1784

Calculs sur les Ballons aérostatiques faits par le feu M. Léonard Euler, tels qu'on les a trouvés sur son ardoise, après sa mort arrivée le 7 septembre 1783

Leonhard Euler

CALCULS

Sur les Ballons aérostatiques faits par feu M. Léonard Euler, tels qu'on les a trouvés sur son ardoise, après sa mort arrivée le 7 Septembre 1783.

AVERTISSEMENT.

L'EXPÉRIENCE faite à Annonai, le 5 Juin 1783, par M.rs Montgolfier, a montré la possibilité d'élever dans l'air des corps d'une grande capacité relativement à leur pesanteur, en les remplissant d'un fluide expansible plus léger que l'air de l'atmosphère, & dont cependant l'élasticité fût en équilibre avec celle de l'air: à peine fut-elle connue que les Savans de l'Europe s'empressèrent de s'occuper d'un objet qui offroit à presque toutes les Sciences des questions nouvelles à résoudre, donnoit à quelques-uns l'espérance de se procurer un nouveau moyen de découvertes, & intéressoit la curiosité par la foule des applications réelles ou chimériques, que présentoit au premier coup-d'œil le moyen de parcourir un élément qui jusqu'alors nous avoit été fermé.

M. Euler ne put être instruit que peu de temps avant sa mort, de la découverte de M. Montgolfier. L'idée de chercher les loix du mouvement vertical d'un globe qui s'élève dans un air calme, en vertu de la force ascensionnelle qu'il doit à sa légèreté, a été la première qui se soit présentée à son esprit: il essaya sur le champ d'appliquer le calcul à cette question; & lorsqu'il fut surpris par la mort, la planche noire sur laquelle il écrivoit avec de la craie, depuis qu'il étoit presque privé de la vue, étoit chargée de ces calculs, les derniers qui aient été faits par ce grand homme, aussi singulier peut-être par le nombre incroyable de ses travaux, que par la profondeur & la force de son génie.

L'Académie des Sciences, à laquelle le fils de M. Euler, son

son successeur dans la place d'Associé-Étranger qu'il occupoit parmi nous, a bien voulu envoyer une copie de ces calculs, s'est empressée de les publier, comme un monument précieux qui renferme les dernières pensées d'un des hommes qui ont fait le plus d'honneur aux Sciences; comme une preuve singulière de la vigueur de tête, qui peut subsister encore peu d'heures avant l'instant, où une cause inconnue va détruire les ressorts secrets de l'intelligence & de la vie; enfin, comme un honneur rendu à l'auteur de la nouvelle découverte, puisque ce même essai de calcul prouve l'intérêt qu'elle avoit excité dans un de ces hommes dont le suffrage est la plus digne récompense que le génie puisse ambitionner.

SIT globi aërostatici radius $= a$, & pondus $= M$, eritque ejus volumen $= \frac{4}{3}\pi a^3$, denotante π peripheriam circuli, cujus diameter $= 1$. Sit altitudo columnæ aëreæ $= k = 24000$ ped. circiter, & si ponamus globum pervenisse ad altitudinem $AM = x$, erit pressio aëris $= e^{-\frac{x}{k}}$.

Sit celeritas globi in puncto $M = v$, & pondus globi aërei $= N$, ob superficiem hemisphærii $= \frac{\pi aa}{2}$ erit resistentia in hoc puncto $M = \frac{vv}{4g} \cdot \frac{\pi aa}{2} \cdot \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3N}{8a} \cdot \frac{vv}{4g}$, denotante g altitudinem lapsûs gravium uno minuto secundo.

Principia mechanica suppeditant hanc æquationem: $2v\partial v = \frac{4g\partial x}{M} \cdot P$, existente ∂x elemento altitudinis Mm &

P vi ſollicitante, quæ componitur expreſſione aëris, pondere globi & reſiſtentiâ ita ut ſit

$$P = Ne^{-\frac{x}{k}} - M - \frac{3N}{8a} \cdot \frac{vv}{4g} \cdot e^{-\frac{x}{k}},$$

unde fit

$$2v\partial v = \frac{4g\partial x}{M}\left(Ne^{-\frac{x}{k}} - M - \frac{3N}{8a} \cdot \frac{vv}{4g} \cdot e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

ſive

$$2v\partial v = 4g\partial x \frac{N}{M} e^{-\frac{x}{k}} - 4g\partial x - \frac{3}{8a} \cdot \frac{N}{M} \cdot vv\partial x e^{-\frac{x}{k}},$$

Sit $\frac{N}{M} = \lambda$, erit

$$2v\partial v + \frac{3\lambda}{8a} \cdot vve^{-\frac{x}{k}}\partial x = 4g\partial x(\lambda e^{-\frac{x}{k}} - 1),$$

cujus æquationis integrale, poſito $\frac{8a}{3\lambda} = b$, erit

$$vve^{\frac{x}{b}} = \int 4g\partial x\left(\lambda - 1 - \frac{\lambda x}{k}\right)e^{\frac{x}{b}},$$

quod ita repræſentetur :

$$vve^{\frac{x}{b}} = 4\lambda g\int e^{\frac{x}{b}}\partial x\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} - \frac{x}{k}\right) = \frac{4\lambda g}{k}\int e^{\frac{x}{b}} x(f - x),$$

exiſtente $f = \frac{(\lambda - 1)k}{\lambda}$.

Eſt verò

$$\int e^{\frac{x}{b}}\partial x(f - x) = b(b + f)(e^{\frac{x}{b}} - 1) - be^{\frac{x}{b}}x,$$

ergo

$$vve^{\frac{x}{b}} = \frac{4\lambda gb}{k}\left[(b + f)(e^{\frac{x}{b}} - 1) - e^{\frac{x}{b}}x\right],$$

unde fit

$$vv = \frac{4\lambda gb}{k}\left[(b + f)(1 - e^{-\frac{x}{b}}) - x\right],$$

quæ expreſſio determinat celeritatem globi in quâvis altitudine

Pro determinandâ altitudine maximâ, ad quam globus pertingere poteſt, ſtatuatur celeritas v, ejuſve quadratum vv, evaneſcens in punčto H, ponaturque elevatio $AH = h$, quæ igitur definitur æquatione $(b+f)(1-e^{-\frac{h}{b}})-h=0$, ex quâ fit $b+f=\frac{h}{1-e^{-\frac{h}{b}}}=\frac{he^{\frac{h}{b}}}{e^{\frac{h}{b}}-1}$. Sit $f=nb$, erit $b+f=(n+1)b$, & quia h præ b eſt numerus valde magnus, ſine ſenſibili errore ſtatui poterit $e^{\frac{h}{b}}-1=e^{\frac{h}{b}}$, quo facto erit $b+f=b(n+1)=h$, ideoque altitudo maxima $AH=b(n+1)$, ubi notetur eſſe $b=\frac{8a}{3\lambda}$, &

$n=\frac{3(\lambda-1)k}{8a}$ [ob $(\frac{\lambda-1}{\lambda})k=f=nb=\frac{8an}{3\lambda}$].

Pro tempore aſcenſûs æquatio $v\partial t=\partial x$ præbet $\partial x=\partial t\sqrt{\frac{4\lambda gb}{k}}\sqrt{[h(1-e^{-\frac{x}{b}})-x]}$, denotante ∂t elementum temporis. Erit igitur $\partial t\sqrt{\frac{4\lambda gb}{k}}=\frac{\partial x}{\sqrt{[h(1-e^{-\frac{x}{b}})-x]}}$.

Ponamus $\partial t=\sqrt{\frac{k}{4\lambda gb}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(h-x)}}$ eritque integrando $t=\sqrt{\frac{k}{4\lambda gb}}[C-2\sqrt{(h-x)}]=\sqrt{\frac{k}{4\lambda gb}}[2\sqrt{h}-2\sqrt{(h-x)}]$ undè colligitur tempus aſcenſûs per ſpatium $AMt=\sqrt{\frac{kh}{\lambda gb}}(1-\sqrt{\frac{h-x}{h}})$, & tempus totius aſcenſûs erit $\sqrt{\frac{kh}{\lambda gb}}$.

Pro determinandâ altitudine eâ F, ubi celeritas eſt maxima, erit $\partial.[(b+f)(1-e^{-\frac{x}{b}})-x]=0$, ideoque

$\frac{\partial x}{b}(b+f)e^{-\frac{x}{b}} = \partial x$, undè fit $\frac{b+f}{b} = e^{\frac{x}{b}}$, conſequenter $x = bl(b+f) - blb = bl(n+1)$, ergo $AF = bl(n+1)$; hoc valore in expreſſione celeritatis ſubſtituto erit

$$vv = \frac{4\lambda gbb}{k}[(n+1)(1-e^{-l(n+1)}) - l(n+1)].$$

Eſt verò $e^{-l(n+1)} = \frac{1}{n+1}$, ideoque $vv = \frac{4\lambda gbb}{k}[n - l(n+1)]$, ergo celeritas maxima in F erit $= 2b\sqrt{\frac{\lambda g}{k}[n - l(n+1)]}$, ſive $2b\sqrt{\frac{\lambda ng}{k}}$, ob numerum n valdè magnum.

Exemple. Sit $a = 30$ ped. $\lambda = 5$, erit $b = 16$ & $n = 1200$, undè fit altitudo maxima $AH = 19200$ ped. altitudo celeritati maximæ reſpondens $AF = 112$ ped. celeritas maxima 64 ped. uno minuto ſecundo & tempus aſcenſûs 10′ 32″.