + 2gt \text{ sin. } \omega - \tfrac{2}{3} gt \text{ cos. } \omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

hincque denuo integrando fiet

$$s = ft + gtt \text{ sin. } \omega - \tfrac{1}{3} gtt \text{ cos. } \omega \text{ et } \Phi = \frac{gatt \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

hoc igitur motu attritus perpetuo aderit cum celeritate

$$\frac{ds}{dt} - \frac{ad\Phi}{dt} = f + 2gt\left(\text{sin. } \omega - \left(\frac{aa+kk}{3kk}\right) \text{cos. } \omega\right),$$

quae ergo expressio, quia sin. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$ cos. ω, continuo crescet.

Exemplum 3.

§. 33. Ponamus globo initio in I impressum fuisse motum tantum gyratorium in sensum SAB, cum celeritate angulari $= \zeta$, ac manifestum est, saltem mox ab initio attritum fore retro directum, ita vt tota frictionis vis motui gyratorio sit contraria, motum vero progressiuum acceleret, quandoquidem iste motus ad nostrum casum primum erit referendus, vnde habebimus

$$\frac{dds}{2gdt^2} = \text{sin. } \omega + \tfrac{1}{3} \text{cos. } \omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{a \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

vnde integrando nanciscimur

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{sin. } \omega + \tfrac{1}{3} \text{cos. } \omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat \text{ cos. } \omega}{3kk},$$

huncque motum globus tamdiu prosequetur, quamdiu fuerit $\frac{ad\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit

$$a\zeta - \frac{2gaat \text{ cos. } \omega}{3kk} > 2gt(\text{sin. } \omega + \tfrac{1}{3} \text{cos. } \omega),$$

quod eueniet quamdiu fuerit

$$t < \frac{a}{2g\left(\text{sin. } \omega + \left(\frac{aa+kk}{3kk}\right) \text{cos. } \omega\right)}, \text{ siue}$$

$t <$

$$t < \frac{3\zeta akk}{2g(3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega)}.$$

Semper ergo iſte motus tandem ad prouolutionem perfectam pertinget, elapſo ſcilicet tempore

$$t = \frac{3\zeta akk}{2g(3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega)}$$

tum enim euadet

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\zeta akk(\text{fin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\zeta kk(\text{fin.}\,\omega + \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{3kk\,\text{fin.}\,\omega + (aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega}.$$

§. 34. Poſtquam autem globus ad hunc ſtatum peruenerit, videamus, qua lege motum ſuum ſit proſecuturus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia celeritatem angularem, vbi iſte motus incipiet, eſſe $= \theta$, ita vt celeritas progreſſiua futura ſit $= a\theta$, ac pro iſtius motus continuatione has habebimus formulas:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{\lambda a\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde integrando colligimus

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk}$$

haecque prouolutio perfecta tamdiu durabit, quamdiu manere poterit $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, ita tamen, vt λ non vltra $\frac{1}{3}$ augeatur. Faciamus igitur $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ et prodibit iſta aequatio:

$$2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega) = \frac{2g\lambda aat\,\text{cof.}\,\omega}{kk}, \text{ fiue}$$

$$\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega = \frac{\lambda aa\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\,\text{tag.}\,\omega$. Quod ſi ergo fuerit $\frac{kk}{aa+kk}\,\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit, quod ergo eueniet, ſi fue-

fuerit tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ficque ifta conditio non amplius a quantitate θ pendet.

§. 35. Pro inclinationibus autem maioribus, vbi tang. $\omega > \frac{aa+kk}{3kk}$, pro motu inſequente valebunt iſtae formulae:

$$\frac{ds}{dt} = a\theta + 2gt(\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{coſ.}\,\omega) \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \theta + \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}$$

vbi ergo ſemper erit $\frac{ds}{dt} > \frac{ad\Phi}{dt}$, ideoque globus ita rependo deſcendet, vt celeritas attritus deorſum vergat, cum ante hunc terminum ſurſum fuiſſet verſa; ſcilicet ante hunc terminum frictio deſcenſum promouebat, in ipſo termino ſubito euaſit $= 0$, dehinc vero ſubito motui fit contraria.

§. 36. Haec igitur exempla abunde ſufficiunt, vt ex iis omnia Phaenomena, quae in motu globi ſuper plano inclinato occurrere poſſunt, explicare valeamus; vbi vidimus imprimis duos caſus diſtingui conuenire, prout tangens inclinationis minor fuerit vel maior quam $\frac{aa+kk}{3kk}$. Interim tamen ſingularia phaenomena ſe manifeſtare poſſunt, quando inclinatio ω ſupponitur negatiua et globus ſuper plano inclinato ſurſum propellitur, quorum igitur indolem adhuc euoluemus, poſtquam vnum caſum huc pertinentem adhuc fuerimus contemplati.

Exemplum 4.

§. 37. Caſus hic imprimis notatu dignus tum locum habet, quando globo in I motus gyratorius in contrarium ſenſum, ſcilicet B A S, fuerit impreſſus, cuius celeritas angularis $= \eta$; vbi facile perſpicitur, vim frictionis retro

tro fore directam, ideoque tam motui progressiuo quam gyratorio contrariam, ex quo intelligitur, motum saltem ab initio his formulis expressum iri:

$$\frac{dds}{2gudt^2} = \text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega \quad \text{et} \quad \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = + \frac{a\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}$$

siquidem angulum Φ hic ita consideremus, quasi celeritate $\frac{d\Phi}{dt}$ in sensum SAB vergeret, quo casu vtique frictio retro vrgens motum acceleraret, quia initio poni debet $\frac{d\Phi}{dt} = -\eta$. Hinc igitur integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk};$$

vnde patet, si fuerit fin. $\omega > \frac{1}{3}$ cof. ω, motum progressiuum deorsum ferri; sin autem fuerit fin. $\omega < \frac{1}{3}$ cof. ω tum globum retro esse ascensurum; si denique fuerit fin. $\omega = \frac{1}{3}$ cof. ω, motum progressiuum statim ab initio generari nullum, sed globum per aliquod tempus in puncto I esse mansurum, quem casum primo consideremus.

§. 38. *Casus I.* Ponamus igitur esse fin. $\omega = \frac{1}{3}$ cof. ω, siue tang. $\omega = \frac{1}{3}$, et cum hinc fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, hae formulae valebunt quamdiu fuerit $0 > \frac{ad\Phi}{dt}$, hoc est quamdiu fuerit $\frac{2gat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk} < \eta$. Vnde patet, globum in puncto I mansurum esse per tempus $t = \frac{3\eta kk}{2ga\,\text{cof.}\,\omega}$, quoad scilicet totus motus gyratorius initio impressus fuerit extinctus, postmodum vero demum globus incipiet descendere et motus a quiete perfecta inchoabit, quem igitur globus modo in exemplo primo exposito prosequetur. Id igitur hic potissimum mirandum occurrit, quod globus ab initio per aliquod tempus quasi immotus in I persistat.

§. 39.

§. 39. *Casus II.* At si inclinatio plani minor fuerit scil. tang. $\omega < \frac{1}{3}$, tum ob $\frac{ds}{dt}$ negatiuum, globus retro ascendet, dum interea motus gyratorius impressus continuo decreuit, et istae formulae tamdiu valebunt, quamdiu fuerit

$$2gt(\text{fin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega) > -a\eta + \tfrac{2gaat\,\text{cof.}\,\omega}{3kk}, \text{ fiue}$$

$$a\eta > 2gt\left(\left(\tfrac{aa+kk}{3kk}\right)\text{cof.}\,\omega - \text{fin.}\,\omega\right)$$

qui ergo motus durabit per tempus

$$t = \tfrac{3\eta akk}{2g((aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega)},$$

hocque tempore elapso erit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega}$$

quae vtraque celeritas ob fin $\omega < \frac{1}{3}$ cof. ω erit negatiua, ficque globus etiamnunc furfum perget, neque etiamnunc motus gyratorius erit extinctus; interim tamen iam ab hoc momento prouolutio erit perfecta, eiusque motus his formulis continetur:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3\eta akk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} + 2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega)$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\eta kk(\text{fin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega)}{(aa+kk)\,\text{cof.}\,\omega - 3kk\,\text{fin.}\,\omega} + \frac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

hacque lege motus continuabit, quamdiu manebit $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, dum fcilicet λ non maior euadit quam $\frac{1}{3}$. Conftituta igitur hac aequalitate erit

$$2gt(\text{fin.}\,\omega - \lambda\,\text{cof.}\,\omega) = \tfrac{2g\lambda at\,\text{cof.}\,\omega}{kk},$$

vnde

vnde fit $\lambda = \frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω. Hinc quia tang. $\omega < \frac{1}{3}$, valor ipsius λ multo magis erit minor, ideoque prouolutio perfecta perpetuo durabit. Cum autem, quando iste motus incipit, vtraque celeritas adhuc sit negatiua, ascensus durabit, donec fiat $\frac{ds}{dt} = 0$, id quod eueniet elapso hinc tempore $t = \frac{\eta kk(aa+kk)(\text{cos.}\,\omega - 3\,\text{sin.}\,\omega)}{2ga\,\text{sin.}\,\omega((aa+kk)\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)}$; tum vero post hoc momentum globus ex quiete per hoc planum descendet.

§. 40. *Casus III.* Consideremus nunc inclinationem maiorem, sitque tang. $\omega > \frac{1}{3}$, et motus ab initio his formulis continebitur:

$$\frac{ds}{dt} = 2gt(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega) \text{ et}$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = -\eta + \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk}.$$

Hicque motus durabit donec fiet

$$2gt(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\text{cos.}\,\omega) = -a\eta + \frac{2gaat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

vnde colligitur

$$a\eta = 2gt\left(\frac{(aa+kk)\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega}{3kk}\right),$$

vnde fit

$$t = \frac{3a\eta kk}{2g((aa+kk)\text{cos.}\,\omega - 3kk\,\text{sin.}\,\omega)}.$$

Scilicet per hoc tempus motus ille prior durabit, si fuerit $(aa+kk)\,\text{cos.}\,\omega > 3kk\,\text{sin.}\,\omega$, siue tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$. Cum autem per hypothesin sit tang. $\omega > \frac{1}{3}$, hoc tantum euenire poterit, si tang. ω contineatur intra hos limites: tang. $\omega > \frac{1}{3} < \frac{aa+kk}{3kk}$, alioquin motus ante determinatus perpetuo durabit.

§. 41. Quo autem videamus quid eueniat si tang. ω intra praedictos limites contineatur, breuitati consulentes considerabimus

mus casum specialem quo $kk = \frac{2}{5} aa$, vbi limites erunt tang $\omega > \frac{1}{3} < \frac{7}{6}$, quem in finem sumamus tang. $\omega = 1$ ideoque sin ω = cos. $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ex his autem valoribus concludimus priorem motum durare per tempus $t = \frac{6 \eta a}{g \sqrt{2}}$, quo elapso fiet $\frac{ds}{dt} = 4 a \eta$ et $\frac{d\Phi}{dt} t = 4 \eta$. Cum igitur elapso tempore t fiat $\frac{ds}{dt} = 4 a \eta$ et $\frac{d\Phi}{dt} = 4 \eta$, hunc statum tanquam initialem considerare licebit, in quo cum prouolutio perfecta eueniat, elapso hinc tempore t habebimus

$$\frac{ds}{dt} = 4 a \eta + 2 g t (\text{sin. } \omega - \lambda \text{ cos. } \omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4 \eta + \frac{2 g \lambda a t \text{ cos. } \omega}{kk},$$

vndo ponendo $\frac{ds}{dt} = \frac{a d\Phi}{dt}$ fit

$$2 g t (\text{sin. } \omega - \lambda \text{ cos. } \omega) = \frac{2 g \lambda a a t \text{ cos. } \omega}{kk}, \text{ siue}$$

$$1 - \lambda = \frac{\lambda aa}{kk}, \text{ hinc } \lambda = \frac{kk}{aa + kk} = \frac{2}{7};$$

qui valor cum minor sit quam $\frac{1}{3}$, prouolutio perfecta perpetuo durabit.

III. De ascensu globi super plano inclinato.

Tab. II. Fig. 8. §. 42. Consideremus igitur planum IO, cuius inclinatio ad horizontem IH sit OIH = ω, vt ante, verum hoc discrimine, quod cum hic globus ab I versus O ascendat, in praecedentibus calculis etiam angulus ω tanquam negatiuus spectari debeat, sicque seueriores formulae etiamnunc hic locum habebunt, dummodo in iis loco sin. ω scribatur $-$ sin ω, manente cos. ω eiusdem signi. Quo obseruato peruenerit noster globus, elapso tempore $= t$, ex I vsque in S, ponaturque spatium IS $= s$, ita vt celeritas progressiua sit etiamnunc $\frac{ds}{dt}$, celeritas autem gyratoria $= \frac{d\Phi}{dt}$, in sensum SAB directa. Hic igitur ante omnia manifestum est

eſt, globum aſcendere plane non poſſe, niſi ipſi initio in I motus ſiue progreſſiuus ſiue gyratorius ſurſum tendens imprimatur, vnde hos caſus accuratius ſumus proſecuturi.

Exemplum I.

§. 43. Conſideremus primo caſum, quo globo in I ſolus motus progreſſiuus verſus O imprimitur, cuius celeritas ſit f, ita vt initio, quo $t = 0$, fuerit $\frac{ds}{dt} = f$ et $\frac{d\Phi}{dt} = 0$. Quia igitur in initio datur attritus, tota vis frictionis ſe exerit retrorſum, qua ergo motus progreſſiuus retardatur, ſimul vero gyratorius generatur in ſenſum S A B. Pro hoc igitur motu habebuntur iſtae formulae:

$$\text{I. } \frac{dds}{2g\,dt^2} = -\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = +\frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt} = f - 2gt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{2}{3}gt\,\text{coſ.}\,\omega \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2gat\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk},$$

ex quarum aequationum priore porro colligitur

$$s = ft - gtt\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}gtt\,\text{coſ.}\,\omega.$$

Secundum hanc autem legem motus peragetur quamdiu fuerit $\frac{ds}{dt} > \frac{a\,d\Phi}{dt}$, hoc eſt quamdiu

$$f > 2gt\left(\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk}\right) \text{ ideoque}$$

$$t < \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

durabit ergo iſte motus per tempus

$$t = \frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

quo elapſo fiet celeritas progreſſiua

$$\frac{ds}{dt} = \frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk\,\text{ſin.}\,\omega + (aa + kk)\,\text{coſ.}\,\omega}$$

et

et celeritas gyratoria

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{af\, cos.\,\omega}{3kk\, fin.\,\omega + (aa + kk)\, cos.\,\omega},$$

ſpatium vero vsque ad hoc tempus percurſum erit

$$s = \frac{3ffkk\,(3kk\, fin.\,\omega + (2aa + kk)\, cos.\,\omega)}{4g\,(3kk\, fin.\,\omega + (aa + kk)\, cos.\,\omega)^2}.$$

§. 44. Quoniam hae tres formulae valores habent poſitiuos, intelligitur, per totum hoc tempus motum manere ſurſum directum ſimulque globum etiam antrorſum volui, quaecunque fuerit plani inclinatio. Quod ſi ergo globus ex materia conſtet homogenea, vt ſit $kk = \frac{2}{5}aa$, in fine huius primi motus interualli tres valores inuenti erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{5f\, cos.\,\omega}{6\, fin.\,\omega + 7\, cos.\,\omega};$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{5f\, cos.\,\omega}{6a\, fin.\,\omega + 7a\, cos.\,\omega};$$

$$s = \frac{9ff\,(fin.\,\omega + 2\, cos.\,\omega)}{g\,(6\, fin.\,\omega + 7\, cos.\,\omega)^2},$$

tempus autem per quod iſte motus durabit erit

$$t = \frac{3f}{g\,(6\, fin.\,\omega + 7\, cos.\,\omega)}.$$

Ac ſi inſuper ſumamus inclinationem $\omega = 45°$, fiet iſtud tempus

$$t = \frac{3f\sqrt{2}}{13g}\ \text{fec. et}\ \frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = \frac{5}{13}f,\ \text{atque}\ s = \frac{27ff\sqrt{2}}{169.g}.$$

§. 45. Quo nunc motum globi deinceps ſecuturum clarius exponamus, ſit K locus, quousque globus illo primo temporis interuallo pertigerit, ac vocemus breuitatis gratia $IK = p$, vt ſit

$$p = \frac{3ffkk\,(3kk\, fin.\,\omega + (2aa + kk)\, cos.\,\omega)}{4g\,(3kk\, fin.\,\omega + (aa + kk)\, cos.\,\omega)^2},$$

quod ergo tempore

$= 3f$

$$= \frac{3 f k k}{2 g (3 k k \,\text{fin.}\, \omega + (a a + k k) \,\text{cof.}\, \omega)},$$

erit percursum. In K autem vocemus celeritatem progressiuam $= q$, ita vt celeritas gyratoria $= \frac{q}{a}$, eritque

$$q = \frac{a a f \,\text{cof.}\, \omega}{3 k k \,\text{fin.}\, \omega + (a a + k k (\text{cof.}\, \omega}\,;$$

quibus constitutis sequentem motum ita inquiramus, quasi globus in puncto K moueri incepisset hincque elapso tempore t peruenerit in S, vt sit $KS = s$ et celeritates in hoc loco $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$. Hunc igitur motum inuestigari nobis nunc nobis est propositum, vbi tempus per spatium KS elapsum littera t designabimus, quandoquidem motus iste longe aliam legem sequetur ac prior, ideoque etiam diuersam indolem habebit, ita vt in termino K principium continuitatis subito interrumpatur.

§. 46. Quia in k motus globi se ad prouolutionem perfectam composuit, ante omnia nobis erit inquirendum, quamdiu iste motus sit duraturus, atque pro isto motu habebimus sequentes formulas:

$$\frac{d d s}{2 g d t^2} = -\,\text{fin.}\, \omega - \lambda \,\text{cof.}\, \omega \quad \text{et} \quad \frac{d d \Phi}{2 g d t^2} = \frac{\lambda a \,\text{cof.}\, \omega}{k k},$$

vnde integrando colligitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2 g t (\text{fin.}\, \omega + \lambda \,\text{cof.}\, \omega) \quad \text{et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} + \frac{2 g \lambda a t \,\text{cof.}\, \omega}{k k}.$$

Quare si statuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a d \Phi}{d t}$, erit $-\,\text{fin.}\, \omega - \lambda \,\text{cof.}\, \omega = \frac{\lambda a a \,\text{cof.}\, \omega}{k k}$, vnde fit $\lambda = \frac{-k k}{a a \cdot k k}$ tang. ω, qui valor cum sit negatiuus, intelligitur, frictionem vim negatiuam exerere debere, vt attritus impediatur, quam vim actu exercebit dummodo fuerit $\lambda < \frac{1}{3}$ h. e., dummodo fuerit tang. $\omega < \frac{a a + k h}{3 k k}$, sicque

hic

hic denuo duo caſus perpendendi occurrunt, prouti fuerit

$$\text{tang.}\ \omega < \frac{aa+kk}{3kk} \ \text{vel tang.}\ \omega > \frac{aa+kk}{3kk},$$

quos ergo caſus ſeorſim euolui conueniet.

§. 47. *Caſus I.* Sit igitur primo tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, ac revera erit $\lambda = -\frac{kk}{aa+kk}$ tang. ω, quo valore ſubſtituto fiet

$$\frac{ds}{dt} = q - \frac{2gaat\ \text{ſin.}\ \omega}{aa+kk} \ \text{et}\ \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\ \text{ſin.}\ \omega}{aa+kk},$$

vnde cum perpetuo maneat $\frac{ds}{dt} = \frac{ad\Phi}{dt}$, globus prouolutione perfecta progredi perget, neque vllus attritus ſeſe immiſcebit. Spatium autem $KS = s$, quod globus tempore quouis t percurret, erit $s = qt - \frac{gaatt\ \text{ſin.}\ \omega}{aa+kk}$.

§. 48. Poſtquam igitur globus hoc modo ex puncto K exiit, tamdiu ſurſum verſus O progredietur, donec eius celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ penitus euaneſcat, id quod eveniet elapſo tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\ \text{ſin.}\ \omega}$, quo ergo tempore ſpatium percurſum erit $s = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\ \text{ſin.}\ \omega}$. Quare ſi L fuerit terminus, ad quem globus hoc motu pertingere valeat, erit ſpatium $KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\ \text{ſin.}\ \omega}$, tempus vero, quo ex K ad L perueniet erit $\frac{q(aa+kk)}{2gaa\ \text{ſin.}\ \omega}$. Quia autem in L omnem plane motum amiſit, ex hoc puncto iterum per planum inclinatum L K I deſcendere incipiet, lege ea quam ſupra §. 21 et ſeqq. oſtendimus, et quia tang. $\omega < \frac{aa+kk}{3kk}$, totus deſcenſus ſubſequens ſine vllo attritu peragetur.

§. 49. Quo igitur iſtum terminum L, quousque globus aſcendendo pertingit, clarius cognoſcamus, perinde

ac

ac tempus, quo ab initio ex I vsque ad L peruenit, loco Tab. II. litterarum p et q valores assumtos restitui oportet. Cum Fig. 9. igitur sit

$$q = \frac{a\,a\,f\,cos.\,\omega}{3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega},$$

erit spatium

$$KL = \frac{q\,q\,(a\,a + k\,k)}{4\,g\,a\,a\,sin.\,\omega} = \frac{a\,a\,f\,f\,(a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega^2}{4\,g\,sin.\,\omega\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)^2},$$

cui si addatur spatium

$$KI = p = \frac{3\,f\,f\,k\,k\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (2\,a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)}{4\,g\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)^2},$$

reperietur spatium

$$IL = \frac{f\,f\,(a\,a\,cos.\,\omega + 3\,k\,k\,sin.\,\omega)}{4\,g\,sin.\,\omega\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)};$$

vbi notasse iuuabit, si globus celeritate f sine vlla frictione super plano inclinato ascenderet, tum eum spatium confecturum esse $= \frac{ff}{4g}$ sin. ω; vnde patet, spatium inuentum IL hoc spatio esse minus. Denique vero tempus, quo noster globus spatium totum IKL absoluet, reperietur, si ad tempus per IK, quod erat

$$= \frac{3\,f\,k\,k}{2\,g\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)},$$

addatur tempus per KL

$$= \frac{f\,(a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega}{2\,g\,sin.\,\omega\,(3\,k\,k\,sin.\,\omega + (a\,a + k\,k)\,cos.\,\omega)},$$

quocirca colligitur tempus per IL $= \frac{f}{2\,g\,sin.\,\omega}$; vnde patet, hoc tempus non discrepare ab eo, quod globus impendisset, si libere sine vlla frictione ascendisset; tum autem eodem tempore ad maiorem pertigisset altitudinem.

§. 50. *Casus II.* Euoluamus nunc etiam alterum casum, quo tang. $\omega > \frac{aa + kk}{3kk}$, vbi loco λ in nostris formulis scribi oportet $-\frac{1}{3}$, vnde sequitur

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk}:$$

vnde patet fore

$$\frac{ds}{dt} : \frac{a\,d\Phi}{dt} = q - 2gt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega) : q - \frac{2gaat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

tum vero erit

$$\frac{ds}{dt} - \frac{a\,d\Phi}{dt} = 2gt\,(\tfrac{(aa+kk)}{3kk}\,\text{cos.}\,\omega - \text{sin.}\,\omega),$$

qui valor cum sit negatiuus, motus globi eandem legem sequetur, quamdiu fuerit $\frac{a\,d\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, id quod cum deinceps perpetuo eueniat, globus etiam, postquam per K transiit, eandem legem in motu suo obseruabit, ita vt elapso tempore t ambae celeritates futurae sint

$$\frac{ds}{dt} = q - 2gt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

et tempore t globus conficiet spatium

$$KS = s = qt - gtt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega).$$

§. 51. Sit punctum L iterum terminus ad quem globus ascendendo pertinget, et quia hic esse debet $\frac{ds}{dt} = 0$, tempus, quo globus ex K vsque ad L peruenier, erit

$$t = \frac{q}{2g\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega)},$$

ipsum vero spatium erit

$$KL = s = \frac{qq}{4g\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega)}.$$

Totum ergo tempus, quo globus ex I ad L vsque pertingit, erit

$3fkk$

$$+\frac{3fkk}{2g(3kk\,\text{ſin.}\,\omega+(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$
$$+\frac{aaf\,\text{coſ.}\,\omega}{2g(\text{ſin.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega+(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}$$
$$=\frac{f(3kk\,\text{ſin.}\,\omega+(aa-kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2g(\text{ſin.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)(3kk\,\text{ſin.}\,\omega+(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}.$$

§. 52. Verum vbi globus in L vsque peruenit, ibi quidem celeritas progreſſiua $\frac{ds}{dt}$ fiet nulla, at celeritas gyratoria ipſi adhuc remanebit, quae erit

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{q}{a}-\frac{aq\,\text{coſ.}\,\omega}{3kk(\text{ſin.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},\ \text{ſiue}$$
$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{q}{a}.\frac{(3kk\,\text{ſin.}\,\omega-(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{3kk(\text{ſin.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)},$$

quae ergo celeritas adhuc eſt poſitiua, quia

$$3kk\,\text{ſin.}\,\omega > (aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega,$$

ideoque multo magis $\text{ſin.}\,\omega > \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega$. Mox autem cum globus ex L iterum deſcendere inceperit, is amittet hunc motum gyratorium, quod eueniet elapſo tempore $t=\frac{3qkk}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega}$, poſtquam ſcilicet ex K fuerit egreſſus. Quod ſi ergo hinc ſubtrahatur tempus per $KL=\frac{q}{2g(\text{ſin.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega)}$, remanebit tempus poſtquam globus ex L deſcendere incepit

$$=\frac{3q(3kk\,\text{ſin.}\,\omega-(aa+kk)\,\text{coſ.}\,\omega)}{2gaa\,\text{coſ.}\,\omega(3\,\text{ſin.}\,\omega-\text{coſ.}\,\omega)},$$

quod tempus vtique eſt poſitiuum. Ceterum, quia hic globus ex L cum quadam celeritate gyratoria deſcenſum incipiet, eodem prorſus modo per planum inclinatum deſcen-

dit,

dit, quem supra paragrapho 21 et seqq. explicauimus. Verum quoniam totus motus globi, postquam per punctum K transiit, perpetuo secundum eandem legem peragitur, etiam totus motus in iisdem formulis, quas modo tradidimus, comprehendetur, ex quibus, cum sit

$$KS = s = qt - gtt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega),$$

posito $s = 0$ hinc tempus reperietur, quo globus iterum descendendo ad K perueniet, quod erit $= \frac{q}{g(\text{sin.}\,\omega - \frac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega)}$, quod tempus duplo maius est eo, quo ex K ad L vsque descendendo pertigit, atque hoc modo etiam tempus definiri poterit, quo globus, ex K sursum egressus, iterum vsque ad principium I pertinget; tantum enim opus erit poni $s = -p$. Ac si ad hoc tempus insuper addatur tempus, quo globus ab I vsque ad K peruenit, habebitur totum tempus, quo postquam ex I sursum processit, iterum ad I reuertitur.

Exemplum 2.

Tab. II. Fig. 9 §. 53. Ponamus nunc globo in I nullum motum progressiuum esse impressum, sed solum motum gyratorium, sursum vergentem cum celeritate data angulari $= \zeta$, ita vt initio, vbi $t = 0$, fuerit $\frac{ds}{dt} = 0$ et $\frac{d\Phi}{dt} = \zeta$. Quoniam igitur statim ab initio vis frictionis sursum tendit, formulae nostrae erunt

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = -\,\text{sin.}\,\omega + \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega \text{ et}$$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{a\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

vnde integrando fit

$$\frac{ds}{dt} = -\,2gt\,(\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{3}\,\text{cos.}\,\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \zeta - \frac{2gat\,\text{cos.}\,\omega}{3kk},$$

vbi

vbi ex formula priore patet, globum non aſcendere poſſe, niſi ſit $\text{ſin.}\,\omega < \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega$. Quoniam igitur motum deſcenſus iam ſupra determinauimus, ponamus eſſe $\text{ſin.}\,\omega < \frac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega$, ſeu $\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, vt globus ſaltem ſurſum moueri incipiat; tum igitur ipſo initio fuerit $\frac{a\,d\,\Phi}{dt} > \frac{ds}{dt}$, et videamus, quamdiu iſta conditio locum ſit habitura: tamdiu enim etiam motus ſecundum has formulas peragetur. Hunc in finem ſtatuamus $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$ hoc eſt

$$2\,g\,t\,(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega) = \zeta\,a - \frac{2\,g\,a\,a\,t\,\text{coſ.}\,\omega}{3\,k\,k},$$

vnde colligimus

$$t = \frac{3\,\zeta\,a\,k\,k}{2\,g\,((a\,a + k\,k)\,\text{coſ.}\,\omega - 3\,k\,k\,\text{ſin.}\,\omega)},$$

quod ergo tempus erit poſitiuum, dummodo fuerit

$$\text{tang.}\,\omega < \frac{a\,a + k\,k}{3\,k\,k};$$

quare cum per hypotheſin ſit $\text{tang.}\,\omega < \frac{1}{3}$, iſta conditio ſemper adimplebitur, vnde motus ab initio eandem legem ſequetur, vsque ad tempus

$$t = \frac{3\,\zeta\,a\,k\,k}{2\,g\,((a\,a + k\,k)\,\text{coſ.}\,\omega - 3\,k\,k\,\text{ſin.}\,\omega)};$$

elapſo autem hoc tempore fiet

$$\frac{ds}{dt} = + \frac{\zeta\,a\,k\,k\,(\text{coſ.}\,\omega - 3\,\text{ſin.}\,\omega)}{(a\,a + k\,k)\,\text{coſ.}\,\omega - 3\,k\,k\,\text{ſin.}\,\omega} = \frac{a\,d\,\Phi}{d\,t},$$

ſpatium vero interea aſcendendo confectum erit

$$g\,t\,t\,(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega) = \frac{9\,\zeta\,\zeta\,a\,a\,k^4\,(\tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\omega - \text{ſin.}\,\omega)}{4\,g\,((a\,a + k\,k)\,\text{coſ.}\,\omega - 3\,k\,k\,\text{ſin.}\,\omega)^2}.$$

§. 54. Statuamus vt ſupra, hoc tempore

$$t = \frac{3\,\zeta\,a\,k\,k}{2\,g\,((a\,a + k\,k)\,\text{coſ.}\,\omega - 3\,k\,k\,\text{ſin.}\,\omega}$$

globum aſcendendo perueniſſe vsque in K, ac ponamus breuitatis vitatis gratia hoc ſpatium $IK = p$, celeritates vero quas globus hic habebit, ſint

$$\frac{ds}{dt} = q \text{ et } \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a}, \text{ ita vt ſit}$$

$$p = \frac{3\zeta\zeta\, a a k^4 (\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{4g((aa + kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)^2} \text{ et}$$

$$q = \frac{\zeta\, a k k (\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{(aa + kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega},$$

et quia ab hoc termino t vlterius progrediendo nullus datur attritus, motus ſequetur has formulas:

$$\frac{dds}{2g\,dt^2} = \lambda\cos.\omega - \sin.\omega \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\lambda a \cos.\omega}{kk},$$

hincque integrando erit

$$\frac{ds}{dt} = q + 2gt(\lambda\cos.\omega - \sin.\omega) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{a} - \frac{2g\lambda a t\cos.\omega}{kk}.$$

Nunc igitur fiat $\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt}$, vt videamus quamdiu prouolutio perfecta ſit duratura, eritque hinc

$$\lambda\cos.\omega - \sin.\omega = -\frac{\lambda a a \cos.\omega}{kk}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\lambda = \frac{kk}{aa+kk}\tang.\omega,$$

qui valor ob $\tang.\omega < \frac{1}{3}$ multo magis ſemper erit $< \frac{1}{3}$, ideoque prouolutio perfecta, poſtquam globus ad K pertigerit, perpetuo durabit, eritque propterea

$$\frac{ds}{dt} = \frac{a\,d\Phi}{dt} = q - \frac{2gaat\sin.\omega}{aa+kk},$$

haec autem celeritas euaneſcet, quod fiat in L, elapſo tempore $t = \frac{q(aa+kk)}{2gaa\sin.\omega}$, ipſum vero ſpatium percurſum erit $KL = \frac{qq(aa+kk)}{4gaa\sin.\omega}$. Omnia ſcilicet perinde ſe habebunt atque in caſu praecedente, hoc tantum diſcrimine, quod hic litterae p et q per ζ definiantur cum ante per f eſſent definitae.

§. 55.

§. 55. Hinc igitur facile obtinebimus tempus, quo globus ab I per K vsque ad L peruenit, quippe quod, si loco q valorem assumtum restituamus, reperietur

$$= \frac{3\zeta a k k}{2g((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)} + \frac{\zeta k k (aa+kk)(\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{2ga\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)}$$

hoc est $= \frac{\zeta k k}{2ag\sin.\omega}$.

Sicque globus eodem tempore omnem motum amittet, quo, si nulla fuisset frictio, motum amissurus fuisset; praeterea vero totum spatium prodit

$$IL = \frac{3\zeta\zeta a a k^4 (\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{4g((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)^2} + \frac{\zeta\zeta k^4 (aa+kk)(\cos.\omega - 3\sin.\omega)^2}{4g\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk(\sin.\omega)^2}$$

siue

$$IL = \frac{\zeta\zeta k^4 (\cos.\omega - 3\sin.\omega)}{4g\sin.\omega((aa+kk)\cos.\omega - 3kk\sin.\omega)}.$$

§. 56. In his igitur casibus id imprimis notatu dignum occurrit, quod totus motus non secundum eandem legem absoluatur, sed duabus quasi partibus constet, quarum indoles per diuersas formulas analyticas exprimatur, ita vt principium continuitatis, quod alias in omnibus naturae phaenomenis strictissime obseruatur, hic nullum locum inueniat; atque haec est caussa, cur ista phaenomena, quae in motu globorum ob frictionem producuntur, fusius et adcuratius euoluenda sim arbitratus, ne memorato illi principio continuitatis, quod a Philosophis tantopere propugnari solet, nimium tribuatur quam par est. Ceterum hic etiam constitueram eiusmodi globorum motum expendere, quorum centrum grauitatis non in ipsum centrum figurae cadit. Verum quia praesens tractatio iam nimium increuit, hoc argumentum in aliam occasionem reseruabo.

APPLI-