University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works Euler Archive

1781

De perturbatione motus planetarum et cometarum.

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation
Euler, Leonhard, "De perturbatione motus planetarum et cometarum." (1781). *Euler Archive - All Works*. 578.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/578

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE

PERTVRBATIONE MOTVS PLANETARVM ET COMETARVM.

Auctore

I. EVLERO.

PRAENOTANDA.

§. 1.

Vis *acceleratrix*, qua corpus coeleste, cuius massa $= M$, aliud corpus, ad distantiam $= v$ remotum, ad se attrahit, tali formula: $\frac{M}{vv}$, exprimi solet; quandoquidem omnia corpora coelestia in ratione composita ex directa massarum et reciproca duplicata distantiarum agere obseruantur. Vt nunc hanc formulam ad mensuras determinatas atque adeo valores numericos reuocemus, in sequentibus perpetuo massam Solis vnitate designabimus. Deinde vero distantia media Terrae a Sole pariter vnitate definiatur. Hoc enim modo formula $\frac{M}{vv}$ omnibus casibus certo numero repraesentabitur.

§. 2. Quod deinde ad *mensuram temporis* attinet, eam quoque ex motu Terrae medio ita perpetuo exhibebimus, vt omnia tempora per angulos, quos Terra interea secundum motum medium circa Solem describit, exprimamus. Ita mensura vnius diei nobis erit angulus $= 59', 8''$; integri autem anni tropici mensura erit $360°$.

§. 3. His mensuris stabilitis, si corpus quodpiam coeleste quiescens aliud corpus secundum lineam rectam ad se attrahat, eiusque distantia quodam tempore indefinito, quod sit $= \theta$, ponatur $= v$, eius motus hac aequatione differentio-differentiali determinabitur: $\frac{ddv}{d\theta^2} = -\frac{M}{vv}$; vbi elementum temporis $d\theta$ constans est assumtum.

§. 4. Quoniam hic de perturbationibus motus tam planetarum quam cometarum potissimum erit sermo, vis principalis, qua haec corpora sollicitantur, erit ea, qua a Sole attrahuntur, vnde si talis corporis a Sole distantia fuerit $= v$, ista vis erit $= \frac{1}{vv}$. Reliquas autem vires omnes, quibus haec corpora forte vrgentur, nomine *virium perturbatricium* denotabimus, quas plerumque tanquam valde paruas respectu vis ad Solem tendentis spectare licebit, quandoquidem, si maiores essent, nulla adhuc methodus est inuenta, tales motus ad calculum reuocandi.

§. 5. Quia porro loca talium corporum ad quodnis tempus respectu Solis definiri debent, ipsum Solem in perpetua quiete considerari conuenit; quamobrem secundum principia mechanica omnes vires acceleratrices, quae in Solem agunt, secundum directiones contrarias in ipsum corpus, cuius motus quaeritur, transferri oportet, quibus hoc

hoc corpus perinde ſollicitari erit cenſendum, atque ab illis viribus, quarum actioni immediate ſubiicitur.

§. 6. Cum igitur centrum Solis tanquam punctum fixum in coelo ſimus contemplaturi, quod ſit in O, per id ternos axes fixos O A, O B, O C ductos concipiamus, qui inter ſe ſint normales. Iis igitur tria plana principalia determinabuntur, ſcilicet A O B, A O C, B O C, pariter inter ſe normalia; quorum primum A O B planum nobis eclipticae repreſentet, quandoquidem omnia loca tam planetarum quam cometarum ad eclipticam referre ſolemus. Tab. IX. Fig. 1.

§. 7. Iam poſtquam a certa epocha elapſum fuerit tempus $= \theta$, modo ſupra aſſignato exprimendum, reperiatur planeta ſiue cometa, cuius motus quaeritur, in loco quocunque Z; hincque primo ad planum A O B demittatur perpendiculum Z Y; tum vero ex Y ad axem O A agatur normalis Y X, ita vt locus Z determinetur per ternas coordinatas tribus axibus modo ſtabilitis parallelas, quas vocemus $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$. Praeterea vero quoque ducamus ad centrum Solis rectam Z O, quae vocetur $= v$, ita vt ſit $vv = xx + yy + zz$. Quod ſi porro ſpatiolum tempuſculo $d\theta$ percurſum breuitatis gratia vocetur $= ds$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

§. 8. A quibuscunque nunc viribus acceleratricibus corpus in loco Z ſollicitetur, cum iis primo coniungantur ſecundum directiones contrarias omnes vires ipſum Solem ſollicitantes; tum vero omnes iſtae vires reſoluantur ſecundum ternas illas directiones Z P, Z Q et Z R ipſis axibus O A, O B, O C parallelas, easque hoc modo

 deno-

denominemus: vim $ZP = p$, vim $ZQ = q$, et vim $ZR = r$; quae ergo litterae, p, q, r omnes exhibent vires perturbatrices noſtrum corpus ſollicitantes, dum vis principalis ad ſolem directa ſecundum ZO eſt $= \frac{1}{vv}$.

§. 9. Iam quicunque fuerit corporis motus, is pariter more ſolito ſecundum ternas directiones ZP, ZQ et ZR reſoluatur. Deinde vero etiam ipſa vis Solis ſecundum easdem directiones reſoluta dabit:

vim ſecundum $PZ = \frac{x}{v^3}$,
vim ſecundum $QZ = \frac{y}{v^3}$,
vim ſecundum $RZ = \frac{z}{v^3}$.

Hinc ſi triplex corporis motus ſecundum praecepta mechanica tractetur, inde tres ſequentes aequationes differentiales ſecundi gradus naſcentur:

$$\text{I. } \frac{d\,d\,x}{d\,\theta^2} = -\frac{x}{v^3} + p.$$

$$\text{II. } \frac{d\,d\,y}{d\,\theta^2} = -\frac{y}{v^3} + q.$$

$$\text{III. } \frac{d\,d\,z}{d\,\theta^2} = -\frac{z}{v^3} + r.$$

ex quibus aequationibus totus corporis motus debet determinari.

Euolutio.
trium aequationum inuentarum.

§. 10. Cum iſtae aequationes ſint differentiales ſecundi gradus, ante omnia in id eſt incumbendum, vt ex iis per integrationem aequationes differentiales primi gradus deriuemus, in quo quidem negotio ad quantitates p, q, r, reſpici

respici nequit, quibus igitur signum integrationis praefigemus, easdemque operationes instituemus, quasi hae quantitates plane abessent. Statim autem ob elementum $d\theta$ constans istae tres combinationes:

$$\text{II}.x - \text{I}.y;\ \text{III}.y - \text{II}.x;\ \text{I}.z - \text{III}.x;$$

nobis praebebunt sequentes aequationes integrabiles:

$$1.\ \frac{x\,d\,d\,y - y\,d\,d\,x}{d\theta^2} = q\,x - p\,y,$$

$$2.\ \frac{y\,d\,d\,z - z\,d\,d\,y}{d\theta^2} = r\,y - q\,z,$$

$$3.\ \frac{z\,d\,d\,x - x\,d\,d\,z}{d\theta^2} = p\,z - r\,x.$$

§. 11. Quanquam autem hoc modo tres nouas nacti sumus aequationes: tamen eae inter se ita cohaerent, vt binae quaeuis tertiam in se inuoluant. Si enim earum prima ducatur in z, secunda vero in x, producta in vnam summam collecta dabunt hanc aequationem:

$$\frac{x\,y\,d\,d\,z - z\,y\,d\,d\,x}{d\theta^2} = y\,(r\,x - p\,z),$$

quae per $-y$ diuisa ipsam tertiam aequationem manifesto producit; ita vt, vti iam annotauimus, quaelibet in binis reliquis iam contineatur; vnde etiam hae tres aequationes duas tantum determinationes suppeditabunt.

§. 12. Ante autem quam has aequationes integremus, plurimum intererit obseruare, formulas $q\,x - p\,y$, $r\,y - q\,z$, $p\,z - r\,x$, certa momenta virium p, q, r exprimere. In prima enim eorum productum $q\,x$ exprimit momentum vis q respectu axis X in sensum AB; alterum vero productum $p\,y$ momentum vis p respectu eiusdem axis X, at in sensum contrarium BA. Quare cum tertia vis r huic axi X sit parallela, ab ea nullum

nullum momentum respectu istius axis oritur; vnde momentum ab omnibus istis viribus, axis X respectu, in sensum AB tendens erit $qx - py$. Simili modo ab iisdem viribus nascetur momentum respectu axis O A, in sensum BC $= ry - qz$. Ac denique momentum ab iisdem viribus ortum respectu axis O B in sensum C A erit $= pz - rx$.

§. 13. Quoniam haec momenta maxime sunt notatu digna, ea merentur in calculum introduci. Designemus igitur ea litteris maiusculis C, A, B, quae ab axibus ipsis, ad quos referuntur sunt desumta; ideoque ponamus: $qx - py = C$, $ry - qz = A$, $pz - rx = B$, vbi cauendum erit, ne istae litterae pro constantibus habeantur. Hinc igitur ternae aequationes integrandae erunt:

$$1.\ \frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\theta^2} = C,$$

$$2.\ \frac{y\,ddz - z\,ddy}{d\theta^2} = A,$$

$$3.\ \frac{z\,ddx - x\,ddz}{d\theta^2} = B.$$

quae ductae in $d\theta$ et integratae dabunt

$$1.\ \frac{x\,dy - y\,dx}{d\theta} = \int C\,d\theta,$$

$$2.\ \frac{y\,dz - z\,dy}{d\theta} = \int A\,d\theta,$$

$$3.\ \frac{z\,dx - x\,dz}{d\theta} = \int B\,d\theta.$$

vbi vero etiam probe tenendum est, binas harum aequationum iam tertiam inuoluere. At vero sequens combinatio: I. $x +$ II. $y +$ III. z praebet

$$0 = z\int C\,d\theta + x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta,$$

quae aequatio quidem pro identica est habenda; interim tamen egregiam proprietatem nobis cognoscendam praebet,

prae-

praecipue si cum ea combinetur, qua modo ante vidimus esse $Cz + Ax + By = 0$, quae reuera est identica.

§. 14. Antequam vlterius progrediamur, consideremus casum, quo vires perturbatrices euanescunt, et formulae integrales in quantitates constantes abeunt, quae sint secundum ordinem $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, ex quibus valoribus vltima aequatio nobis praebebit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$, quae aequatio nobis statim indicat, totam orbitam a corpore z descriptam ita per ternas coordinatas x, y, z, definiri, vt perpetuo sit $\mathfrak{C}z + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$, quae aequatio est pro superficie plana; ita vt iam certi simus, hoc casu corpus totum suum motum in eodem plano fore absoluturum. Vnde iam intelligere licet, quomodo motus corporis ob vires perturbatrices a plano discrepare queat.

§. 15. Porro vero etiam formulae differentiales per integrationem inuentae, scilicet:

$$x\,dy - y\,dx,\; y\,dz - z\,dy,\; z\,dx - x\,dz,$$

peculiari attentione sunt digna, cum referantur ad proiectiones orbitae descriptae in terna plana principalia factas. Si enim orbita in planum A O B proiiciatur, pro qua x et y erunt binae coordinatae, tum elementum areae circa punctum O descriptae erit $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$, in sensum A B. Simili modo $\frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy)$ erit elementum proiectionis in planum B O C factae, idque in sensum B C. Denique $\frac{1}{2}(z\,dx - x\,dz)$ erit elementum areae proiectionis in planum C O A facta, idque in sensum C A. Vnde patet, quam egregie descriptio harum arearum a momentis virium respectu axium respondentium pendeat. Si enim vi-

res

res p, q, r euanescerent, haec arearum elementa tempusculo $d\theta$ forent proportionalia, vti ex primis elementis iam constat. Quatenus igitur vires perturbatrices adsunt, eatenus descriptio arearum non amplius erit tempori proportionalis.

Tab. IX. Fig. 2.

§. 16. Quo iste pulcherrimus nexus inter descriptiones arearum et momenta virium clarius perspiciatur, sit A Y B proiectio orbitae a corpore Z descriptae in planum A O B facta, in qua punctum Y respondet loco corporis Z, pro quo erunt coordinatae $OX = x$, $XY = y$. Iam ducta recta O Y sector A O Y exhibebit aream in hac proiectione descriptam, quam ergo vocemus $= S$, quae quia constat ex triangulo O X Y et area A X Y, vocemus $AX = t$, vt obtineatur ista area $AXY = \int y\,dt$; eritque $S = \frac{1}{2}xy + \int y\,dt$; vnde differentiando, ob $x + t = OA$, ideoque constans, erit $dt = -dx$; hincque colligitur elementum areae $dS = \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx$; vnde patet fore $x\,dy - y\,dx = 2\,dS$.

§. 17. Pro hac igitur proiectione habebimus

$$\frac{2\,dS}{d\theta} = \int C\,d\theta,$$

vbi C denotat momentum virium sollicitantium respectu axis O C plano A O B perpendiculariter insistentis, ideoque formula integralis $\int C\,d\theta$ summam omnium horum momentorum per tempus θ collectorum denotabit; at formula $\frac{dS}{d\theta}$ repraesentabit celeritatem, qua area S describitur; vnde eius differentiale per $d\theta$ diuisum dabit accelerationem, quae ergo erit $\frac{ddS}{d\theta^2} = \frac{1}{2}C$. Sicque intelligitur, accelerationem motus, quo area S describitur, ipsi momento

mento virium C esse proportionalem. Quamdiu ergo hoc momentum C positiuum tenet valorem, celeritas descriptionis continuo crescit: contra autem, quando momentum fit negatiuum, iterum decrescit. Haec etiam sunt intelligenda de binis reliquis proiectionibus.

Vlterior euolutio formularum integralium modo inuentarum.

§. 18. Cum igitur deducti simus ad istas aequationes:

$$1.\ \frac{x\,dy - y\,dx}{d\theta} = \int C\,d\theta.$$

$$2.\ \frac{y\,dz - z\,dy}{d\theta} = \int A\,d\theta.$$

$$3.\ \frac{z\,dx - x\,dz}{d\theta} = \int B\,d\theta,$$

existente $C = qx - py$, $A = ry - qz$, $B = pz - rx$, ideoque $Cz + Ax + By = 0$, vidimus praeterea semper fore

$$z\int C\,d\theta + x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta = 0,$$

qua aequatione vtique certa relatio inter coordinatas x, y, z, et elementum temporis $d\theta$ inuoluitur; eius vero differentiale, ob $Cz + Ax + By = 0$, nobis hanc nouam relationem suppeditat:

$$dz\int C\,d\theta + dx\int A\,d\theta + dy\,B\int d\theta = 0,$$

quae pariter omni attentione est digna.

§. 19. Quoniam tres aequationes inuentae ad ternos nostros axes principales, siue potius ad terna plana principalia referuntur, sequenti modo ex iis formari poterit noua aequatio, in qua ad distinctionem horum planorum plane non respicitur; ita scilicet vt ternae coordinatae x, y, z penitus ex calculo elidantur, earumque loco sola distantia $OZ = v$ cum elemento curuae descriptae, quod vocauimus

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

in calculo relinquatur. Obtinebitur hoc, si quadrata trium aequationum inuicem addantur, quod quo facilius fieri poterit, ponamus breuitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P,\ \int B\,d\theta = Q,\ \int C\,d\theta = R,$$

et aequatio resultans erit

$$(x\,dy - y\,dx)^2 + (y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2$$
$$= d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

§. 20. Quodsi nunc ista aequatio euoluatur, ob

$$xx + yy + zz = vv \text{ fit}$$
$$xx + yy = vv - zz;$$
$$xx + zz = vv - yy \text{ et}$$
$$yy + zz = vv - xx;$$

et hinc peruenietur ad istam aequationem:

$$vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2$$
$$= d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2),$$

vbi cum sit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \text{ et } x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv,$$

aequatio inuenta hanc induet formam:

$$vv\,ds^2 - vv\,dv^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

Tab. IX. Fig. 3. §. 21. Quo indolem huius aequationis penitius perspiciamus, consideremus elementum a corpore tempusculo $d\theta$ descriptum, quod sit $Zz = ds$; vnde ductis ad solem rectis ZO et zO erit $OZ = v$ et $Oz = v + dv$. Hinc

Hinc centro O ducto arculo Zv, vt sit $vz = dv$, erit vtique $Zv^2 = ds^2 - dv^2$, hincque aequatio inuenta erit

$$v\,v.\,Zv^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2).$$

Vocemus nunc angulum elementarem $ZOz = d\Phi$, ita vt $d\Phi$ denotet angulum a corpore Z tempusculo $d\theta$ circa solem descriptum, quod est elementum in Astronomia maximi momenti, eritque $Zv = v\,d\Phi$, vnde nostra aequatio erit

$$v^4\,d\Phi^2 = d\theta^2 (P^2 + Q^2 + R^2),$$

at extracta radice

$$v\,v\,d\Phi = d\theta \surd (P^2 + Q^2 + R^2).$$

§. 22. Euidens autem est, hanc formulam $v\,v\,d\Phi$ exprimere duplam aream sectoris elementaris ZOz, quae ergo si ponatur $= dS$, habebitur elementum areae, quod corpus motu vero circa solem tempusculo $d\theta$ describit, ita vt sit $2\,dS = d\theta \surd (P^2 + Q^2 + R^2)$; quae aequatio si comparetur cum descriptione arearum in proiectionibus supra explicata, facile intelligitur, si momentum virium sollicitantium respectu axis ad planum ZOz perpendicularis ponatur $= M$, esse debere $2\,dS = \int M\,d\theta$; vnde tuto concludimus fore

$$\int M\,d\theta = \surd (P^2 + Q^2 + R^2),$$

cuius rei veritas infra clarius ostendetur. Aequatio ergo hinc eruta erit

$$v\,v\,d\Phi = d\theta \int M\,d\theta.$$

§. 23. Ad hoc autem vtile erit, relationem inter momenta virium A, B, C, ipsasque vires, accuratius examinare; et quoniam, ſi momenta vt cognita ſpectare velimus, ex tribus aequationibus

$$A = r y - q z,\ B = p z - r x \text{ et } C = q x - p y,$$

ipſas vires p, q, r definire non licet, in ſubſidium vocemus nouam quandam aequationem, quae ſit

$$p x + q y + r z = k v,$$

ita vt $k = \frac{px + qy + rz}{v}$ exprimat vim ex viribus p, q, r, ſecundum directionem Oz reſultantem; vnde cum ex priori ſuperiorum aequationum ſit $r = \frac{pz - B}{x}$, ex tertia vero $q = \frac{py + C}{x}$, hi valores in noua aequatione ſubſtituti praebent

$$p = \frac{kvx + Bz - Cy}{xx + yy + zz}, \text{ ſiue}$$

$$p = \frac{kvx + Bz - Cy}{vv}.$$

Hincque porro colligetur:

$$q = \frac{kvy + Cx - Az}{vv} \text{ et } r = \frac{kvz + Ay - Bx}{vv}.$$

§. 24. His valoribus inuentis contemplemur etiam vim reſultantem pro ipſa directione motus, quae vocari ſolet vis tangentialis. Sit igitur ea $= t$, eritque

$$t = \frac{p\,dx + q\,dy + r\,dz}{ds},$$

vbi valores modo inuenti, ſi ſubſtituantur, praebent

$$v v t\, ds = k v (x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$
$$+ A(ydz - zdy) + B(zdx - xdz) + C(xdy - ydx).$$

Cum nunc ſit

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv;$$

tum vero

$$y\,dz - z\,dy = d\theta \int A\,d\theta,\ z\,dx - x\,dz = d\theta \int B\,d\theta \text{ et}$$
$$x\,dy - y\,dx = d\theta \int C\,d\theta,$$

his

his ſubſtitutis erit

$$vvtds = kvvdv + A\,d\theta\int A\,d\theta + B\,d\theta\int B\,d\theta + C\,d\theta\int C\,d\theta,$$

ideoque

$$tds = kdv + \frac{A\,d\theta\int A\,d\theta + B\,d\theta\int B\,d\theta + C\,d\theta\int C\,d\theta}{vv}.$$

§. 25. Cum igitur ſupra poſuerimus $\int A\,d\theta = P$, $\int B\,d\theta = Q$, $\int C\,d\theta = R$, his valoribus introductis habebimus

$$tds = kdv + \frac{PdP + QdQ + RdR}{vv}$$

ita vt hinc ſit

$$PdP + QdQ + RdR = vvtds - kvvdv$$

vnde integrando colligitur

$$PP + QQ + RR = 2\int vv(tds - kdv).$$

Quae ergo ſupra de hac formula $PP + QQ + RR$ annotauimus, vbi littera M deſignauit momentum virium reſpectu axis ad orbitam normalis, nunc eo redeunt, vt ſit

$$(\int M\,d\theta)^2 = 2\int vv(tds - kdv),$$

vnde differentiando diſcimus eſſe

$$M\,d\theta\int M\,d\theta = vv(tds - kdv),$$

vnde patet, quomodo iſtud momentum M tam a vi tangentiali t, quam a vi centrali, ſiue ad O directa, quae erat $= k$, pendeat.

Inueſtigatio
aliarum aequationum integralium.

§. 26. Cum motus corporis quaeſitus determinetur tribus aequationibus, integralia autem, quae hactenus inuenimus, duas tantum determinationes complectantur, omnino necesse est, vt insuper vna aequatio integralis ex ternis aequationibus initialibus eruatur. Talem autem nobis suppeditabit ista combinatio:

$$\text{I.}\ 2\,d\,x + \text{II.}\ 2\,d\,y + \text{III.}\ 2\,d\,z,$$

sic enim prodibit

$$\frac{2\,d\,x\,d\,d\,x + 2\,d\,y\,d\,d\,y + 2\,d\,z\,d\,d\,z}{d\,\theta^2} = -\frac{2\,x\,d\,x - 2\,y\,d\,y - 2\,z\,d\,z}{v^3}$$
$$+ 2\,p\,d\,x + 2\,q\,d\,y + 2\,r\,d\,z,$$

vbi cum sit

$$d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 = d\,s^2 \text{ et}$$
$$x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z = v\,d\,v,$$

per integrationem impetrabimus hanc aequationem:

$$\frac{d\,s^2}{d\,\theta^2} = + \frac{2}{v} + 2\int(p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z)$$

vbi signum summationis iam constantem per integrationem ingressam inuoluit.

§. 27. Modo ante autem vidimus, si vis tangentialis, secundum directionem motus $Z\,z$ sollicitans, vocetur $= t$, fore $t\,d\,s = p\,d\,x + q\,d\,y + r\,d\,z$. Ex hac igitur vi tangentiali habebimus:

$$\frac{d\,s^2}{d\,\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,d\,s;$$

vbi $\frac{d\,s^2}{d\,\theta^2}$ exprimit quadratum celeritatis, qua corpus Z hoc tempore mouetur. Hinc autem loco ipsius elementi $d\,s$ introducamus potius angulum elementarem $d\,\Phi$, per quem corpus interea circa Solem progreditur, et, quemadmodum iam supra vidimus, erit $d\,s^2 = d\,v^2 + v\,v\,d\,\Phi^2$, quo valore substituto nostra aequatio fiet:

$$\frac{d\,v^2 + v\,v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int t\,d\,s.$$

Haec

Haec itaque eſt tertia aequatio integralis, quae cum praecedentibus coniuncta vniuerſam problematis ſolutionem contineri eſt cenſenda.

§. 28. Quod ſi hanc aequationem cum ea, quam in articulo praecedente vltimo loco inuenimus, qua erat $v v d\Phi = d\theta \int M d\theta$, exiſtente

$$\int M d\theta = V 2 \int v v (t d s - k d v),$$

coniungamus, duas habebimus aequationes inter ternas variabiles v, θ et Φ, vnde per quamlibet binas reliquas definire licebit. Si enim breuitatis gratia ponamus

$$v v d\Phi = S d\theta \text{ et}$$

$$d v^2 + v v d\Phi^2 = \frac{2 d\theta^2}{v} + T d\theta^2,$$

ita vt ſit

$$S = \int M d\theta \text{ et } T = 2 \int t d s;$$

ex priore habebimus $d\Phi = \frac{S d\theta}{v v}$, qui valor in altera ſubſtitutus dat

$$d v^2 + \frac{S S d\theta^2}{v v} = \frac{2 d\theta^2}{v} + T d\theta^2,$$

vnde deducitur

$$d\theta = \frac{v d v}{\sqrt{(2 v + T v v - S S)}}, \text{ hincque}$$

$$d\Phi = \frac{S d v}{v \sqrt{(2 v + T v v - S S)}}.$$

§. 29. Poſſumus autem inſuper aliam aequationem integralem elicere, ope combinationis I. x + II. y + III z, quippe quae dat

$$\frac{x d d x + y d d y + z d d z}{d\theta^2} = - \frac{1}{v} + p x + q y + r z$$

$$= - \frac{1}{v} + k v.$$

Huic

Huic addamus aequationem modo inuentam, (vide §. 26.) quae erat

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\theta^2} = \frac{2}{v} + 2\int(p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$
$$= \frac{2}{v} + 2\int t\,ds$$

ac manifestum est prodituram esse hanc aequationem:

$$\frac{d.(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{d\theta^2} = \frac{d.v\,dv}{d\theta^2} = \frac{1}{v} + k\,v + 2\int t\,ds\,,$$

quae aequatio tantum continet variabiles t et θ, et denuo integrabilis redditur multiplicando per $2\,v\,dv$: integrale enim erit:

$$\frac{v\,v\,dv^2}{d\theta^2} = 2\,v + 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds,$$

hincque elicitur

$$d\theta = \frac{v\,dv}{\sqrt{(2\,v + 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds)}}\,,$$

quae ergo formula cum superiore §. 28. inuenta congruere debet. Comparatione autem facta erit

$$\mathrm{T}\,v\,v - \mathrm{S}\,\mathrm{S} = 2\int k\,v\,v\,dv + 4\int v\,dv\int t\,ds;$$

vbi si differentietur et loco T et $d\mathrm{T}$ valor ante assumtus scribatur, prodibit

$$2\,k\,v\,v\,dv = 2\,v\,v\,t\,ds - d.\,\mathrm{S}\,\mathrm{S}.$$

Vidimus autem esse

$$\mathrm{S}\,\mathrm{S} = (\int \mathrm{M}\,d\theta)^2 = 2\int v\,v\,(t\,ds - k\,dv)$$

ideoque

$$d.\,\mathrm{S}\,\mathrm{S} = 2\,v\,v\,t\,ds - 2\,k\,v\,v\,dv\,,$$

quo substituto aequatio manifesto prodit identica.

Inue-

Inuestigatio lineae nodorum et inclinationis orbitae ad eclipticam.

§. 30. Iam initio obseruauimus, si vires p, q, r euanescerent, tum totam corporis orbitam sitam fore in eodem plano. Ob actionem autem harum virium fieri poterit, vt orbita non amplius reperiatur in eodem plano, cuius variatio commodissime repraesentari solet tam per lineae nodorum quam inclinationis orbitae ad eclipticam positionem. Si enim haec duo elementa ad quoduis tempus assignari queant, perfectam notitiam habemus super continua orbitae variatione.

§. 31. Cum igitur Planeta vel Cometa nunc in Z reperiatur, et temporis elemento $d\theta$ percurrat elementum suae orbitae Z z, concipiatur planum, quod per puncta Z, z et O transeat, quandoquidem corpus interea in hoc plano mouebitur. Sit igitur recta ON intersectio istius plani cum plano eclipticae AOB, quae recta vocari solet linea nodorum, pro cuius praesenti positione vocemus angulum $AON = \zeta$; praeterea vero vocetur inclinatio huius plani ad eclipticam $= \eta$, et statuatur angulus $NOZ = \psi$, qui vulgo vocari solet argumentum latitudinis; angulus vero elementaris ZOz maneat vt hactenus posuimus $= d\Phi$, ita vt, si linea nodorum ON quiesceret, vtique foret $d\Phi = d\psi$. Quatenus autem haec linea ipsa mouetur, haec aequalitas non amplius locum habet. Tab. IX. Fig. 4.

§. 32. Ducatur nunc ex puncto Y ad lineam nodorum ON perpendiculum YP, iunctaque recta PZ angulus ZPY ipſi inclinationi orbitae eſt aequalis, ideoque $= \eta$. Cum iam in triangulo POZ habeatur latus $OZ = v$ cum angulo $NOZ = \psi$, erunt rectae

$$PZ = v \text{ ſin. } \psi \text{ et } OP = v \text{ coſ. } \psi.$$

Dein vero ex triangulo ZPY naneiſcimur

$$ZY = v \text{ ſin. } \eta \text{ ſin. } \psi \text{ et } PY = v \text{ coſ. } \eta \text{ ſin. } \psi.$$

Porro ex P tam ad OA quam XY agantur normales PQ et PR, atque ex triangulo OPQ, vbi $OP = v \text{ coſ. } \psi$ et angulus $POQ = \zeta$ erit

$$PQ = v \text{ coſ. } \psi \text{ ſin. } \zeta \text{ et } OQ = v \text{ coſ. } \psi \text{ coſ. } \zeta.$$

Denique in triangulo PYR datur latus $PY = v \text{ ſin. } \psi \text{ coſ. } \eta$ cum angulo $PYR = \zeta$, vnde concluditur

$$PR = v \text{ ſin. } \psi \text{ coſ. } \eta \text{ ſin. } \zeta \text{ et}$$
$$YR = v \text{ ſin. } \psi \text{ coſ. } \eta \text{ coſ. } \zeta.$$

Ex his igitur elementis deriuamus binas reliquas coordinatas X et Y: erit enim

$$OX = x = OQ - PR = v \text{ coſ. } \psi \text{ coſ. } \zeta$$
$$- v \text{ ſin. } \psi \text{ coſ. } \eta \text{ ſin. } \zeta,$$
$$XY = y = PQ + YR = v \text{ coſ. } \psi \text{ ſin. } \zeta$$
$$+ v \text{ ſin. } \psi \text{ coſ. } \eta \text{ coſ. } \zeta;$$

modo autem vidimus eſſe

$$YZ = z = v \text{ ſin. } \psi \text{ ſin. } \eta.$$

§. 33. Cum punctum orbitae proximum z tam in praeſenti plano NOZ quam in ſequente reperiatur, vbi anguli ζ et η incrementa ceperunt $d\zeta$ et $d\eta$, duplici modo a Z ad z perueniri poterit. Priore ſcilicet modo peruenitur, dum linea nodorum cum inclinatione tanquam

quam inuariabilis accipitur, angulus autem $NOZ = \psi$ incrementum capere statuitur angulum $ZOz = d\psi$. Altero vero modo ad idem punctum z peruenietur, dum tam lineae nodorum quam inclinationi suae variatio tribuitur, ac praeterea angulus ψ differentiali suo naturali augetur. Quod si igitur formulas pro x, y, z inuentas hoc duplici modo differentiemus, ex vtroque eosdem valores pro dx, dy et dz resultare necesse est.

§. 34. Non solum autem ista conuenientia ipsas coordinatas spectat, sed etiam quascunque formulas ex iis compositas; quo notato, vt rem ad nostras formulas integrales primo inuentas accommodemus, consideremus has duas formulas: $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, quarum formularum valores erunt

$$\frac{x}{z} = \frac{\cot.\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta} - \cot.\eta \sin.\zeta;$$
$$\frac{y}{z} = \frac{\cot.\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta} + \cot.\eta \cos.\zeta.$$

Has iam formulas primo priori modo differentiemus, statuendo angulos ζ et η constantes, ac ponendo $d\psi = d\Phi$, reperieturque

$$d.\frac{x}{z} = -\frac{d\Phi \cos.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} \text{ et } d.\frac{y}{z} = -\frac{d\Phi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2}.$$

§. 35. Eaedem autem formulae more solito differentiatae, sumendis omnibus quantitatibus variabilibus, praebent has aequationes:

$$d.\frac{x}{z} = -\frac{d\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} - \frac{d\zeta \sin.\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \cos.\zeta \cot.\eta$$
$$- \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \cos.\zeta}{\sin.\eta^2} + \frac{d\eta \sin.\zeta}{\sin.\eta^2};$$
$$d.\frac{y}{z} = -\frac{d\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta \sin.\psi^2} + \frac{d\zeta \cos.\zeta \cot.\psi}{\sin.\eta} - d\zeta \sin.\zeta \cot.\eta$$
$$- \frac{d\eta \cos.\eta \cot.\psi \sin.\zeta}{\sin.\eta^2} - \frac{d\eta \cos.\zeta}{\sin.\eta^2}.$$

His igitur binis valoribus inter ſe aequatis nanciſcemur has duas aequationes differentiales:

$$\text{I.}\ \frac{(d\psi - d\Phi)\,\operatorname{cof.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta\,\operatorname{fin.}\psi^2} = -\frac{d\zeta\,\operatorname{fin.}\zeta\,\operatorname{cot.}\psi}{\operatorname{fin.}\eta} - d\zeta\,\operatorname{cof.}\zeta\,\operatorname{cot.}\eta$$
$$-\frac{d\eta\,\operatorname{cof.}\eta\,\operatorname{cot.}\psi\,\operatorname{cof.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta^2} + \frac{d\eta\,\operatorname{fin.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta^2}.$$

$$\text{II.}\ \frac{(d\psi - d\Phi)\,\operatorname{fin.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta\,\operatorname{fin.}\psi^2} = +\frac{d\zeta\,\operatorname{cof.}\zeta\,\operatorname{cot.}\psi}{\operatorname{fin.}\eta} - d\zeta\,\operatorname{fin.}\zeta\,\operatorname{cot.}\eta$$
$$-\frac{d\eta\,\operatorname{cof.}\eta\,\operatorname{cot.}\psi\,\operatorname{fin.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta^2} - \frac{d\eta\,\operatorname{cof.}\zeta}{\operatorname{fin.}\eta^2}.$$

§. 36. Nunc vt elementa $d\Phi$ et $d\psi$ eliminemus, vtamur hac combinatione: I. fin. ζ — II. cof. ζ, quae perducet ad hanc aequationem:

$$0 = -\frac{d\zeta\,\operatorname{cot.}\psi}{\operatorname{fin.}\eta} + \frac{d\eta}{\operatorname{fin.}\eta^2},$$

quae reducta dat

$$d\eta = d\zeta\,\operatorname{cot.}\psi\,\operatorname{fin.}\eta.$$

Sicque iam innoteſcit inſignis relatio inter variationem lineae nodorum et inclinationis ad eclipticam; ita vt cognita alterutra altera inde ſemper tuto concludi poſſit. Hinc intelligitur, quando fuerit argumentum latitudinis $\psi = 0$, tum lineam nodorum nullum incrementum capere poſſe, quia alioquin fieret $d\eta$ infinitum. Deinde vero, ties fuerit $\psi = 90°$, inclinatio nullam mutationem accipere poterit.

§. 37. Praeterea vero hinc etiam veram relationem inter elementa $d\Phi$ et $d\psi$ aſſignare poſſumus, adquohibentes hanc combinationem: I. cof. ζ + II. fin. ζ. Hinc enim obtinebimus

$$\frac{d\psi - d\Phi}{\operatorname{fin.}\eta\,\operatorname{fin.}\psi^2} = -d\zeta\,\operatorname{cot.}\eta - \frac{d\eta\,\operatorname{cof.}\eta\,\operatorname{cot.}\psi}{\operatorname{fin.}\eta^2},$$

hinc-

hincque

$$d\psi - d\Phi = - d\zeta \operatorname{cos}\eta \operatorname{sin}\psi^2 - \frac{d\eta \operatorname{cos}\eta \operatorname{cos}\psi \operatorname{sin}\psi}{\operatorname{sin}\eta},$$

vbi, si loco $d\eta$ valor ante inuentus substituatur, prodit

$$d\psi - d\Phi = - d\zeta \operatorname{cos}\eta, \text{ ideoque}$$

$$d\Phi = d\psi + d\zeta \operatorname{cos}\eta.$$

§. 38. Cum igitur per priorem operationem inuenerimus

$$d.\frac{x}{z} = - \frac{d\Phi \operatorname{cos}\zeta}{\operatorname{sin}\eta \operatorname{sin}\psi^2}, \text{ erit}$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{zz} = - \frac{d\Phi \operatorname{cos}\zeta}{\operatorname{sin}\eta \operatorname{sin}\psi^2}.$$

At ex formulis initio integratis est

$$z\,dx - x\,dz = d\theta \int B\,d\theta = Q\,d\theta,$$

quo valore substituto erit

$$\frac{Q\,d\theta}{zz} = - \frac{d\Phi \operatorname{cos}\zeta}{\operatorname{sin}\eta \operatorname{sin}\psi^2};$$

quare cum sit $z = v \operatorname{sin}\eta \operatorname{sin}\psi$, habebimus

$$Q\,d\theta = - vv\,d\Phi \operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\eta.$$

Deinde vero posuimus $vv\,d\Phi = d\theta \int M\,d\theta$, existente

$$\int M\,d\theta = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)},$$

vel etiam

$$\int M\,d\theta = \sqrt{2 \int vv(t\,ds - k\,dv)},$$

quo valore substituto erit

$$Q = - \operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\eta \int M\,d\theta,$$

ideoque

$$\operatorname{cos}\zeta \operatorname{sin}\eta = - \frac{Q}{\int M\,d\theta} = - \frac{Q}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}.$$

§. 39. Simili modo cum fuerit

$$d.\frac{y}{z} = -\frac{d\Phi\,\text{sin.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\psi^2}, \text{ erit}$$

$$\frac{z\,dy - y\,dz}{zz} = -\frac{d\Phi\,\text{sin.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\psi^2}.$$

Per formulas autem integrales priores erat

$$z\,dy - y\,dz = -d\theta \int A\,d\theta = P\,d\theta,$$

vnde fit $\frac{P\,d\theta}{zz} = \frac{d\Phi\,\text{sin.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\eta\,\text{sin.}\,\psi^2}$; hincque ob

$$z = v\,\text{fin.}\,\eta\,\text{fin.}\,\psi \text{ erit}$$

$$P\,d\theta = v\,v\,d\Phi\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta,$$

ex qua aequatione, ob $v\,v\,d\Phi = d\theta \int M\,d\theta$, concluditur,

$$\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta = \frac{P}{\int M\,d\theta} = \frac{P}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}.$$

Haec igitur aequatio per priorem diuisa dabit

$$\text{tang.}\,\zeta = -\frac{P}{Q}, \text{ hincque porro}$$

$$\text{fin.}\,\zeta = \frac{-P}{\sqrt{(PP+QQ)}} \text{ et cof.}\,\zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}},$$

ex quo deducitur

$$\text{fin.}\,\eta = -\sqrt{\frac{PP+QQ}{PP+QQ+RR}}.$$

§. 40. Quoniam omnes perturbationes tanquam infinite paruae spectantur, descriptionem areae in ipsa orbita tempori proportionalem assumere licebit, ita vt sit $\int M\,d\theta$ quantitas constans, quae si igitur ponatur $= \mathfrak{E}$ aequationes modo inuentae ita referri possunt:

$$\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta = -\frac{Q}{\mathfrak{E}} = -\frac{\int B\,d\theta}{\mathfrak{E}} \text{ et}$$

$$\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta = +\frac{P}{\mathfrak{E}} = +\frac{\int A\,d\theta}{\mathfrak{E}},$$

ex quibus aequationibus differentiando colligitur:

$$-d\zeta\,\text{fin}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta + d\eta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\zeta = -\frac{B\,d\theta}{\mathfrak{E}} = -\frac{(pz - rx)\,d\theta}{\mathfrak{E}},$$

$$+d\zeta\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\eta + d\eta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{fin.}\,\zeta = +\frac{A\,d\theta}{\mathfrak{E}} = +\frac{(ry - qz)\,d\theta}{\mathfrak{E}},$$

vnde

vnde eliminando $d\eta$ fiet

$$d\zeta\,\text{fin.}\,\eta = \frac{(pz-rx)\,d\theta\,\text{fin.}\,\zeta + (ry-qz)\,d\theta\,\text{cof.}\,\zeta}{\mathfrak{C}}.$$

At vero eliminando $d\zeta$ erit

$$d\eta\,\text{cof.}\,\eta = -\frac{(pz-rx)\,d\theta\,\text{cof.}\,\zeta + (ry-qz)\,d\theta\,\text{fin.}\,\zeta}{\mathfrak{C}}.$$

§. 41. Ante autem inuenimus inter $d\zeta$ et $d\eta$ hanc rationem: $d\eta = d\zeta\,\text{cot.}\,\psi\,\text{fin.}\,\eta$, quae relatio hic introducta praebet hanc aequationem:

$$-(pz-rx)\,\text{cof.}\,\zeta + (ry-qz)\,\text{fin.}\,\zeta =$$
$$(pz-rx)\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cot.}\,\psi + (ry-qz)\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cot.}\,\psi,$$

quae euoluta hanc induit formam:

$$\left\{\begin{array}{l} -p\,(z\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi + z\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi) \\ -q\,(z\,\text{fin}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi - z\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi) \\ +r\left\{\begin{array}{l} x\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi + x\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi \\ y\,\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi - y\,\text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

fiue concinnius

$$\left\{\begin{array}{l} +(ry-qz)(\text{fin.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi - \text{cof.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi) \\ -(pz-rx)(\text{cof.}\,\zeta\,\text{fin.}\,\psi + \text{fin.}\,\zeta\,\text{cof.}\,\eta\,\text{cof.}\,\psi) \end{array}\right\} = 0.$$

Haec autem relatio eatenus tantum valet, quatenus defcriptio arearum, feu formula $vv\,d\Phi$ tempori eft proportionalis.

§. 42. Hactenus planum principale A O B in plano eclipticae affumfimus; pro inftituto autem noftro magis conueniet, hoc planum ita conftituere, vt orbita planetae feu cometae ab eo perpetuo quam minime tantum difcrepet. Teneat igitur hoc planum fitum quendam medium inter omnes variationes, quas orbita quaefita fubire poteft.

potest. Hoc igitur notato, quoniam variationes assumi possunt quam minimae, inclinatio orbitae ad hoc planum quasi infinite parua spectari poterit, ita vt angulus η pro euanescente haberi possit, vnde erit

$$\text{sin.}\, \eta = \eta \text{ et } \text{cos.}\, \eta = 1;$$

vnde valor ipsius z prodibit $= v \eta\, \text{sin.}\, \psi$, qui perpetuo erit quam minimus; tum vero erit

$$x = v\, \text{cos.}\, (\psi + \zeta) \text{ et } y = v\, \text{sin.}\, (\psi + \zeta).$$

§. 43. Hic primo obseruamus, si vis perturbans r abesset, tum corpus perpetuo in eodem plano A O B promoueri debere, ita vt aberratio ab isto plano a sola vi r proficisci sit censenda. Quoniam igitur quantitatem z vt euanescentem spectare licet, erit

$$\text{A} = r y \text{ et } \text{B} = - r x,$$

vnde aequationes supra inuentae erunt

$$\text{cos.}\, \zeta\, \text{sin.}\, \eta = \eta\, \text{cos.}\, \zeta = + \frac{\int r x\, d\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$\text{sin.}\, \zeta\, \text{sin.}\, \eta = \eta\, \text{sin.}\, \zeta = \frac{\int r y\, d\theta}{\mathfrak{C}},$$

vnde fit tang. $\zeta = \frac{\int r y\, d\theta}{\int r x\, d\theta}$, siquidem ponimus $\int \text{M}\, d\theta = \mathfrak{C}$.

§. 44. Quia autem orbita quaesita in ipsum planum A O B incidit, formula $v v\, d\Phi$ exhibet elementum areae in ipso plano A O B descriptae, seu aequabitur ipsi

$$x\, dy - y\, dx = d\theta \int \text{C}\, d\theta,$$

sicque iam erit

$$v v\, d\Phi = d\theta \int \text{C}\, d\theta = d\theta \int d\theta\, (q x - p y),$$

vnde integrale $\int d\theta\, (q x - p y)$ pro quantitate $\mathfrak{C}$ constante haberi poterit, si fuerit $q x - p y$ quantitas quam minima; id id quod ſemper ſupponere licet, idque eo magis, quando proxime fuerit $q x - p y = 0$.

§. 45. Nunc igitur differentiando peruenimus ad has formulas:

$$d\eta \operatorname{cof.} \zeta - \eta\, d\zeta \operatorname{fin.} \zeta = \frac{r x\, d\theta}{\mathfrak{E}} \text{ et}$$

$$d\eta \operatorname{fin.} \zeta + \eta\, d\zeta \operatorname{cof.} \zeta = \frac{r y\, d\theta}{\mathfrak{E}},$$

vnde fit

$$d\eta = \frac{r\, d\theta\, (x \operatorname{cof.} \zeta + y \operatorname{fin.} \zeta)}{\mathfrak{E}} \text{ et}$$

$$\eta\, d\zeta = \frac{r\, d\theta\, (y \operatorname{cof.} \zeta - x \operatorname{fin.} \zeta)}{\mathfrak{E}}.$$

Cum igitur ſit

$$x = v \operatorname{cof.} (\zeta + \psi) \text{ et } y = v \operatorname{fin.} (\zeta + \psi),$$

prodibit

$$d\eta = \frac{r v\, d\theta \operatorname{cof.} \psi}{\mathfrak{E}} \text{ et } \eta\, d\zeta = \frac{r v\, d\theta \operatorname{fin.} \psi}{\mathfrak{E}},$$

quorum valorum ille per hunc diuiſus dat $\frac{\eta\, d\zeta}{d\eta} = \operatorname{tang.} \psi$, ideoque $d\eta = \frac{\eta\, d\zeta}{\operatorname{tang.} \psi}$, quae eſt eadem relatio, quam ſupra inter $d\zeta$ et $d\eta$ inuenimus. Ex his igitur formulis innoteſcit, quantas variationes quouis temporis momento tam poſitio lineae nodorum quam inclinatio patiatur, quae a ſola vi r oriuntur, quae vis cum ſemper facile aſſignari queat, determinatio horum elementorum nulla prorſus laborat difficultate, ſicque totum negotium reducitur ad reſolutionem binarum aequationum inter quantitates θ, Φ et v iam ſupra inuentarum. Motus ergo quaeſitus a ſolis viribus p et q pendebit et perinde erit comparatus, ac ſi fieret in ipſo plano A O B.

 Alia

Alia methodus

mobilitatem orbitae determinandi.

§. 46. Supra iam innuimus, aequationem

$$x\int A\,d\theta + y\int B\,d\theta + z\int C\,d\theta = o,$$

ad quam primae aequationes nos perduxerunt, ſpectari poſſe tanquam aequationem localem pro ſuperficie, in qua motus peragitur. Poſuimus autem breuitatis gratia

$$\int A\,d\theta = P,\ \int B\,d\theta = Q,\ \int C\,d\theta = R,$$

ita vt ſit $Px + Qy + Rz = o$, quae aequatio, ſi quantitates P, Q et R, eſſent conſtantes, certum quoddam planum definiret. Quare cum iſtae litterae per aliquod temporis ſpatium nullam ſenſibilem mutationem patiantur, ſi eae vt conſtantes ſpectentur, ex hac aequatione definiri poterit planum, in quo planeta ſiue cometa hoc ſaltem tempore mouebitur.

Tab IX. Fig. 5. §. 47. Referat igitur, vt initio, planum AOB eclipticam, ſitque recta ON interſectio plani quaeſiti cum ecliptica, pro qua ponamus angulum $AON = \zeta$. Cum igitur per totam hanc rectam ON ſit $z = o$, poſitio huius lineae hac aequatione: $Px + Qy = o$ exprimetur, vnde fit $\frac{y}{x} = -\frac{P}{Q}$. Exprimit autem fractio $\frac{y}{x}$ tangentem anguli ζ, vnde ſtatim colligimus eſſe tang. $\zeta = -\frac{P}{Q}$, prorſus vt ante per multas ambages inuenimus.

§. 48. Nunc pro inclinatione huius plani ad eclipticam inuenienda, quam ante vocauimus $= \eta$, ſtatuamus in noſtra aequatione $x = o$, vt ſit $Qy + Rz = o$, ex qua,

qua, si in axe O B capiatur $OP = y$, definietur longitudo perpendicularis P Q ad planum inclinatum pertingens; erit scilicet $PQ = z = -\frac{Qy}{R}$. Iam ex P ad lineam nodorum O N ducatur normalis P R, iungaturque recta Q R, vt angulus P R Q exhibeat inclinationem planorum $= \eta$. Quia igitur angulus $PON = 90° - \zeta$, in triangulo P O R erit $PR = y \operatorname{cos}. \zeta$; vnde ob $PQ = -\frac{Qy}{R}$, eruitur

$$\text{tang. } PQR = \text{tang. } \eta = -\frac{Q}{R \operatorname{cos}. \zeta}.$$

§. 49. Cum igitur inuenerimus $\text{tang. } \zeta = -\frac{P}{Q}$: erit $\text{sin. } \zeta = -\frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}}$ et $\text{cos. } \zeta = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ)}}$; sicque erit

$$\text{tang. } \eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{R}.$$

Hincque porro deducitur

$$\text{sin. } \eta = -\frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}},$$

qui valor prorsus cum superiori conuenit; vbi notasse iuvabit fore

$$\text{cos. } \eta = \frac{R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}.$$

Nunc autem, vt ante fecimus, in locum plani eclipticae A O B constituamus ipsum planum, in quo corpus certo quodam tempore, quod nobis certam epocham designet, mouebatur. Valores autem nostrarum formularum integralium ponamus fuisse

$$P = \int A\, d\theta = \mathfrak{A}, \quad Q = \int B\, d\theta = \mathfrak{B}, \quad R = \int C\, d\theta = \mathfrak{C},$$

vnde quia pro hac epocha erat $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0$, vbique autem esse debet $z = 0$: euidens est, valores $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ euanescere debere, vt fiat $\mathfrak{C}z = 0$.

§. 50. Iam postquam ab hac epocha elapsum fuerit tempus θ, valores quantitatum P, Q, R sequenti

 modo

modo ſe habebunt:

$$P = \mathfrak{A} + \int A\, d\theta = 0 + \int d\theta\, (r y - q z),$$
$$Q = \mathfrak{B} + \int B\, d\theta = 0 + \int d\theta\, (p z - r x),$$
$$R = \mathfrak{C} + \int C\, d\theta = \mathfrak{C} + \int d\theta\, (q x - p y).$$

At vero quia declinatio orbitae praeſentis a plano A O B eſt quam minima, ita vt ſumi poſſit $z = 0$, pro hoc tempore erit

$$P = \int r y\, d\theta,$$
$$Q = -\int r x\, d\theta \text{ et}$$
$$R = \mathfrak{C} + \int d\theta\, (q x - p y),$$

quae integralia ita capi oportet, vt in ipſa epocha, vbi $\theta = 0$, euaneſcant. Vnde patet, quia ipſae vires perturbantes p, q, r ſunt quaſi infinite paruae, ſingulas has formulas integrales quantitates quam minimas exprimere.

§. 51. Referat nunc recta O N pro tempore θ ab epocha elapſo lineam nodorum, qua planum, in quo corpus nunc mouetur, planum fixum A O B interſecat; atque poſito angulo A O N $= \zeta$ et mutua inclinatione $= \eta$, quam vt infinite paruam ſpectare licebit, formulae ante inuentae pro hoc caſu dabunt

$$\text{tang.}\, \zeta = \frac{\int r y\, d\theta}{\int r x\, d\theta} \text{ et}$$
$$\text{tang.}\, \eta = -\frac{\sqrt{((\int r y\, d\theta)^2 + (\int r x\, d\theta)^2)}}{\mathfrak{C} + \int d\theta\, (q x - p y)},$$

vbi, quia quaeſtio eſt de valore quam minimo tang. η, in denominatore pars integralis prae conſtante $\mathfrak{C}$ reiici poteſt, ita vt ſit

$$\text{tang.}\, \eta = -\frac{\sqrt{((\int r y\, d\theta)^2 + (\int r x\, d\theta)^2)}}{\mathfrak{C}}.$$

Inde autem fit

$$\text{ſin.}\, \zeta = \frac{\int r y\, d\theta}{\sqrt{((\int r y\, d\theta)^2 + (\int r x\, d\theta)^2)}},$$

vnde

vnde erit fin. $\zeta = -\frac{\int r y d\theta}{\mathfrak{C} tang. \eta}$, ita vt fit

$$\text{fin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, \eta = \eta\, \text{fin.}\, \zeta = -\frac{\int r y d\theta}{\mathfrak{C}},$$

ex quibus ergo formulis ad quoduis tempus tam pofitio lineae nodorum, feu angulus ζ, quam inclinatio infinite parua η determinari poterit.

§. 52. Cum igitur mobilitas orbitae his duobus elementis contineatur, hinc manifeftum eft, totam orbitae mobilitatem a fola vi perturbante r, cuius directio in planum A O B eft perpendicularis, pendere, id quod etiam ex ipfa rei natura intelligitur. Si enim folae duae vires p et q adeffent, quarum directio in ipfum planum A O B incidit, corpus perpetuo in eodem plano moueri pergeret. Eatenus igitur tantum ab hoc plano declinabitur, quatenus adeft vis r in hoc planum normaliter agens, cuius ergo actio tota in hoc effectu confumetur; quemadmodum binae reliquae vires p et q perinde motum corporis afficient, ac fi totus motus in plano A O B abfolueretur.

§. 53. Quo autem pateat, quamnam legem mutationes momentaneae angulorum ζ et η feruent, cum formula poftremo inuenta

$$\eta\, \text{fin.}\, \zeta = -\frac{\int r y d\theta}{\mathfrak{C}}$$

combinemus eandem per tang. ζ diuifam, quae erit

$$\eta\, \text{cof.}\, \zeta = -\frac{\int r x d\theta}{\mathfrak{C}},$$

hincque differentiando nanciscemur

$$d\eta\, \text{fin.}\, \zeta + \eta\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta = -\frac{r y d\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$d\eta\, \text{cof.}\, \zeta - \eta\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta = -\frac{r x d\theta}{\mathfrak{C}};$$

vnde

vnde combinando colligitur

$$d\eta = -\frac{r\,d\theta(y\,\text{fin.}\,\zeta + x\,\text{cof.}\,\zeta)}{\mathfrak{C}} \text{ et}$$

$$\eta\,d\zeta = -\frac{r\,d\theta(y\,\text{cof.}\,\zeta - x\,\text{fin.}\,\zeta)}{\mathfrak{C}}.$$

Tab. IX. Fig. 6. Ad has aequationes euoluendas fit Z locus corporis infinite parum fuper plano A O B eleuatus, ita vt cum puncto Y confundi poffit; ductaque recta Y P ad O N normali, facile patet fore

$$\text{O P} = y\,\text{fin.}\,\zeta + x\,\text{cof.}\,\zeta \text{ et}$$

$$\text{Y P} = y\,\text{cof.}\,\zeta - x\,\text{fin.}\,\zeta.$$

Quare fi argumentum latitudinis vt fupra vocetur $NOZ = \psi$, vt ob $OY = v$ fiat $OP = v\,\text{cof.}\,\psi$ et $YP = v\,\text{fin.}\,\psi$, variationes momentaneae modo inuentae ad has expreffiones concinniores reuocantur:

$$d\eta = -\frac{r\,v\,d\theta\,\text{cof.}\,\psi}{\mathfrak{C}} \text{ et } \eta\,d\zeta = -\frac{r\,v\,d\theta\,\text{fin.}\,\psi}{\mathfrak{C}},$$

vnde fequitur relatio fupra inuenta

$$\frac{d\eta}{\eta\,d\zeta} = \text{cot.}\,\psi, \text{ fiue } d\eta = \eta\,d\zeta\,\text{cot.}\,\psi.$$

Inueftigatio
inaequalitatum motus in ipfa orbita.

§. 54. Hic igitur totum corporis motum ita confiderare licebit, quafi in ipfo plano A O B perageretur, dum praeter vim ad Solem tendentem tantum a binis viribus p et q follicitatur, quae fi abeffent, corpus motu regulari circa Solem in fectione conica circumferretur. Vnde intelligitur, quoniam iftae vires vt minimae fpectantur, motum parumper tantum a regulari effe discrepaturum, eius-

eiusque aberrationem commodissime repraesentari posse, si ad quoduis tempus ea sectio conica inuestigetur, per quam eo saltem tempore moueatur, vnde sequens problema praemittamus.

Problema.

Cognito loco et motu corporis, quod a sola vi Solis attrahitur, inuenire elementa orbitae ellipticae, in qua motum suum absoluet.

Solutio.

§. 55. Quoniam primo locus corporis, qui sit in Y, datur, centro Solis existente in O, vocetur eius distantia $OY = v$, angulus vero $AOY = \Phi$, quo scilicet a directione fixa OA iam est remotus. Deinde quicunque motus huic corpori fuerit impressus, quo in directione Yy procedit, resoluatur is secundum directionem Yv, quae cum distantia OY in directum iaceat, et secundum directionem Yu, illi normalem, eritque illius celeritas $\frac{dv}{d\theta}$, huius vero celeritas $\frac{v\,d\Phi}{d\theta}$; quare, quia motus vt cognitus spectatur, ponatur $\frac{dv}{d\theta} = u$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = \xi$, eruntque cognitae hae quatuor quantitates v, Φ, u et ξ, ex quibus speciem sectionis conicae, in qua motus fiet, definiri oportet. Tab. X. Fig. 1.

§. 56. Primo igitur quaeri debet locus perihelii huius orbitae, qui sit in Π, pro quo ponatur angulus $AO\Pi = \pi$, ita vt sit angulus $\Pi OY = \Phi - \pi$, qui vocatur anomalia vera, quam ponamus $\Pi OY = \omega$, ita vt sit $\Phi = \omega + \pi$. Praeterea vero denotet f semiparametrum orbitae quaesitae, et excentricitas statuatur $= g$, ex quibus ele-

elementis distantia $OY = v$ ita determinatur, vt sit $v = \frac{f}{1+g\,cos.\,\omega}$. Denique vero ex indole motus regularis constat, vti deinceps clarius patebit, rationem temporis ita in calculum ingredi, vt sit $d\theta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{f}}$.

§. 57. Cum igitur sit $\frac{d\Phi}{d\theta} = \xi$, vltima conditio statim dat $\sqrt{f} = vv\xi$, vnde ergo statim parameter orbitae innotescit, dum est $f = v^4\xi^2$. Hinc igitur erit $v = \frac{v^4\xi^2}{1+g\,cos.\,\omega}$, ideoque $1 + g\,cos.\,\omega = v^3\xi^2$. Porro vero quia quantitates f et g sunt constantes, differentiatio formulae $v = \frac{f}{1+g\,cos.\,\omega}$ dabit $dv = \frac{fg\,d\omega\,sin.\,\omega}{(1+g\,cos.\,\omega)^2}$, vnde cum sit $d\theta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{f}} = \frac{vv\,d\omega}{\sqrt{f}}$, ob π constans, erit $\frac{dv}{d\theta} = u = \frac{g\,sin.\,\omega}{\sqrt{f}}$, vbi loco $\sqrt{f}$ posito valore $vv\xi$, fiet $u = \frac{g\,sin.\,\omega}{vv\xi}$. Ante autem iam vidimus esse $1 + g\,cos.\,\omega = v^3\xi^2$, ex quibus duabus aequationibus binae quantitates incognitae g et ω quaeri debent.

§. 58. Cum igitur sit $g\,sin.\,\omega = uvv\xi$ et $g\,cos.\,\omega = v^3\xi^2 - 1$, colligitur fore $tang.\,\omega = \frac{uvv\xi}{v^3\xi^2 - 1}$. Sicque determinabitur anomalia vera ω, qua inuenta pro loco perihelii habebitur $\pi = \Phi - \omega$. Tum vero hinc etiam innotescit excentricitas $g = \frac{uvv\xi}{sin.\,\omega}$. Sicque omnia quatuor elementa: scil. f, g, ω et π sunt reperta, quibus orbita, quae quaeritur, perfecte determinatur.

Tab X. Fig. 2 §. 59. Hoc problemate praemisso, contemplemur casum, quo corpus in Y praeter vim solarem $= \frac{1}{vv}$, in directione YO agentem, sollicitatur a duabus viribus $Yp = p$ et $Yq = q$, quandoquidem effectus tertiae vis r iam est determinatus. Ponamus igitur vt supra binas coordinatas $OX = x$ et $XY = y$, vt sit $vv = xx + yy$; tum vero hic

hic ſtatim vocetur angulus $AOY = \Phi$, eritque $x = v \operatorname{cof.} \Phi$ et $y = v \operatorname{fin.} \Phi$. Loco virium autem perturbantium p et q in calculum introducamus duas alias ſecundum directiones Ym et Yn agentes, quarum haec ad illam ſit normalis, ac vocemus vim $Ym = m$ et $Yn = n$, atque ex iſtis viribus praecedentes p et q ita definientur, vt ſit

$$p = m \operatorname{cof.} \Phi - n \operatorname{fin.} \Phi \text{ et } q = m \operatorname{fin.} \Phi + n \operatorname{cof.} \Phi.$$

§. 60. Pro motu igitur ex his viribus oriundo principia mechanica ſuppeditant has duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{x}{v^3} + m \operatorname{cof.} \Phi - n \operatorname{fin.} \Phi;$$
$$\text{II. } \frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{y}{v^3} + m \operatorname{fin.} \Phi + n \operatorname{cof.} \Phi;$$

et cum ſit $x = v \operatorname{cof.} \Phi$ et $y = v \operatorname{fin.} \Phi$, hae aequationes erunt:

$$\frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{\operatorname{cof.} \Phi}{vv} + m \operatorname{cof.} \Phi - n \operatorname{fin.} \Phi;$$
$$\frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{\operatorname{fin.} \Phi}{vv} + m \operatorname{fin.} \Phi + n \operatorname{cof.} \Phi.$$

§. 61. Introducamus autem porro loco ddx et ddy valores per v et Φ expreſſos, ac primo quidem habebimus:

$$dx = dv \operatorname{cof.} \Phi - v\, d\Phi \operatorname{fin.} \Phi \text{ et}$$
$$dy = dv \operatorname{fin.} \Phi + v\, d\Phi \operatorname{cof.} \Phi,$$

hincque denuo differentiando:

$$\text{I. } ddx = ddv \operatorname{cof.} \Phi - 2\, dv\, d\Phi \operatorname{fin.} \Phi - v\, d\Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi - v\, dd\Phi \operatorname{fin.} \Phi;$$
$$\text{II. } ddy = ddv \operatorname{fin.} \Phi + 2\, dv\, d\Phi \operatorname{cof.} \Phi - v\, d\Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi + v\, dd\Phi \operatorname{cof.} \Phi;$$

qui valores in ſuperioribus aequationibus ſubſtituti intelligantur.

§. 62. Nunc primo faciamus hanc combinationem: I. cos. Φ + II. sin. Φ, quae deducet ad istam aequationem:

$$\frac{ddv - vd\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{1}{vv} + m.$$

Deinde vero fiat haec combinatio: II. cos. Φ − I. sin. Φ, quae dabit:

$$\frac{2dvd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} = n.$$

Sicque tam sinus quam cosinus anguli Φ ex calculo excesserunt, quod non contigisset, si vires p et q in calculo retinuissemus.

§. 63. Quanquam hae aequationes sunt differentiales secundi gradus, tamen integratione penitus supersedere poterimus, quandoquidem ope problematis praemissi ad scopum optatum pertingere licebit. Quoniam igitur in illo problemate posuimus $\frac{dv}{d\theta} = u$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = \xi$, ob elementum $d\theta$ constans assumtum erit

$$\frac{ddv}{d\theta} = du \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta} = d\xi,$$

quibus valoribus introductis binae aequationes inuentae has induent formas:

$$\frac{du}{d\theta} - v\xi^2 = -\frac{1}{vv} + m \text{ et } 2u\xi + \frac{vd\xi}{d\theta} = n.$$

Sicque hinc innotescunt noui valores differentiales $\frac{du}{d\theta}$ et $\frac{d\xi}{d\theta}$, quippe qui erunt:

$$\frac{du}{d\theta} = v\xi^2 - \frac{1}{vv} + m \text{ et } \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n - 2u\xi}{v}.$$

§. 64. Quodsi iam assumamus, tempore quo corpus erat in Y, eius motum ad talem sectionem conicam pertinuisse, pro qua fuerit perihelium in puncto Π, existente angulo A O Π = π; tum vero semiparameter fuerit = f, excentricitas = q et anomalia vera Π O Y = ω, ita vt $\Phi = \pi + \omega$, tum corpus hanc curuam describere esset

Tab. X. Fig. 1.

esset perecturum, si vires perturbantes m et n subito annihilarentur. Euidens autem est, ob istas vires perturbantes elementa istius sectionis conicae continuo mutatum iri, ita vt elapso tempusculo $d\theta$ suis differentialibus increscant.

§. 65. Ex motu autem, quem corpus in puncto Y habuit, elementa orbitae in praecedente problemate ita determinauimus, vt esset

$$1°.)\ \sqrt{f} = vv\xi; \quad 2°.)\ g\,\sin.\,\omega = uvv\xi;$$
$$3°.)\ g\,\cos.\,\omega = v^2\xi^2 - 1 \text{ et } 4°.)\ \pi = \Phi - \omega;$$

vnde differentiando incrementa horum elementorum: scil. df, dg, $d\omega$ et $d\pi$ determinari poterunt, quibus inuentis ad quoduis tempus eam sectionem conicam assignare poterimus, ad quam motum corporis eo saltem tempore referri oportet. Ipsum autem tempus θ hac formula continebitur: $d\theta = \frac{vv\,d\Phi}{\sqrt{f}}$.

§ 66. Vt igitur has orbitae variationes eruamus, differentiemus primo aequationem primam, cuius differentiale per $d\theta$ diuisum dabit:

$$\frac{df}{2d\theta\sqrt{f}} = \frac{2v\xi\,dv}{d\theta} + \frac{vv\,d\xi}{d\theta} = 2uv\xi + vv.\frac{d\xi}{d\theta}.$$

Modo autem vidimus esse $\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{n - 2u\xi}{v}$, quo valore substituto erit $\frac{df}{2d\theta\sqrt{f}} = nv$, vnde incrementum semiparametri orbitae, quod tempusculo $d\theta$ nascitur, satis commode innotescit, cum sit $df = 2nv\,d\theta\sqrt{f} = 2nv^3\xi\,d\theta$. Vnde patet, si vis perturbans n euanesceret, tum etiam parametrum orbitae nullam mutationem esse passurum.

§. 67. Pro excentricitate g et anomalia vera ω coniunctim consideremus has formulas:

$$g\,\text{fin.}\,\omega = u\,v\,v\,\xi \text{ et } g\,\text{cof.}\,\omega = v^3\,\xi^2 - 1,$$

quarum differentialia per $d\,\theta$ diuisa dabunt:

$$\text{I. } \frac{dg\,\text{fin.}\,\omega + g\,d\omega\,\text{cof.}\,\omega}{d\theta} = \frac{uvv\,d\xi}{d\theta} + \frac{2uv\xi\,dv}{d\theta} + \frac{vv\xi\,du}{d\theta}.$$

$$\text{II. } \frac{dg\,\text{cof.}\,\omega - g\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{d\theta} = \frac{2v^3\xi\,d\xi}{d\theta} + \frac{3vv\xi\xi\,dv}{d\theta}.$$

Hic igitur loco $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{d\xi}{d\theta}$ et $\frac{dv}{d\theta}$, valores supra assignati substituantur, ac peruenietur ad has duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{dg\,\text{fin.}\,\omega + g\,d\omega\,\text{cof.}\,\omega}{d\theta} = nuv + mvv\xi + v^3\xi^3 - \xi.$$

$$\text{II. } \frac{dg\,\text{cof.}\,\omega - g\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{d\theta} = 2nvv\xi - uvv\xi\xi,$$

quae aequationes ob

$$v^3\xi^3 - \xi = g\,\xi\,\text{cof.}\,\omega \text{ et } uvv\xi\xi = g\,\xi\,\text{fin.}\,\omega$$

abeunt in has:

$$\text{I. } \frac{dg\,\text{fin.}\,\omega + g\,d\omega\,\text{cof.}\,\omega}{d\theta} = nuv + mvv\xi + g\,\xi\,\text{cof.}\,\omega.$$

$$\text{II. } \frac{dg\,\text{cof.}\,\omega - g\,d\omega\,\text{fin.}\,\omega}{d\theta} = 2nvv\xi - g\,\xi\,\text{fin.}\,\omega.$$

§. 68. Iam prior harum aequationum ducta in fin. ω posterior vero in cof. ω inuicemque additae dabunt hanc aequationem:

$$\frac{dg}{d\theta} = mvv\xi\,\text{fin.}\,\omega + nv\,(u\,\text{fin.}\,\omega + 2v\xi\,\text{cof.}\,\omega),$$

vnde iterum patet, si vires perturbatrices essent nullae, tum excentricitatem g manere constantem, prorsus vti rei natura postulat. Dein vero si faciamus I. cof. ω − II. fin. ω, prodibit

$$\frac{g\,d\omega}{d\theta} = mvv\xi\,\text{cof.}\,\omega + nv\,(u\,\text{cof.}\,\omega - 2v\xi\,\text{fin.}\,\omega) + g\,\xi.$$

Vnde

Vnde patet, casu quo $m = 0$ et $n = 0$ fore $\frac{g\,d\omega}{d\theta} = g\,\xi$, ideoque ob $g\,\xi = \frac{g\,d\Phi}{d\theta}$ erit $d\omega = d\Phi$. Quoniam enim hoc casu linea absidum quiesceret, ob angulum π constantem vtique foret $d\Phi = d\omega$. Denique inuento elemento $d\omega$ ob $d\pi = d\Phi - d\omega$, ideoque $\frac{d\pi}{d\theta} = \xi - \frac{d\omega}{d\theta}$, reperietur pro motu lineae absidum

$$\frac{d\pi}{d\theta} = -\frac{m\,v\,v\,\xi\,cos.\,\omega}{g} - \frac{n\,v\,(n\,cos.\,\omega - 2v\,\xi\,sin.\,\omega)}{g},$$

Vnde itidem patet, casu $m = 0$ et $n = 0$ lineam absidum in eodem situ conseruari.

§. 69. Colligamus nunc quae hactenus sunt eruta; ac si pro tempore quocunque θ fuerit locus perihelii in Π, existente angulo $AO\Pi = \pi$, tum vero orbitae ellipticae semiparameter fuerit $= f$, excentricitas g et anomalia vera $= \omega$; tum pro loco corporis habebitur angulus $AOY = \pi + \omega = \Phi$, eiusque distantia a sole

$$OY = v = \frac{f}{1 + g\,cos.\,\omega}.$$

Vnde cum corpus per tempusculum $d\theta$ in hac ipsa orbita sit progressurum, erit $d\Phi = d\omega$ et $v\,v\,d\omega = d\theta\,\sqrt{f}$, hincque porro

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\sqrt{f}}{v\,v} = \frac{(1 + g\,cos.\,\omega)^2}{f\,\sqrt{f}},$$

qui ergo erit valor ipsius $\xi = \frac{d\Phi}{d\theta}$. Praeterea vero erit

$$d\,v = \frac{f\,g\,d\,\omega\,sin.\,\omega}{(1 + g\,cos.\,\omega)^2}, \text{ hincque}$$

$$\frac{d\,v}{d\theta} = u = \frac{g\,sin.\,\omega}{\sqrt{f}},$$

vnde variationes momentaneas supra inuentas per ipsa orbitae elementa determinare licebit.

§. 70. Elapſo ſcilicet tempore $d\theta$, ob vires perturbatrices m et n primo ſemiparameter orbitae, qui erat $= f$, augmentum accipiet df, ita vt ſit

$$\frac{df}{2 d\theta \sqrt{f}} = n v = \frac{n f}{1 + g \operatorname{coſ.} \omega}.$$

Sicque erit

$$df = \frac{2 n f d\theta \sqrt{f}}{1 + g \operatorname{coſ.} \omega},$$

vnde, poſtquam hinc elapſum fuerit tempus θ, habebitur integrando

$$\int \frac{df}{2 f \sqrt{f}} = -\frac{1}{\sqrt{f}} = \int \frac{n\, d\theta}{1 + g \operatorname{coſ.} \omega};$$

vbi notetur eſſe

$$d\theta = \frac{f\, d\omega \sqrt{f}}{(1 + g \operatorname{coſ.} \omega)^2};$$

quo valore ſubſtituto prodit

$$\frac{df}{2 f^2} = \frac{n\, d\omega}{(1 + g \operatorname{coſ.} \omega)^3},$$ hincque integrando

$$-\frac{1}{4 f f} = n \int \frac{d\omega}{(1 + g \operatorname{coſ.} \omega)^3}.$$

Porro autem pro incremento excentricitatis orbitae, quod tempuſculo $d\theta$ accipiet, erit

$$\frac{dg}{d\theta} = m \sqrt{f} \operatorname{ſin.} \omega + n \left(\frac{g \operatorname{ſin.} \omega}{1 + g \operatorname{coſ.} \omega} + 2 \operatorname{coſ.} \omega\right) \sqrt{f},$$

vnde integrando ad quoduis aliud tempus excentricitas elici debebit.

§. 71. Quaeramus nunc etiam incrementum anomaliae verae, ſeu anguli ω, quod tempuſculo $d\theta$ accipit, et quod inuenimus eſſe:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{m v v \xi \operatorname{coſ.} \omega}{g} + \frac{n v (u \operatorname{coſ.} \omega - 2 v \xi \operatorname{ſin.} \omega)}{g} + \xi,$$

quae expreſſio ſubſtitutis valoribus abit in hanc:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{m \operatorname{coſ.} \omega \sqrt{f}}{g} - \frac{n \operatorname{ſin.} \omega \sqrt{f}}{g} \left(\frac{2 + g \operatorname{coſ.} \omega}{1 + g \operatorname{coſ.} \omega}\right) + \frac{(1 + g \operatorname{coſ.} \omega)^2}{f \sqrt{f}},$$

atque

atque hinc cum sit

$$\frac{d\pi}{d\theta} = \frac{d\Phi}{d\theta} - \frac{d\omega}{d\theta} = \xi - \frac{d\omega}{d\theta},$$

pro motu lineae absidum erit

$$\frac{d\pi}{d\theta} = -\frac{m\ cos.\ \omega \sqrt{f}}{g} + \frac{n\ sin.\ \omega \sqrt{f}}{g.} \frac{(2 + g\ cos.\ \omega)}{1 + g\ cos.\ \omega}.$$

§. 72. Hoc igitur modo omnia incrementa, quae cuncta elementa sectionis conicae tempusculo $d\theta$ a viribus perturbantibus m et n accipiunt, determinauimus. In praecedente vero articulo iam definiuimus, quantum haec orbita a plano A.O.B. dimoueatur a vi r in hoc planum perpendiculariter agente. Has igitur omnes operationes concinnitatis gratia in sequenti articulo colligamus.

Praecepta
pro determinandis perturbationibus, quas orbitae planetarum vel cometarum ab actione aliorum corporum coelestium perpetiuntur.

§. 73. Quoniam perturbationes quam minimae supponuntur, ita vt corpus per aliquod tempus motu regulari per orbitam ellipticam circumferri censeri possit, ponamus certo quodam tempore, quod tanquam epocham fixam spectemus, orbitam planetae siue cometae sitam fuisse in ipso plano A O B, eiusque perihelium fuisse in Π (fig. 1.) existente angulo A O Π $= \pi$, quo quasi longitudo perihelii a directione fixa O A designatur; tum vero fuerit eodem tempore semiparameter orbitae $= f$ et excentricitas $= g$. Hanc igitur orbitam, (quatenus motus regulis *Keplerianis* perfecte est conformis) in qua planeta siue cometa, reuera, circumferretur, si multae vires perturbaturbatrices adessent, orbitam fictam appellemus, ita vt nobis incumbat, pro quouis tempore ab epocha elapso variationes assignare, quibus vera orbita ab hac orbita ficta sit aberratura.

§. 74. Primo igitur vires perturbatrices perpendamus, quae ab actione cuiusque corporis coelestis oriuntur. Elapso igitur ab epocha tempore quocunque $= \vartheta$, reperiatur planeta siue cometa in orbita ficta in Y, sitque
Tab. X. Fig. 3. eius anomalia vera, siue angulus $\Pi O Y = \omega$, ideoque longitudo seu angulus $A O Y = \pi + \omega$, vnde eius distantia a sole erit $O Y = \frac{f}{1 + g \cos. \omega}$. Eodem autem tempore versetur corpus coeleste, a quo perturbatio producatur, supra hoc planum in puncto P, a quo ad planum A O B demittatur perpendiculum P Q iunganturque rectae ad solem ductae P O et Q O, item recta ad Y ducta P Y. Iam si massa corporis in P ponatur $= M$, dum massa solis, vti supra assumsimus, vnitate designatur, vis, qua hoc corpus in solem aget, erit $\frac{M}{OP^2}$, vnde haec vis in directione contraria P O ipsi planetae in Y applicata est concipienda. Praeterea vero planeta in Y immediate trahetur versus P in directione Y P, vi $= \frac{M}{YP^2}$.

§. 75. Primo igitur vis secundum directionem P O, quae est $\frac{M}{PO^2}$, resoluatur secundum directiones P Q et Q O, eritque vis secundum $P Q = \frac{M . PQ}{QO^3}$ et vis secundum $Q O = \frac{M . QO}{PO^3}$. Simili modo, ducta recta Q Y, vis trahens secundum Y P, quae est $\frac{M}{YP^2}$, resoluatur secundum directiones QP et Y Q, eritque vis secundum $QP = \frac{M . QP}{YP^3}$, et et vis secundum $YQ = \frac{M.YQ}{YP^3}$. Quoniam igitur ab hac vi posteriore punctum Y perpendiculariter sursum sollicitatur a vi $= \frac{M.QP}{YP^3}$, a priore vero, quae erat $\frac{M.PQ}{PO^3}$, deorsum, vis ad planum AOB normalis, quam supra designauimus littera r, erit

$$r = \frac{M.QP}{YP^3} - \frac{M.PQ}{PO^3} = M.PQ\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3}\right).$$

Vnde patet, hanc vim sursum esse directam, quando fuerit $PO > YP$, contra vero deorsum, quando fuerit $PO < YP$; siquidem punctum P supra planum AOB versetur. Quod si igitur eueniat, vt corporis P distantiae a sole O et a puncto Y sint inter se aequales, tum vis r euanescet, et punctum Y neque sursum neque deorsum vrgebitur.

§. 76. Vt nunc etiam ambas vires, quas vocauimus m et n, quae in ipso plano AOB sunt positae, hinc definiamus, a puncto Q ad rectam OY normalem ducamus QR; ac primo quidem vis $QO = \frac{M.QO}{PO^3}$, dabit pro directione QR vim $\frac{M.QR}{PO^3}$, et secundum OR vim $\frac{M.RO}{PO^3}$. Simili modo vis secundum YQ, quae est $= \frac{M.YQ}{YP^3}$, resoluta dat pro directione YR vim $= \frac{M.YR}{YP^3}$, et pro directione RQ vim $= \frac{M.RQ}{YP^3}$. Quare cum posuerimus vim a sole recedentem secundum $Ym = m$, vim vero ad hanc directionem normalem secundum $Yn = n$, habebimus:

$$m = -\frac{M.YR}{YP^3} - \frac{M.RO}{PO^3} \text{ et}$$

$$n = \frac{M.RQ}{YP^3} - \frac{M.QR}{PO^3} = M.QR\left(\frac{1}{YP^3} - \frac{1}{PO^3}\right),$$

ita vt haec vis n se habeat ad vim superiorem r vt QR ad PQ.

§. 77. Quod si punctum Y simul a pluribus aliis corporibus coelestibus sollicitetur, quae sint p', p'', p''', etc., ex singulis per formulas modo inuentas ternas vires litteris m, n et r designatas colligi oportet, quibus inuentis et debito modo coniunctis, si ponamus hoc tempore anomaliam veram in orbita ficta fuisse $= \omega$, tum semiparameter orbitae, qui erat $= f$ tempusculo $d\theta$ incrementum accipiet $df = \frac{2nf\sqrt{f}}{1+g\cos.\omega} d\theta$, in cuius formulae integratione quantitates f et g vt constantes spectare licebit. Tum vero meminisse iuuabit esse $d\theta = \frac{f\,d\omega\sqrt{f}}{(1+g\cos.\omega)^2}$. Plerumque autem integrationem nullo modo sperare licebit; ita vt ad computationem tam virium m, n et r quam anguli ω pro pluribus temporibus a se inuicem non nimis remotis confugiendum erit; vbi pro elemento temporis $d\theta$ satis tuto ipsa temporum interualla accipi poterunt. Quo obseruato omnes istae formulae in vnam summam collectae dabunt verum incrementum, quod semiparameter f interea acceperit.

§. 78. Deinde vero incrementum dg quod excentricitas orbitae ab actione virium m et n tempusculo $d\theta$ accipiet, erit

$$dg = m\,d\theta \sin.\omega \sqrt{f} + n\,d\theta \sqrt{f}\left(\frac{g\sin.\omega^2}{1+g\cos.\omega} + 2\cos.\omega\right),$$

vbi circa integrationem eadem sunt tenenda, quae modo ante commemorauimus. Praeterea vero progressio momentanea perihelii erit

$$d\pi = -\frac{m\,d\theta\cos.\omega\sqrt{f}}{g} + \frac{n\sin.\omega\sqrt{f}}{g}\left(\frac{2+g\cos.\omega}{1+g\cos.\omega}\right)d\theta,$$

quo inuento incrementum anomaliae verae erit

$$d\omega = \frac{(1+g\cos.\omega)^2}{f\sqrt{f}}\,d\theta - d\pi,$$

vnde

vnde locus planetae in sua orbita corrigi poterit pro quolibet tempore proposito.

§. 79. Tantum igitur superest, vt indicemus, quantum vera orbita a plano fixo A O B, quouis tempore sit declinatura, quem totum effectum ex vi normali r definiri oportebit; pro quo negotio supra has aequationes nacti sumus:

$$\text{cos.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta = \frac{\int r\,x\,d\,\theta}{\mathfrak{C}} \text{ et sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta = \frac{\int r\,y\,d\,\theta}{\mathfrak{C}}.$$

Vbi, quia $\mathfrak{C}$ in motu regulari erat valor formulae $\frac{v\,v\,d\,\Phi}{d\,\theta}$, nunc constat fore $\mathfrak{C} = \sqrt{f}$:

§. 80. Repraesentet igitur curua A Y B orbitam fictam, in qua pro quopiam tempore θ ab epocha elapso planeta fuerit in Y, vbi perpendiculariter sursum vrgeatur vi Y $r = r$. Iam capiantur istius vis momenta respectu amborum axium O A et O B; eritque momentum prius $= r\,y$; at respectu axis O B momentum erit $= r\,x$; positis scilicet coordinatis O X $= x$ et X Y $= y$. Huiusmodi autem bina momenta pro pluribus temporibus ab epocha elapsis inuestigari concipimus, vt interualla eorum satis tuto per ipsum elementum $d\,\theta$ exprimi queant; tum autem per totum tempus θ ab epocha elapsum haec bina momenta in summam colligantur, atque valores hinc resultantes ponantur: Tab X. Fig. 4.

$$\int r\,x\,d\,\theta = \text{P et } \int r\,y\,d\,\theta = \text{Q},$$

ad quod remedium semper erit confugiendum, quando nulla spes adest has formulas actu integrandi.

§. 81. Quod si iam pro tempore θ ab epocha elapso linea nodorum fuerit recta ON, quam quidem ad nodum ascendentem dirigi concipiamus, vt planeta in puncto N supra planum AOB ascendat, si ponamus angulum $AON = \zeta$, inclinationem vero orbitae $= \eta$, sine vlteriori integratione statim habemus has aequationes:

$$\text{cos.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta = \frac{P}{\sqrt{f}} \text{ et } \text{sin.}\,\zeta\,\text{sin.}\,\eta = \frac{Q}{\sqrt{f}};$$

vnde statim pro positione lineae nodorum colligitur

$$\text{tang.}\,\zeta = \text{tang.}\,AON = \frac{Q}{P};$$

vnde cum sit

$$\text{cos.}\,\zeta = \frac{P}{\sqrt{(PP+QQ)}},$$

erit pro inclinatione

$$\text{sin.}\,\eta = \frac{\sqrt{(PP+QQ)}}{\sqrt{f}},$$

vbi inclinatio η tam est exigua, vt ea a suo sinu non discrepet.

§. 82. Hoc igitur modo ad quoduis tempus ab epocha elapsum non solum vera species elliptica, in qua planeta siue cometa tum mouebitur, verum etiam positio huius orbitae respectu plani fixi AOB assignari poterit; quibus rebus cognitis haud difficile erit, pro quouis tempore verum locum planetae siue cometae definire. Sicque quaestioni circa perturbationem motus tam planetarum quam cometarum ab actione quacunque aliorum corporum ortam satis expedite est satisfactum.

OBSER-