



1785

**Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula  
integrali  $\int Z dz/\sqrt{(1+mzz+nz^4)}$  contentarum denotante  $Z$   
functionem quamcunque rationalem ipsius  $zz$**

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

Record Created:

2018-09-25

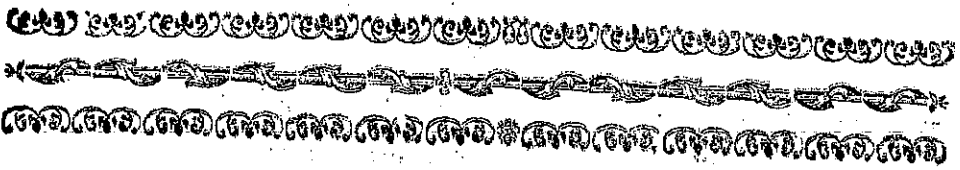
---

**Recommended Citation**

Euler, Leonhard, "Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali  $\int Z dz/\sqrt{(1+mzz+nz^4)}$  contentarum denotante  $Z$  functionem quamcunque rationalem ipsius  $zz$ " (1785). *Euler Archive - All Works*. 581.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/581>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).



**PLENIOR EXPLICATIO**  
 CIRCA COMPARATIONEM QVANTITATVM  
 IN FORMVLA INTEGRALI

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{(1 + m z z + n z^4)}}$$

CONTENTARVM, DENOTANTE Z FVNCTIONEM  
 QVAMCVNQVE RATIONALEM IPSIVS  $z z$ .

Auctore  
**L. E V L E R O.**

§. I.

**E**t si hoc argumentum iam saepius tractavi atque Illu-  
 strissimus *La Grange* plures egregias obseruationes super  
 huiusmodi formulis cum publico communicauit: id tamen  
 neutiquam adhuc satis exploratum, multo minus exhaustum  
 est censendum, sed plurima adhuc maxime abscondita in-  
 uoluere videtur, quae profundissimam indagationem requi-  
 runt atque insignia incrementa Analyseos pollicentur.  
 Imprimis autem ipsae operationes analyticae, quae me pri-  
 mum

mum ad hanc inuestigationem perduxerunt, ita sunt comparatae, vt non nisi per plures ambages totum negotium conficiant, vnde merito etiam nunc methodus directa ad easdem comparationes perducens maxime est desideranda. Praeterea vero vniuersa haec inuestigatio multo latius patet, quam eas formulas integrales, quas primo sum contemplatus, vbi pro littera Z tantum vel quantitatem constantem vel functionem integram ipsius  $z$  huius formae:  $F + Gz + Hz^2 + Iz^3 + Kz^4$  etc. assumi, quibus casibus ostendi, propositis duabus quibuscunque quantitibus huius generis, semper tertiam eiusdem generis inueniri posse, quae a summa illarum discrepet quantitate algebraica, quae quidem euanescat casu quo Z est tantum quantitas constans.

§. 2. Nunc autem obseruauit, easdem comparationes institui posse, si pro Z accipiatur functio quaecunque rationalis ipsius  $z$ , quae scilicet habeat huiusmodi formam:

$$\frac{F + Gz + Hz^2 + Iz^3 + Kz^4 + \text{etc.}}{G + Gz + Hz^2 + Iz^3 + Kz^4 + \text{etc.}}$$

vbi quidem hoc discrimen occurrit, quod differentia inter summam duarum huiusmodi formularum et tertiam formulam eiusdem generis inueniendam non amplius sit quantitas algebraica, veruntamen per logarithmos et arcus circulares semper exhiberi possit; ita vt nunc ista inuestigatio multo latius pateat, quam eam adhuc eram complexus. Atque hinc fortasse, si omnes operationes, quae ad hunc scopum manuducunt, debita attentione perpendantur, faciliorem viam apperire poterunt ad methodum directam perueni-

ueniendi totumque hoc argumentum maxime abstrusum feliciori successu perscrutandi.

§. 3. Quo autem haec omnia clarius perspicere queant, denotet iste character  $\Pi : z$  eam quantitatem transcendentem, quae ex integratione formulae propositae  $\int \frac{Z dz}{\sqrt{(1+mzz+nz^2)}}$  nascitur, dum integrale ita capi assumitur, ut evanescat posito  $z = 0$ ; unde statim manifestum est, fore quoque  $\Pi : 0 = 0$ . Deinde cum  $Z$  inuoluat tantum pares potestates ipsius  $z$ , cuiusmodi etiam in formula radicali insunt, evidens est, si loco  $z$  scribatur  $-z$ , tum valorem quoque istius formulae integralis ideoque etiam characteris  $\Pi : z$  in sui negatiuum abire, ita ut sit  $\Pi : (-z) = -\Pi : z$ . His praenotatis si proponantur duae quaecunque huiusmodi quantitates  $\Pi : p$  et  $\Pi : q$ , semper inuenire licet tertiam quantitatem eiusdem generis  $\Pi : r$ , quae a summa illarum formularum  $\Pi : p + \Pi : q$  differat quantitate vel algebraica vel saltem per logarithmos et arcus circulares assignabili. Regula vero, qua ex datis litteris  $p$  et  $q$  tertia  $r$  elicitur, semper manet eadem, quaecunque functio per litteram  $Z$  designetur: semper enim erit

$$r = \frac{p\sqrt{(1+mqq+nq^2)} + q\sqrt{(1+mpp+np^2)}}{1-nppqq}$$

Hinc autem pro sequentibus combinationibus obseruasse iuuabit fore  $V(1+mrr+nr^2) =$

$$\frac{(mpq + \sqrt{(1+mpp+np^2)}\sqrt{(1+mqq+nq^2)})(1+nppqq) + 2npq(pp+qq)}{(1-nppqq)^2}$$

§. 4. Non solum autem haec inuestigatio adstringitur ad huiusmodi formulas  $\Pi : p$  et  $\Pi : q$  pro arbitrio accipiendas, sed adeo ad quocunque formulas datas potest

extendi, ita vt, quotcunque huiusmodi formulae fuerint propositae, scilicet:

$$\Pi : f + \Pi : g + \Pi : b + \Pi : i + \Pi : k + \text{ etc.}$$

semper noua huiusmodi formula  $\Pi : r$  assignari possit, quae ab illarum summa discrepet quantitate vel algebraica vel saltem per logarithmos et arcus circulares assignabili. Quia etiam formulas illas, quas tanquam datas spectauimus, ita definire licebit, vt discrimin illud, siue algebraicum siue a logarithmis arcubusque circularibus pendens, prorsus euanescat, ita vt futurum sit:

$$\Pi : r = \Pi : f + \Pi : g + \Pi : b + \Pi : i + \Pi : k + \text{ etc.}$$

Atque haec fere sunt, ad quae hanc inuestigationem generaliore, quam hic exponere constitui, mihi quidem extendere licuit; quamobrem singulas operationes, quae me huc perduxerunt, succincte sum propositurus.

### Operatio I.

§. 5. Vniuersam hanc inuestigationem inchoauit a consideratione huius aequationis algebraicae:

$$a + \gamma(xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy = 0,$$

ex qua, cum sit quadratica, tam pro  $x$  quam pro  $y$  radicem extrahendo, colligitur vel

$$y = \frac{-\delta x + \sqrt{(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)xx - \gamma\zeta x^2)}}{\gamma + \zeta xx} \text{ vel}$$

$$y = \frac{-\delta y + \sqrt{(\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)yy - \gamma\zeta y^2)}}{\gamma + \zeta yy},$$

ita vt hinc fiat

$$\sqrt{(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)xx - \gamma\zeta x^2)} = \gamma y + \delta x - \zeta xxy \text{ et}$$

$$\sqrt{(-\alpha\gamma + (\delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta)yy - \gamma\zeta y^2)} = \gamma x + \delta y + \zeta xy.$$

§. 6. Nunc litteras  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\zeta$ , ita definio, vt  
ambae formulae radicales ad formam

$V(1 + mxx + na^2)$  et  $V(1 + myy + ny^2)$ ,  
reducantur, quem in finem facio

$$1^\circ. -\alpha\gamma = k,$$

$$2^\circ. \delta\delta - \gamma\gamma - \alpha\zeta = mk \text{ et}$$

$$3^\circ. -\gamma\zeta = nk,$$

ex quarum aequalitatum prima fit  $\alpha = -\frac{k}{\gamma}$ , ex tertia  
 $\zeta = \frac{-nk}{\gamma}$ , qui valores in secunda substituti praebent

$$\delta\delta = \gamma\gamma + \frac{nk^2}{\gamma\gamma} + mk,$$

ideoque

$$\delta = V(\gamma\gamma + \frac{nk^2}{\gamma\gamma} + mk) = \frac{1}{\gamma} V(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nk^2),$$

vnde aequatio nostra nunc erit

$$-k + \gamma\gamma(xx + yy) + 2xyV(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nk^2) - nkxxyy = 0,$$

hinc igitur ambae nostrae formulae irrationales erunt

$$Vk(1 + mxx + nx^2) = \gamma y + \frac{1}{\gamma} x V(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nk^2) - \frac{nk}{\gamma} xxy,$$

$$Vn(1 + myy + ny^2) = \gamma x + \frac{1}{\gamma} y V(\gamma^4 + m\gamma\gamma k + nk^2) - \frac{nk}{\gamma} xyy.$$

§. 7. Cum nunc ambae quantitates  $x$  et  $y$  ita a  
se inuicem pendeant, quemadmodum aequatio assumpta de-  
clarat, litteras adhuc indefinitas  $\gamma$  et  $k$  ita definiamus,  
vt posito  $x = 0$  fiat  $y = a$ . Oportebit igitur esse  $-k$   
 $+ \gamma\gamma aa = 0$ , ideoque  $k = \gamma\gamma aa$ , quo valore substi-  
tuto aequatio nostra erit

$$0 = \gamma\gamma(xx + yy - aa) + 2\gamma\gamma xyV(1 + maa + na^2)$$

$$- n\gamma\gamma aaxxyy,$$

hincque fiet per  $\gamma\gamma$  diuidendo

$$0 =$$

$$0 = (xx + yy - aa) + 2xy\sqrt{(1 + maa + na^4) - naaxy}.$$

Tum vero ambae nostrae formulae radicales ita exprimentur:

$$\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \frac{y}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{(1 + maa + na^4) - naaxy}$$

$$\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}\sqrt{(1 + maa + na^4) - naaxy}.$$

§. 8. Quo has formulas tractatu faciliores reddamus, ponamus  $\sqrt{(1 + maa + na^4)} = \mathfrak{A}$ , fimilique modo  $\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \mathfrak{X}$  et  $\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \mathfrak{Y}$ , et aequatio nostra erit

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxy = 0,$$

vnde reperitur

$$y = -\frac{\mathfrak{A}x + a\mathfrak{X}}{1 - naax} \text{ et } x = -\frac{\mathfrak{A}y + a\mathfrak{Y}}{1 - naay},$$

vnde patet si fuerit  $y = 0$  fore  $x = a$ ; tum vero erunt formulae radicales

$$\sqrt{(1 + mxx + nx^4)} = \mathfrak{X} = \frac{y}{a} + \frac{\mathfrak{A}x}{a} - naaxy,$$

$$\sqrt{(1 + myy + ny^4)} = \mathfrak{Y} = \frac{x}{a} + \frac{\mathfrak{A}y}{a} - naaxy.$$

§. 9. Quemadmodum autem tam  $y$  per  $x$  quam  $x$  per  $y$  exprimere licuit, ita etiam  $\mathfrak{Y}$  per solum  $x$  et  $\mathfrak{X}$  per solum  $y$  exprimere licebit. Calcule autem instituto reperietur fore.

$$\mathfrak{X} = \frac{(-may + \mathfrak{A}\mathfrak{Y})(1 + naay) - 2nay(aa + yy)}{(1 - naay)^2},$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{(-max + \mathfrak{A}\mathfrak{X})(1 + naax) - 2nax(aa + xx)}{(1 - naax)^2}.$$

§. 10. Præcipue autem circa nostram aequationem

$$xx + yy - aa + 2\mathfrak{A}xy - naaxy = 0$$

notari

notari meretur, quod ternae quantitates  $xx, yy, aa$  perfecte inter se sint permutabiles. Si enim membrum irrationale ad alteram partem transferatur, ut fit

$$xx + yy - aa - naaxxyy = -2Uxy,$$

et quadrata sumantur, restituendo pro  $U^2$  valorem suum  $x + maa + na^2$ , prodibit ista aequatio:

$$\left. \begin{aligned} +x^4 - 2xxyy - 4maaxxyy - 2na^2xxyy + nna^2x^2y^2 \\ +y^4 - 2aaxx & \qquad \qquad - 2naax^2yy \\ +a^4 - 2aayy & \qquad \qquad - 2naaxxy^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

vbi permutabilitas litterarum  $a, x, y$  manifesto in oculos incurrit. In ipsis quidem formulis superioribus, vbi ipsa quantitas  $a$  ingreditur, permutabilitas non adeo est manifesta, sed prorsus elucebit, si loco  $a$  scribamus  $-b$ , itemque  $\mathfrak{B}$  loco  $U$ ; tum enim, quemadmodum erat

$$y = -\frac{x\mathfrak{B} - b\mathfrak{X}}{1 - nb\mathfrak{b}xx} \text{ et } x = -\frac{y\mathfrak{B} - b\mathfrak{Y}}{1 - nb\mathfrak{b}yy},$$

ita erit  $b = \frac{-x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$ ; similique modo pro formulis radicalibus seu litteris maiusculis erit

$$\mathfrak{Y} = \frac{(mbx + \mathfrak{B}\mathfrak{X})(1 + nb\mathfrak{b}xx) + 2nbx(bb + xx)}{(1 - nb\mathfrak{b}xx)^2},$$

$$\mathfrak{X} = \frac{(mby + \mathfrak{B}\mathfrak{Y})(1 + nb\mathfrak{b}yy) + 2nby(bb + yy)}{(1 - nb\mathfrak{b}yy)^2},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

sicque perfecta permutabilitas perspicitur.

## Operatio II.

§. 11. Differentiemus nunc nostram aequationem algebraicam assumtam, quae est

$$xx + yy - aa + 2Uxy - naaxxyy = 0,$$



et aequatio differentialis erit

$$dx(x + \mathcal{A}y - naaxyy) + dy(y + \mathcal{A}x - naaxxy) = 0,$$

siue

$$\frac{dx}{y + \mathcal{A}x - naaxxy} + \frac{dy}{x + \mathcal{A}y - naaxxy} = 0.$$

Ex superioribus autem constat esse

$$y + \mathcal{A}x - naaxyy = a\mathcal{X} \text{ et}$$

$$x + \mathcal{A}y - naaxxy = a\mathcal{Y},$$

unde aequatio differentialis hanc induet formam:

$$\frac{dx}{a\mathcal{X}} + \frac{dy}{a\mathcal{Y}} = 0, \text{ siue}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^2)}} = 0.$$

§. 12. Inuenta igitur hac aequatione differentiali denotet iste character  $\Gamma : x$  integrale  $\int \frac{dx}{\mathcal{X}}$ , et character  $\Gamma : y$  integrale  $\int \frac{dy}{\mathcal{Y}}$ , utroque integrali ita sumto, ut evanescat posito vel  $x = 0$  vel  $y = 0$ , atque aequationem illam differentialem integrando fiet  $\Gamma : x + \Gamma : y = C$ . Cum autem sumto  $x = 0$  fiat etiam  $\Gamma : x = 0$  et  $y = a$ , erit constans illa  $C = \Gamma : a$ , ita ut habeamus hanc aequationem:  $\Gamma : x + \Gamma : y = \Gamma : a$ .

§. 13. Quoniam hic nulla amplius variabilitatis ratio teneretur, patet, sumtis binis litteris  $x$  et  $y$  pro libitu, litteram  $a$  ita semper definiri posse, ut fiat

$$\Gamma : a = \Gamma : x + \Gamma : y.$$

Si enim in §. 10. loco  $b$  scribatur  $-a$ , sumi debet

$$a = \frac{x\mathcal{Y} + y\mathcal{X}}{1 - nxxyy},$$

quae comparatio iam casum constituit specialem investigationis

tionis generalis, quam suscepimus. Si enim loco  $x$  et  $y$  scribamus  $p$  et  $q$ , at  $r$  loco  $a$ , tum vero  $P$ ,  $Q$  et  $R$  loco  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , atque si, sumtis pro lubitu quantitibus  $p$ ,  $q$ , capiatur  $r = \frac{pQ + qP}{1 - nppq}$ ; tum utique erit  $\Gamma : r = \Gamma : p + \Gamma : q$ , ita ut hoc casu discrimen illud inter  $\Gamma : r$  et summam  $\Gamma : p + \Gamma : q$  plane euanescat. Sicque iam evoluimus casum, quo in nostra forma generali  $\int \frac{Z dz}{\sqrt{(1 + mzz + nzz^2)}}$  pro  $Z$  sumitur quantitas constans.

### Operatio III.

§. 14. Quo nunc propius ad nostrum institutum accedamus, sint  $X$  et  $Y$  tales functiones ipsarum  $x$  et  $y$ , qualem volumus esse  $Z$  ipsius  $z$ , et quoniam modo invenimus

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + mxx + nxx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1 + myy + nyy^2)}} = 0,$$

ponamus esse

$$\frac{X dx}{\sqrt{(1 + mxx + nxx^2)}} + \frac{Y dy}{\sqrt{(1 + myy + nyy^2)}} = dV,$$

ita ut, si  $X$  et  $Y$  essent quantitates constantes, foret  $dV = 0$ .

Hinc ergo si loco  $\frac{dy}{\sqrt{(1 + myy + nyy^2)}}$  scribamus  $\frac{-dx}{\sqrt{(1 + mxx + nxx^2)}}$ ,

fiet  $dV = \frac{(X - Y) dx}{\sqrt{(1 + mxx + nxx^2)}}$ , vel etiam

$$dV = \frac{(Y - X) dy}{\sqrt{(1 + myy + nyy^2)}}.$$

At si loco radicalium suos valores rationales scribamus, erit

$$dV = \frac{a(X - Y) dx}{y + \frac{1}{2}x - n a a x x y} \text{ vel}$$

$$dV = \frac{a(Y - X) dy}{x + \frac{1}{2}y - n a a x y y}.$$

§. 15. Cum autem nulla sit ratio, cur istud differentiale  $dV$  potius per  $dx$  quam per  $dy$  exprimamus;

consultum erit nouam quantitatem in calculum introducere, quae aequae referatur ad  $x$  et ad  $y$ . Hunc in finem faciamus productum  $xy = u$ , ac statuamus

$$\frac{dx}{y + 2x - naaxy} = - \frac{dy}{x + 2y - naaxy} = s du.$$

Hinc igitur erit

$$dx = s du (y + 2x - naaxy) \text{ et}$$

$$dy = -s du (x + 2y - naaxy),$$

ex quibus colligimus

$$y dx + x dy = s du (yy - xx) = du,$$

ficque habebimus  $s = \frac{1}{yy - xx}$ , ita vt habeamus:

$$\frac{dx}{y + 2x - naaxy} = - \frac{dy}{x + 2y - naaxy} = \frac{du}{yy - xx}.$$

Hoc igitur valore substituto nanciscimur:

$$dV = \frac{a(X - Y) du}{yy - xx} = \frac{-adu(X - Y)}{xx - yy}.$$

§. 16. Cum autem  $X$  et  $Y$  sint functiones rationales pares ipsarum  $x$  et  $y$ , in quibus tantum insunt potestates pares harum litterarum; facile intelligitur, formulam  $X - Y$  semper esse diuisibilem per  $xx - yy$  et quatum praeter productum  $xy = u$  insuper inuoluere summam quadratorum  $xx + yy$ ; quamobrem statuamus  $xx + yy = t$ , et cum aequatio nostra fundamentalis fiat

$$t - aa + 22u - naauu = 0,$$

ex ea fit

$$t = aa - 22u + naauu,$$

ita vt  $t$  aequetur functioni rationali ipsius  $u$ . Quod si ergo hic valor vbique loco  $t$  scribatur, differentiale nostrum quaesitum  $dV$  per solam variabilem  $u$  exprimetur, ita vt  
posito

posito  $dV = U du$  semper fit  $U$  functio rationalis ipsius  $u$ , quae ergo si fuerit integra, tum  $V$  aequabitur functioni algebraicae ipsius  $u$ ; sin autem sit functio fracta, tum integrale  $V = \int U du$  semper per logarithmos et arcus circulares exhiberi poterit. Hoc ergo integrale si ita capiatur, ut evanescat posito  $u = xy = 0$ , id etiam evanescet posito  $x = 0$  vel  $y = 0$ . Atque hinc integrando imptrebimus:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^2)}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^2)}} = C + V = C + \int U du.$$

§. 17. Quod si igitur characteres  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$  denotent valores horum integralium, ita ut vtrumque evanescat sumto vel  $x = 0$  vel  $y = 0$ , quoniam facto  $x = 0$  per hypothefin fit  $y = a$ , manifestum est constantem hanc fore  $\Pi : a$ , sicque aequatio finita resultabit ista:

$$\Pi : x + \Pi : y = \Pi : a + \int U du.$$

§. 18. Accuratus autem in valores huius fractionis  $U$  pro quouis casu inquiramus. Ac primo quidem, si sumatur

$$Z = a + \beta z z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.}$$

erit simili modo

$$X = a + \beta x x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc. et}$$

$$Y = a + \beta y y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \text{etc.,}$$

quare cum inuenerimus

$$dV = U du = - \frac{a du(x-y)}{xx-yy}, \text{ erit}$$

$$U = - \frac{a(x-y)}{xx-yy}, \text{ ideoque}$$

$$U = - \frac{a(\beta(xx-yy) + \gamma(x^2-y^2) + \delta(x^3-y^3))}{xx-yy},$$

B 3

vnde

vnde fit

$$U = -a\beta - a\gamma(xx + yy) - a\delta(x^4 + xx yy + y^4).$$

Cum igitur fit  $xx + yy = t$  et  $xy = u$ , erit

$$U = -a\beta - a\gamma t - a\delta(tt - uu),$$

vnde cum fit

$$t = aa - 2\mathcal{A}u + naauu,$$

calculo subducto fiet

$$\begin{aligned} \int U du = & -a\beta u - a\gamma(aa u - \mathcal{A}uu + \frac{1}{3}naau^2) \\ & - a\delta(a^4 uu - 2aa\mathcal{A}uu + \frac{2}{3}na^4 u^2 - n\mathcal{A}a^2 u^3 + \frac{1}{3}n^2 a^4 u^5) \\ & + \frac{1}{3}\mathcal{A}^2 u^3 \\ & + \frac{1}{5}u^5. \end{aligned}$$

Atque hinc intelligitur, si functio  $Z$  ad altiores potestates exsurgat, quomodo valor integralis ipsius  $\int U du$  inde inueniri queat.

§. 19. Sin autem  $Z$  fuerit functio fracta, scilicet

$$Z = \frac{\alpha + \beta z z + \gamma z^4}{\zeta + \eta z z + \theta z^4}, \text{ hincque}$$

$$X = \frac{\alpha + \beta x x + \gamma x^4}{\zeta + \eta x x + \theta x^4} \text{ et } Y = \frac{\alpha + \beta y y + \gamma y^4}{\zeta + \eta y y + \theta y^4}, \text{ erit}$$

$$X - Y = \frac{(\beta\zeta - \alpha\eta)(xx - yy) + (\gamma\zeta - \alpha\theta)(x^4 - y^4) + (\gamma\eta - \beta\theta)x^2 y^2 (x^2 - y^2)}{\zeta\zeta + \zeta\eta(xx + yy) + \zeta\theta(x^4 + y^4) + \eta^2 x^2 y^2 + \eta\theta x^2 y^2 (xx + yy) + \theta\theta x^4 y^4}.$$

Hinc igitur introductis litteris  $t$  et  $u$  erit

$$\frac{X - Y}{xx - yy} = \frac{\beta\zeta - \alpha\eta + (\gamma\zeta - \alpha\theta)t + (\gamma\eta - \beta\theta)uu}{\zeta\zeta + \zeta\eta t + \zeta\theta(tt - 2uu) + \eta\eta uu + \eta\theta t uu + \theta\theta u^2},$$

quam ob rem cum fit

$$U = -\frac{a(X - Y)}{xx - yy}, \text{ ob}$$

$$t = aa - 2\mathcal{A}u + naauu,$$

manifestum est, integrale formulae  $\int U du$  nisi fuerit algebraicum, semper, concessis logarithmis et arcubus circularibus, exhiberi posse. Sicque per has tres operationes omnia prae-

praefitimus, quibus opus est ad omnia problemata huc spectantia soluenda.

### Problema I.

§. 20. Si  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$  denotent valores formularum integralium:

$$\int \frac{X dx}{\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}} \text{ et } \int \frac{Y dy}{\sqrt{(1 + myy + ny^4)}},$$

vbi  $X$  et  $Y$  sint functiones pares similes ipsarum  $x$  et  $y$ , atque dentur binae huiusmodi formulae  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$ ; inuenire tertiam formulam eiusdem generis  $\Pi : z$ , ut sit  $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + W$ , ita ut  $W$  sit functio vel algebraica vel per logarithmos et arcus circulares assignabilis.

### Solutio.

Cum dentur binae quantitates  $x$  et  $y$ , ex iis formantur radicales

$$\mathfrak{X} = \sqrt{(1 + mxx + nx^4)} \text{ et } \mathfrak{Y} = \sqrt{(1 + myy + ny^4)},$$

ex quibus definiatur quantitas  $z$ , eodem modo quo supra litteram  $a$  per  $x$  et  $y$  definire docuimus, ita ut sit  $z = \frac{x\mathfrak{Y} + y\mathfrak{X}}{1 - nxxyy}$  eiusque valor irrationalis

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{(1 + mzz + nz^4)} = \frac{(mxy + \mathfrak{X}\mathfrak{Y})(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

tum in superioribus formulis vbique loco  $a$  et  $\mathfrak{A}$  scribamus  $z$  et  $\mathfrak{Z}$  et capiatur  $u = \frac{z(x-y)}{xx-yy}$ , quam quantitatem vidimus semper reduci posse ad functionem ipsius  $u$ , existente  $u = xy$ , ac ponatur  $V = \int U du$ , in qua integratione quantitates  $z$  et  $\mathfrak{Z}$  pro constantibus sunt habendae, ita ut littera  $V$  spectari possit tanquam functio ipsius  $u = xy$ , quandoquidem etiam  $z$  et  $\mathfrak{Z}$  per  $x$  et  $y$  determinantur.

Probe

Probe autem teneatur, in ista formula integrali solam quantitatem  $a$  ut variabilem esse tractandam. Hac igitur quantitate  $V$  inuenta erit  $\Pi : x + \Pi : y = \Pi : z + V$ , unde cum debeat esse  $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + W$ , patet esse  $W = -V$ , ideoque quantitatem vel algebraicam, vel per logarithmos et arcus circulares assignabilem.

### Corollarium 1.

§. 21. Totum ergo negotium hic redit ad integrationem formulae  $U du$ , existente  $u = xy$  et  $U = -\frac{z(x-y)}{xx-yy}$ , quam supra vidimus semper per  $u$  exprimi posse, siquidem in hac integratione litterae  $z$  et  $\int$  ut quantitates constantes tractentur.

### Corollarium 2.

§. 22. Cum igitur pro data indole binarum functionum  $X$  et  $Y$  haec integratio nulla laboret difficultate, ipsumque integrale per  $u$ , hoc est per  $xy$  exprimatur, cuius valorem ex datis quantitibus  $x$  et  $y$  semper exhibere liceat, loco quantitatis  $V$  scribemus in posterum characterem  $\Phi : xy$ , unde pro quibusque aliis litteris loco  $x$  et  $y$  assumptis intelligitur significatus characterum  $\Phi : pq, \Phi : ab$  etc.

### Corollarium 3.

§. 33. Hoc igitur characterem recepto, si pro datis quantitibus  $x$  et  $y$  capiamus  $z = \frac{x^2 + y^2}{1 - nxxyy}$ , unde fit

$$\int = \frac{(nxy + \Phi)(1 + nxxyy) + 2nxy(xy)}{(1 - nxxyy)^2},$$

erit  $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy$ .

Pro-

Problema 2.

§. 24. Seruatis omnibus characteribus, quos hactenus explicauimus, si dentur ternae formulae,  $\Pi : p$ ,  $\Pi : q$ ,  $\Pi : r$ ; inuenire quartam eiusdem generis  $\Pi : z$ , ut fiat

$$\Pi : z = \Pi p + \Pi q + \Pi r + W,$$

ita ut  $W$  sit quantitas algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares assignabilis.

Solutio.

Ex datis binis quantitibus  $p$  et  $q$ , ideoque etiam  $\mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{Q}$  inde oriundis, capiatur  $x = \frac{p\mathfrak{Q} + q\mathfrak{P}}{1 - nppqq}$ , simulque

$$\mathfrak{X} = \frac{(mpq + p\mathfrak{Q})(1 + nppqq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppqq)^2}.$$

Tum vero etiam colligatur valor characteris  $\Phi : pq$ , eritque per praecedentia

$$\Pi : x = \Pi : p + \Pi : q - \Phi : pq, \text{ siue}$$

$$\Pi : p + \Pi : q = \Pi : x + \Phi : pq,$$

quo valore substituto erit

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : r + \Phi : pq + W.$$

Ex praecedente autem problemate, si loco  $y$  hic scribamus  $r$  et capiamus  $z = \frac{x\mathfrak{R} + r\mathfrak{X}}{1 - nrrxx}$ , vnde fit

$$\mathfrak{Z} = \frac{mrx + \mathfrak{R}\mathfrak{X}(1 + nrrxx) + 2nrz(rr + xx)}{(1 - nrrxx)^2}, \text{ erit}$$

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : r - \Phi : rx,$$

qua forma cum praecedente collata colligitur

$$W = -\Phi : pq - \Phi : rx, \text{ ita ut sit}$$

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r - \Phi : pq - \Phi : rx.$$



Problema 3.

§. 25. Propositis huiusmodi formulis:  $\Pi : p$ ,  $\Pi : q$ ,  $\Pi : r$ ,  $\Pi : s$ , inuenire quintam eiusdem generis  $\Pi : z$ , ut fiat  $\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : s + W$ , ita ut  $W$  sit quantitas algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares assignabilis.

Solutio.

Ex datis binis  $p$  et  $q$  quaeratur  $x$ , ut sit  $x = \frac{p\Omega + q\Phi}{1 - nppq}$ ,

item

$$x = \frac{(mpq + p\Omega)(1 + nppq) + 2npq(pp + qq)}{(1 - nppq)^2}$$

eritque  $\Pi : x = \Pi : p + \Pi : q - \Phi : pq$ . Simili modo ex binis datis  $r$  et  $s$  quaeratur  $y$ , ut sit  $y = \frac{r\Omega + s\Phi}{1 - nrrs}$ , eritque

$$y = \frac{(mrs + r\Omega)(1 + nrrs) + 2nrs(rr + ss)}{(1 - nrrs)^2}$$

tum vero

$$\Pi : y = \Pi : r + \Pi : s - \Phi : rs.$$

Nunc denique ex inuentis  $x$  et  $y$  sumatur  $z = \frac{x\Phi + yx}{1 - nxyy}$  et

$$z = \frac{(mxy + yx)(1 + nxyy) + 2nxy(xy + yy)}{(1 - nxyy)^2}$$

eritque  $\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y - \Phi : xy$ . Quod si ergo loco  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$  valores modo inuenti substituantur, fiet

$$\Pi : z = \Pi : p + \Pi : q + \Pi : r + \Pi : s - \Phi : pq - \Phi : rs - \Phi : xy.$$

Corollarium 1.

§. 26. Hinc iam abunde intelligitur, si proponantur quotcunque huiusmodi formulae, quemadmodum nouam eiusdem generis  $\Pi : z$  inuestigari oporteat, quae ab illis iunctim sumtis discrepet quantitate algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares assignabili.

Corol-

Corollarium 2.

§. 27. Quod si omnes illae formulae fuerint inter se aequales earumque numerus =  $\lambda$ , semper noua formula  $\Pi : z$  inueniri poterit, vt sit  $\Pi : z = \lambda \Pi : p + W$ , existente  $W$  quantitate vel algebraica, vel per logarithmos arcusue circulares assignabili. Quin etiam, duabus huiusmodi formulis  $\Pi : p$  et  $\Pi : q$  propositis, inueniri poterit  $\Pi : z$ , vt sit  $\Pi : z = \lambda : \Pi : p + \mu \Pi : q + W$ .

Scholion.

§. 28. Hoc igitur modo non solum principia et fundamenta, quibus hoc argumentum innititur, succincte ac dilucide mihi quidem exposuisse videor: sed hoc argumentum etiam multo latius amplificaui quam adhuc est factum. Semper autem maxime est optandum, vt via magis directa detegatur, quae ad easdem inuestigationes perducatur. Nemo enim certe dubitabit, quin hinc maxima in vniuersam Analyfin incrementa essent redundatura.

Applicatio.

ad quantitates transcendentas

in forma  $\int \frac{dz(\alpha + \beta z z)}{\sqrt{(1 + m z z + n z^4)}} = \Pi : z$  contentas.

§. 29. Cum igitur hic sit  $Z = \alpha + \beta z z$ , propositis duabus formulis huius generis  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$  sumtoque  $z = \frac{x y + y^2}{1 - n x x y y}$ , hincque

$$\int \frac{(m x y + \beta y)(1 + n x x y y) + 2 n x y (x^2 + y^2)}{(1 - n x x y y)^2},$$

ex §. 18. vbi  $u = x y$  et  $a = z$ , erit

C 2

$\Pi : z$

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta x y z,$$

ita vt character ante adhibitus  $\Phi : y$  hoc casu accipiat valorem  $\beta x y z$ . Huius igitur regulae ope propositis duabus huiusmodi formulis  $\Pi : x$  et  $\Pi : y$ , tertia  $\Pi : z$  semper reperiri potest, quae a summa illarum differat quantitate algebraica  $\beta x y z$ .

§. 30. Ponamus igitur quocumque huiusmodi formulas transcendentis proponi:

$$\Pi : a, \Pi : b, \Pi : c, \Pi : d, \Pi : e, \Pi : f, \Pi : g, \text{ etc.}$$

et ex singulis quantitatibus  $a, b, c, d, e$ , colligi valores irracionales litteris germanicis insignitas:

$$\mathfrak{A} = \sqrt{(1 + m a a + n a^2)}; \mathfrak{B} = \sqrt{(1 + m b b + n b^2)};$$

$$\mathfrak{C} = \sqrt{(1 + m c c + n c^2)}; \mathfrak{D} = \sqrt{(1 + m d d + n d^2)};$$

etc.

etc.

semper noua formula eiusdem generis exhiberi poterit, quae a summa earum discrepet quantitate algebraica, quantumque etiam fuerit earum formularum datarum numerus. Operationes autem ad hunc finem perducentes commodissime sequenti modo instituentur.

§. 31. Primo scilicet ex binis datarum  $a$  et  $b$  quaeratur  $p$ , vt fit

$$p = \frac{a\mathfrak{B} + b\mathfrak{A}}{1 - n a a b b} \text{ et } \mathfrak{P} = \frac{(m a b + \mathfrak{A}\mathfrak{B})(1 + n a a b b) + 2 n a b (a a + b b)}{(1 - n a a b b)^2}.$$

Deinde ex hac quantitate  $p$ , cum datarum tertia  $c$  iuncta, definiatur  $q$ , vt fit

$$q = \frac{p\mathfrak{C} + c\mathfrak{P}}{1 - n c c p p} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{(m c p + \mathfrak{C}\mathfrak{P})(1 + n c c p p) + 2 n c p (c c + p p)}{(1 - n c c p p)^2}.$$

Tertio ex hac quantitate  $q$  cum quarta datarum  $d$  iuncta quae-

quaeratur  $r$ , vt fit

$$r = \frac{qD + dD}{1 - n d d q q} \text{ et } \mathfrak{N} = \frac{(m d q + D Q)(1 + n d d q q) + 2 n d q (d d + q q)}{(1 - n a d q q)^2}$$

Quarto ex ista quantitate  $r$  cum quinta datarum  $e$  definiatur  $s$ , vt fit

$$s = \frac{rE + eN}{1 - n e e r r} \text{ et } \mathfrak{S} = \frac{(m e r - EN)(1 + n e e r r) + 2 n e r (e e + r r)}{(1 - n e e r r)^2}$$

Haeque operationes continuentur donec omnes quantitates datae in computum fuerint ductae.

§. 32. His autem omnibus valoribus inuentis, sequentes comparationes desideratae ordine ita se habebunt:

- I.  $\Pi : p = \Pi : a + \Pi : b + \beta a b p$
- II.  $\Pi : q = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \beta a b p$   
 $\phantom{\Pi : q = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c +} + \beta c p q$
- III.  $\Pi : r = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \beta a b p$   
 $\phantom{\Pi : r = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d +} + \beta c p q$   
 $\phantom{\Pi : r = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d +} + \beta d q r$
- IV.  $\Pi : s = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \beta a b p$   
 $\phantom{\Pi : s = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e +} + \beta c p q$   
 $\phantom{\Pi : s = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e +} + \beta d q r$   
 $\phantom{\Pi : s = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e +} + \beta e r s$
- V.  $\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f + \beta a b p$   
 $\phantom{\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f +} + \beta c p q$   
 $\phantom{\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f +} + \beta d q r$   
 $\phantom{\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f +} + \beta e r s$   
 $\phantom{\Pi : t = \Pi : a + \Pi : b + \Pi : c + \Pi : d + \Pi : e + \Pi : f +} + \beta f s t$

etc.

etc.

§. 33. Cum igitur ista formula transcendens:

$$\Pi : z = \int \frac{dz (\alpha + \beta z z)}{\sqrt{(1 + m z z + z^4)}}$$

C 3

in

in se contineat arcus omnium sectionum conicarum a vertice sumtos, harum formularum ope, quotcunque proponantur arcus in quavis sectione conica, qui omnes a vertice sint sumti, semper novus in eadem sectione conica arcus pariter a vertice abscindi poterit, qui a summa illorum arcuum datorum discrepet quantitate algebraice assignabili. Quin etiam nihil impedit, quo minus aliqui inter arcus datos capiantur negativi, quandoquidem iam annotauimus esse  $\Pi : (-z) = -\Pi : z$ , ita vt nostra determinatio etiam accommodari possit ad arcus inter terminos quoscunque interceptos. Hocque modo tractatio, quam nuper circa comparationem talium arcuum dedi, multo generalior reddi poterit.

§. 34. Ceterum, quemadmodum hoc casu, quo sumimus  $Z = a + \beta z z$ , character supra vsurpatus  $\Phi : xy$  abiit in  $\beta x y z$ , dum scilicet ex binis quantitibus  $x$  et  $y$ , secundum praecepta data tertia  $z$  determinatur: ita etiam, quaecunque alia functio loco  $Z$  adhibeatur, quoniam posuimus  $\Phi : xy = a \int \frac{(x-y) du}{x^2 - y^2}$ , existente  $u = xy$ , integratione absoluta functio inde resultans tantum quantitatem  $u$  cum litteris  $a$  et  $\mathcal{A}$  continebit, quandoquidem littera  $t$  ita exprimebatur:  $t = a a - 2 \mathcal{A} u + n a a u u$ , cum inuento integrali vbique loco  $u$  scribatur  $xy$ , at vero loco  $a$  et  $\mathcal{A}$  litterae  $z$  et  $\mathcal{B}$ ; atque hoc modo obtinebitur valor characteris  $\Phi : xy$  pro quouis casu proposito, quae functio, nisi fuerit algebraica, semper per logarithmos et arcus circulares exhiberi poterit, siquidem, vti assumimus, littera  $Z$  fuerit functio rationalis par ipsius  $z$ .