1784

De perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda

Leonhard Euler

DE PERTVRBATIONE MOTVS CHORDARVM AB EARVM PONDERE ORIVNDA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Ab omnibus Geometris, qui chordarum motus adhuc sunt perscrutati, earum proprium pondus est neglectum, quoniam plerumque prae vi tensionis est valde exiguum, vt motum plane non afficere posse videatur. Interim tamen in crassioribus chordis, ac potissimum si earum loco funes extendantur, facile intelligitur, earum motum a proprio pondere haud mediocriter perturbatum iri; quamobrem istas perturbationes aliquanto accuratius inuestigasse operae pretium videtur. Atque hic imprimis situm chordae spectari conuenit, prouti ad horizontem fuerit

erit inclinatus, vnde binos praecipuos casus hic examini subiiciam: alterum quo chordae situs est horizontalis, alterum vero quo est verticalis.

Casus prior.
pro chordis secundum directionem horizontalem extensis.

§. 2. Sit igitur recta A B horizontalis, et chorda in terminis A et B fixa, cuius longitudo vocetur $AB = a$; tum vero species chordae sit eiusmodi, vt longitudinis $= b$ pondus futurum sit $= B$. Vnde si vocemus abscissam $AP = x$, cui ipse arcus A M aequalis censeri potest, et applicatam $PM = y$, quasi infinite paruam spectandam, erit elementi $Mm = dx$ pondus $= \frac{B\,dx}{b}$, qua vi in directione verticali M P deorsum sollicitatur. Tum vero sit tensio chordae in M versus $A = T$, qua ergo punctum M etiam versus P vrgetur vi $= \frac{T\,dy}{dx}$. Ex altera autem parte in directionem contrariam vrgebitur, ab eadem vi suo differentiali aucta, sicque in directione P M sursum pelletur vi $= d.\frac{T.\,dy}{dx}$, ita vt, subtracto pondere, pro hac directione maneat vis $= d.\frac{T\,dy}{dx} - \frac{B\,dx}{b}$, quae per massam elementi $Mm = \frac{B\,dx}{b}$ diuisa praebet vim acceleratricem secundum directionem $PM = \frac{b}{B\,dx}\, d.\frac{T\,dy}{dx} - 1$. Iam quia tensio T a directione horizontali nihil discrepat, ob pondus elementi Mm nullum accipiet augmentum; vnde ipsa tensio T erit constans, ipsique vi, qua chorda tenditur, aequalis; ex quo vis acceleratrix sit $\frac{Tb\,ddy}{B\,dx^2} - 1$, sumto scilicet elemento dx constante. Tab. V. Fig. 1.

§. 3.

§. 3. Confideretur nunc applicata y tanquam functio binarum variabilium, fcilicet abfciffae x et temporis $= t$; hincque pro motu puncti M, qui, vti conftat, fit in ipfa directione P M, fumta x pro conftante, celeritas eius fecundum directionem P M erit $(\frac{dy}{dt})$, hincque acceleratio $= \frac{ddy}{dt^2}$, quae per $2g$ diuifa (denotante g altitudinem lapfus grauium vno minuto fecundo), praebet vim acceleratricem $= \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2})$; quae ergo vi acceleratrici ante inuentae aequalis eft ftatuenda, vnde refultat ifta aequatio:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Tb}{B}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - 1,$$

fiue pofito breuitatis gratia $\frac{2gTb}{B} = cc$, erit

$$\frac{ddy}{dt^2} = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) - 2g.$$

§. 4. Haec aequatio ab illa, quae vulgo pro motu chordarum inuenitur, in eo tantum difcrepat, quod hic infoper reperitur terminus $-2g$. Facile autem haec aequatio ad formam priorem reduci poterit, ponendo $y = X + z$, denotante X certam functionem ipfius x, vnde erit

$$\frac{ddy}{dt^2} = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) \text{ et } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddX}{dx^2} + \left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

vnde habebimus

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = cc\frac{ddX}{dx^2} + cc\frac{ddz}{dx^2} - 2g.$$

Nunc igitur fiat $cc\frac{ddX}{dx^2} - 2g = 0$, quae aequatio praebet:

$$X = \frac{gxx + \alpha x + \beta}{cc},$$

ita vt iam fit

$$y = \frac{gxx + \alpha x + \beta}{cc} + z,$$

et quantitas z nunc determinari debet ex hac aequatione:

$$\frac{ddz}{dt^2} = cc\left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

cuius

cuius integrale completum nouimus esse:

$$z = \Gamma : (ct + x) - \Delta (ct - x),$$

quocirca pro nostro casu habebimus hanc aequationem:

$$y = \frac{gxx + \alpha x + \beta}{cc} + \Gamma : (ct + x) - \Delta : (ct - x),$$

vbi characteres Γ et Δ repraesentant functiones quascunque arbitrarias.

§. 5. Nunc ante omnia efficiendum est, vt pro vtroque chordae termino, hoc est tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$, applicata y euanescat; quae conditio primo adimpleatur in formula $\frac{gxx + \alpha x + \beta}{cc}$, vnde esse debet $\beta = 0$ et $\alpha = -ga$, hincque ipsa haec formula erit $-\frac{gx(a - x)}{cc}$. Pro functionibus autem, posito $x = 0$, fieri debet $\Gamma : ct - \Delta : ct = 0$, sicque functio Δ cum functione Γ congruere debet, ita vt hactenus habeamus hunc valorem:

$$y = -\frac{gx(a - x)}{cc} + \Gamma : (ct + x) - \Gamma : (ct - x).$$

At vero hic insuper requiritur, vt facto $x = a$ fiat

$$\Gamma : (ct + a) = \Gamma : (ct - a),$$

siue in genere $\Gamma : (p + 2a) = \Gamma : p$; vnde patet, scalam huius functionis ita esse debere comparatam, vt omnibus abscissis

$$p,\ p + 2a,\ p + 4a,\ p + 6a, \text{ etc.}$$

quin etiam negatiuis:

$$p - 2a,\ p - 4a,\ p - 6a,$$

applicatae aequales respondeant.

§. 6. Pro ſtatu igitur initiali, vbi $t = 0$, erat

$$y = -\frac{gx(a-x)}{cc} + \Gamma : x - \Gamma : (-x).$$

Ponamus elapſum eſſe tempus $t = \frac{2a}{c}$, vt ſit $ct = 2a$, at tum erit applicata

$$y = -\frac{gx(a-x)}{cc} + \Gamma : (2a+x) - \Gamma : (2a-x),$$

quae expreſſio cum praecedente prorſus conuenit, ita vt, elapſo tempore $t = \frac{2a}{c}$, chorda in eundem plane ſitum reuertatur; vnde apparet, tempus vnius vibrationis fore $= \frac{a}{c}$, prorſus vti neglecta grauitate inuenimus, ita vt proprium chordae pondus hoc caſu motum vibratorium non perturbet.

§. 7. Diſcrimen autem deprehendemus in ſtatu aequilibrii, qui oritur reiectis functionibus; tum enim erit $y = -\frac{gx(a-x)}{cc}$, cum neglecta grauitate foret $y = 0$. Patet igitur, hoc caſu ſtatum aequilibrii non in ipſam rectam horizontalem A B incidere, ſed ab ea deorſum declinare. Chorda ſcilicet capiet figuram curuae catenariae A N B, quam nouimus in ſtatu ſummae tenſionis conuenire cum parabola hac aequatione: $y = -\frac{gx(a-x)}{cc}$, expreſſa. Hinc igitur haud difficulter intelligimus, hoc caſu chordam circa iſtum ſtatum aequilibrii A N B, vtrinque excurſiones abſoluere, perinde ac chordae vulgares circa ipſam rectam A B. Quo obſeruato omnia reliqua Phaenomena non discrepabunt, quae circa chordas, neglecta grauitate, deſcripſimus.

Tab. V. Fig. 2.

Caſus

Casus posterior pro chordis secundum directionem verticalem extensis.

§. 8. Sit igitur recta verticalis $AB = a$, quae simul statum chordae naturalem referat, cuius pondus foret B, si longitudo esset b. Quod si iam vt ante abscissae $AP = x$ respondeat applicata $PM = y$, elementi $Mm = dx$, ponduſculum erit $\frac{B\,dx}{b}$. Hinc si tensio in M ponatur $= T$, et in $m = T + dT$, punctum M in directione PM vt ante sollicitabitur vi $= d.\frac{T\,dy}{dx}$, quae per massulam $\frac{B\,dx}{b}$ diuisa dat vim acceleratricem $= \frac{b}{B\,dx}\, d.\frac{T\,dy}{dx}$. Iam quia elementum Mm ob grauitatem deorsum vrgetur secundum MQ, vi $= \frac{B\,dx}{b}$, ab ea tensio T tantum accipere debet incrementum, vt sit $dT = \frac{B\,dx}{b}$; quo valore substituto erit Tab V. Fig. 3.

$$d.\frac{T\,dy}{dx} = \frac{T\,ddy}{dx} + \frac{B\,dx}{b}\cdot\frac{dy}{dx},$$

ita vt nunc vis acceleratrix sit

$$\frac{bT}{B}\cdot\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.$$

At quia $dT = \frac{B\,dx}{b}$, erit $T = \frac{Bx}{b} + C$, vnde in ipso puncto A prodit tensio $= C$; quare, si chordam a pondere appenso C tendi ponamus, erit vis acceleratrix

$$\left(\frac{Cb}{B} + x\right)\frac{ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.$$

§. 9. Spectemus nunc applicatam y vt functionem duarum variabilium x et temporis t, et quia puncti M celeritas in directione PM est $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, erit vis acceleratrix $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quae vi acceleratrici modo inuentae aequalis posita

posita praebet aequationem pro motu huius chordae

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{Cb}{B} + x\right)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right),$$

ad quam commodius referendam faciamus $\frac{Cb}{B} = c$, ita vt c exhibeat longitudinem chordae, cuius pondus aequale foret ponderi appenso C; hocque modo habebitur:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = (c + x)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Haec autem aequatio longe aliter est comparata quam casu praecedente, quoniam eius integrale nullo adhuc modo erui potuit, quam ob causam etiam non licet solutionem generalem exhibere, quemadmodum casu praecedente successit. Sicque ad solutiones particulares confugere sumus coacti, quandoquidem iam constat, ex pluribus aequationibus particularibus solutionem quasi generalem concinnari posse.

§. 10. Hunc in finem quaeramus casus, quibus oscillationes nostrae chordae motui penduli simplicis fiant conformes. Denotet igitur f longitudinem talis penduli simplicis, fierique debebit $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, cuius integrale completum nouimus esse

$$y = F \sin.\left(\alpha + t\sqrt{\frac{2g}{f}}\right),$$

vbi, quia hic variabilis x pro constante est habita, litera F functionem quamcunque ipsius x designare debet.

§. 11. Cum igitur posuerimus

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}, \text{ erit etiam}$$

$$(c + x)\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{y}{f}$$

quae aequatio, quo facilius tractari possit, faciamus $x = fu$, vt beamus

$$\left(\frac{c}{f}+u\right)\left(\frac{ddy}{du^2}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)+y=0,$$

vbi porro faciamus $\frac{c}{f}=n$, vt fiat

$$(n+u)\left(\frac{ddy}{du^2}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)+y=0.$$

et fi porro ftatuamus $n+u=s$, aequatio noftra contrahetur in hanc formam:

$$\frac{s\,ddy}{ds^2}+\frac{dy}{ds}+y=0, \text{ fiue}$$

$$d.\frac{s\,dy}{ds^2}+y=0,$$

vnde f aequabitur certae cuipiam functioni ipfius s, exiftente $s=\frac{c+x}{f}$.

§. 12. Verum etiam ifta aequatio ita eft comparata, vt nullo modo adhuc integrari potuerit, vnde eius integrale per feriem inueftigare fumus coacti; quem in finem ponamus effe:

$$y=A+Bs+Css+Ds^3+Es^4+\text{etc.}$$

eritque

$$\frac{s\,dy}{ds}=Bs+2Css+3Ds^3+4Es^4+5Fs^5+\text{etc.}$$

hincque

$$d.\frac{s\,dy}{ds^2}=B+4Cs+9Dss+16Es^3+25Fs^4+\text{etc.}$$

quae feries ipfi $-y$ aequalis reddita praebet has determinationes:

$$B=-A;\ C=\frac{A}{1.4};\ D=-\frac{A}{1.4.9};\ E=\frac{A}{1.4.9.16};\ \text{etc.}$$

ita vt iam habeamus:

$$y=A\left(1-\frac{s}{1}+\frac{ss}{1.4}-\frac{s^3}{1.4.9}+\frac{s^4}{1.4.9.16}-\frac{s^5}{1.\ldots.25}+\text{etc.}\right.$$

§. 13. Verum iste valor literae y, quia tantum vnicam constantem arbitrariam A inuoluit, tantum pro integrali particulari haberi potest; interim tamen facile est ex hoc ipso valore particulari integrale completum elicere, id quod sequenti modo praestabitur. Ponamus esse

$$v = 1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \frac{s^5}{1.\ldots.25} + \text{etc.}$$

ita vt sit

$$d.\frac{s\,dv}{ds} + v = 0, \text{ siue } \frac{s\,ddv}{ds^2} + \frac{dv}{ds} + v = 0,$$

et pro integrali completo inueniendo statuamus $y = vz$, eritque

$$dy = v\,dz + z\,dv \text{ et } ddy = v\,ddz + dv\,dz - z\,ddv,$$

qui valores in nostra aequatione euoluta

$$\frac{s\,ddy}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + y = 0$$

substituti producent hanc aequationem:

$$\frac{vs\,ddz + 2s\,dv\,dz + sz\,ddv}{ds^2} + \frac{v\,dz + z\,dv}{ds} + vz = 0,$$

a qua si prior aequatio

$$\frac{s\,ddv}{ds^2} + \frac{dv}{ds} + v = 0$$

per z multiplicata subtrahatur, relinquetur ista:

$$\frac{sv\,ddz + 2s\,dv\,dz}{ds^2} + \frac{v\,dz}{ds} = 0,$$

ex qua statim elicimus

$$\frac{ddz}{dz} = -\frac{2dv}{v} - \frac{ds}{s},$$

cuius integrale est

$$l\frac{dz}{ds} = -2lv - ls + lD, \text{ siue}$$

$\frac{dz}{ds} = \frac{D}{svv}$, ita vt sit $z = D\int\frac{ds}{svv} + E$.

§. 14.

§. 14. Quare cum posuerimus $y = vz$, consecuti sumus integrale completum

$$y = Dv \int \frac{ds}{svv} + Ev,$$

quod duas inuoluit constantes arbitrarias D et E, quarum altera ita debet determinari, vt posito $x = 0$, siue $s = \frac{c}{f}$, fiat $y = 0$; quo facto insuper efficiendum est, vt posito $x = a$ fiat itidem $y = 0$; at vero posito $s = \frac{c}{f}$ fit

$$v = 1 - \frac{c}{f} + \frac{cc}{1.4ff} - \frac{c^3}{1.4.9.f^3} + \frac{c^4}{1.4.9.16f^4} - \text{etc.}$$

Verum quemnam valorem formula integralis $\int \frac{ds}{svv}$ hoc casu $s = \frac{c}{f}$ sit adeptura, nullo modo patet; quocirca denuo ad series infinitas erit confugiendum, vbi totum negotium huc redit, vt integrale completum nostrae aequationis per series infinitas euoluamus, ita vt nulla amplius formula integralis occurrat. Verum in hoc ipso noua difficultas deprehenditur, quoniam praeter seriem iam inuentam nullae aliae aequationi satisfacere posse videtur.

§. 15. Quod si hanc circumstantiam attentius perpendamus, reperiemus nostram aequationem ad illud genus pertinere, de quo in *Calculo Integrali* ostendi, integrale completum aliter per series exprimi non posse, nisi ponatur $y = p + q\,ls$, ita vt binae series pro p et q sint inuestigandae, quarum posterior per ls sit affecta. Hoc posito erit

$$dy = dp + \frac{q\,ds}{s} + dq\,ls \text{ et}$$

$$ddy = ddp + \frac{2\,dq\,ds}{s} - \frac{b\,ds^2}{ss} + ddq\,ls.$$

Hic scilicet duplicis generis termini occurrunt, quorum alteri a logarithmo sunt liberi, alteri vero per ls affecti,

 quos

quos seorsim in aequatione nostra

$$\frac{s\,d\,d\,y}{d\,s^2} + \frac{d\,y}{d\,s} + y = 0$$

substituamus, vnde duae resultabunt aequationes sequentes:

$$\frac{s\,d\,d\,p}{d\,s^2} + \frac{2\,d\,q}{ds} + \frac{d\,p}{d\,s} + p = 0,$$

$$\frac{s\,d\,d\,q}{d\,s^2} + \frac{d\,p}{d\,s} + q = 0.$$

§. 16. Quia posterior aequatio ab ea non discrepat, cuius integrale particulare iam supra per seriem euoluimus, erit etiam hic

$$q = A\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1\ldots16} - \text{etc.}\right)$$

quare pro p statuamus hanc seriem:

$$p = \alpha + \beta s + \gamma s s + \delta s^3 + \varepsilon s^4 + \zeta s^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{dp}{ds} = \beta + 2\gamma s + 3\delta s^2 + 4\varepsilon s^3 + 5\zeta s^4 + \text{etc. et}$$

$$\frac{ddp}{ds^2} = 2\gamma + 2.3\delta s + 3.4\varepsilon s s + 4.5\zeta s^3 + 5.6\eta s^4 + \text{etc.}$$

praeterea vero erit

$$\frac{dq}{ds} = -\frac{A}{1} + \frac{2As}{1.4} - \frac{3Ass}{1.4.9} + \frac{4As^3}{1\ldots16} - \text{etc.}$$

Hos igitur valores ordine substituamus, vt sequitur:

$$\begin{aligned}
\frac{sddp}{ds^2} &= \phantom{\beta+{}} 2\gamma s + 2.3\delta s s + 3.4\varepsilon s^3 + 4.5\zeta s^4 + 5.6\eta s^5 \text{ etc.}\\
+\frac{dp}{ds} &= \beta + 2\gamma s + 3\delta s s + 4\varepsilon s^3 + 5\zeta s^4 + 6\eta s^5 \text{ etc.}\\
+p &= \alpha + \beta s + \gamma s s + \delta s^3 + \varepsilon s^4 + \zeta s^5 \text{ etc.}\\
+\frac{2dq}{ds} &= -\frac{2A}{1} + \frac{4As}{1.4} - \frac{6Ass}{1.4.9} + \frac{8As^3}{1.4.9.16} - \frac{10As^4}{1\ldots25} + \frac{12As^5}{1\ldots36} \text{ etc.}
\end{aligned}$$

§. 17. Quia igitur omnes hae series iunctim sumtae nihilo debent esse aequales, inde sequentes adipiscimur determinationes:

$$\beta = \frac{2A}{1} - \alpha$$

$$\gamma = -\frac{4A}{1.4.4} - \frac{\beta}{4}$$

$\delta =$

$$\delta = \frac{6A}{1.4.9.9} - \frac{\gamma}{9}$$
$$\varepsilon = -\frac{8A}{1.4.9.16.16} - \frac{\delta}{16}$$
$$\zeta = \frac{10A}{1 \ldots \ldots 25.25} - \frac{\varepsilon}{25}$$
etc. etc.

fine fubftituendo praecedentes valores habebimus:

$$\alpha = \alpha$$
$$\beta = \frac{2A}{1} - \alpha$$
$$\gamma = -\frac{4A}{1.4.4} - \frac{2A}{1.4} + \frac{\alpha}{1.4}$$
$$\delta = \frac{6A}{1.4.9.9} + \frac{4A}{1.4.4.9} + \frac{2A}{1.4.9} - \frac{\alpha}{1.4.9}$$
$$\varepsilon = -\frac{8A}{1.4.9.16.16} - \frac{6A}{1.4.9.9.16} - \frac{4A}{1.4.4.9.16} - \frac{2A}{1.4.9.16} + \frac{\alpha}{1.4.9.16}.$$

§. 18. Hinc igitur patet, fingularum literarum β, γ, δ, ε, etc. valores duabus confiftere partibus, altera per A affecta, altera per α: vnde breuitatis gratia ponamus:

$$\beta = A\mathfrak{B} - \alpha;\ \gamma = A\mathfrak{C} + \frac{\alpha}{1.4};$$
$$\delta = A\mathfrak{D} - \frac{\alpha}{1.4.9};\ \varepsilon = A\mathfrak{E} + \frac{\alpha}{1.4.9.16};\ \text{etc.}$$

ita vt fit

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{1};$$
$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{1.4.4} - \frac{2}{1.4};$$
$$\mathfrak{D} = \frac{6}{1.4.9.9} + \frac{4}{1.4.4.9} + \frac{2}{1.4.9};$$
$$\mathfrak{E} = -\frac{8}{1.4.9.16.16} - \frac{6}{1.4.9.9.16} - \frac{4}{1.4.4.9.16} - \frac{2}{1.4.9.16};$$
etc. etc.

atque nunc habebimus

$$p = \alpha\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \text{etc.}\right)$$
$$+ A\left(\mathfrak{B}s + \mathfrak{C}ss + \mathfrak{D}s^3 + \mathfrak{E}s^4 + \text{etc.}\right)$$

exiftente

$$q = A\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \text{etc.}\right)$$

 vnde

vnde colligimus noſtrum integrale completum:

$$y = (\alpha + A\,ls)\left(1 - \frac{s}{1} + \frac{ss}{1.4} - \frac{s^3}{1.4.9} + \frac{s^4}{1.4.9.16} - \frac{s^5}{1 \ldots 25} + \text{etc.}\right)$$
$$+ A\,(\mathfrak{B}s + \mathfrak{C}ss + \mathfrak{D}s^3 + \mathfrak{E}s^4 + \mathfrak{F}s^5 + \text{etc.})$$

vbi A et α ſunt binae conſtantes arbitrariae.

§. 19. Primum igitur iſtae conſtantes ita debent definiri, vt poſito $x = 0$, ſiue $s = \frac{c}{f}$, fiat $y = 0$, ſicque habebitur:

$$0 = \left(\alpha + A\,l\,\frac{c}{f}\right)\left(1 - \frac{c}{f} + \frac{cc}{1.4\,ff} - \frac{c^3}{1.4.9\,f^3} + \frac{c^4}{1 \ldots 16\,f^4} - \text{etc.}\right)$$
$$+ A\left(\frac{\mathfrak{B}c}{f} + \frac{\mathfrak{C}cc}{ff} + \frac{\mathfrak{D}c^3}{f^3} + \frac{\mathfrak{E}c^4}{f^4} + \frac{\mathfrak{F}c^5}{f^5} + \text{etc.}\right.$$

vnde litera α per A definiri poteſt. Deinde vero poni debet $x = a$, ſiue $s = \frac{c+a}{f}$, ac valor pro y reſultans denuo debet euaneſcere; tum vero omnes termini per A diuiſi praebebunt aequationem, ex qua longitudinem penduli ſimplicis f inueſtigari oportet, cuius nullum eſt dubium quin infiniti dentur valores reales, quorum quilibet oſcillatorium motum regularem exhibebit. Tum vero iam ſatis ſuperque eſt oſtenſum, quemadmodum ex pluribus motibus ſimplicibus infiniti alii motus compoſiti aſſignari queant; quamobrem, quia hinc nihil amplius definire licet, huic argumento fuſius non immoramur.

METHO-