1784

De oscillationibus minimis funis libere suspensi

Leonhard Euler

DE

OSCILLATIONIBVS MINIMIS FVNIS LIBERE SVSPENSI.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Sit tota longitudo funis OMF $= a$ et species eius talis, vt si longitudo ponatur $= e$, pondus sit $=$ E; vnde nostri funis pondus erit $= \frac{Ea}{e}$. Iam elapso tempore $= t$ teneat funis situm OMF, qui a recta verticali OA quam minime distet, ita vt recta OA longitudini funis aequalis censeri queat; vnde fit OA $= a$. Iam vocetur abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$ et arcus FM $= s$, qui ergo abscissae x aequalis aestimatur. Consideretur nunc elementum $Mm = ds = dx$, eiusque pondus erit $= \frac{E\,dx}{e}$, quo pondere hoc elementum deorsum in directione MQ vrgetur. Tum vero fit tensio funis in M $=$ T, in m vero $=$ T $+ d$T: atque euidens est, incrementum tensionis dT ponduſculo eius Tab. IV. Fig. 4.

elementi $M m$, quod eſt $\frac{E\,dx}{e}$, aequale eſſe debere, quia ſingula funis elementa quam minime a directione verticali declinant; vnde cum ſit $dT = \frac{E\,dx}{e}$, erit $T = \frac{Ex}{e}$. Sicque in ipſo puncto ſuſpenſionis O tenſio funis erit $T = \frac{Ea}{e}$, ſcilicet toti ponderi funis aequalis.

§. 2. Quia nunc punctum M a tenſione T deorſum trahitur, a tenſione vero $T + dT$ ſurſum, ob declinationem minimam ab illa tenſione T in directione MP ſollicitabitur vi $= \frac{T\,dy}{dx}$; ergo a tenſione $T + dT$ in directionem contrariam MR vrgebitur vi $= \frac{T\,dy}{dx} + d.\frac{T\,dy}{dx}$, ſicque vis reſidua in directione MR vrgens $= d.\frac{T\,dy}{dx}$. Quoniam igitur inuenimus tenſionem $T = \frac{Ex}{e}$, erit iſta vis

$$= \frac{E}{e}\, d.\frac{x\,dy}{dx} = \frac{E}{e}\left(\frac{x\,ddy}{dx} + dy\right)$$

ſumto elemento dx conſtante; quae vis ſi diuidatur per maſſulam $\frac{E\,dx}{e}$, erit vis acceleratrix $= \frac{x\,ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx}$. In hac determinatione vis acceleratricis ad variationem temporis non reſpeximus; quare cum applicata y tanquam functio ambarum variabilium x et t ſpectari debeat, iſtam vim acceleratricem more ſolito ita exhiberi oportet, vt ſit $x\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)$, ſiue $= \left(\frac{d.\,x\,dy}{dx^2}\right)$.

§. 3. Quoniam igitur funis punctum M alium motum habere nequit, niſi in directione PM, eius celeritas in hac directione erit $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$; hincque eius acceleratio $= \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, quae diuiſa per $2g$, (denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo) dat ipſam vim acce-

acceleratricem $= \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ita vt nunc habeamus istam aequationem differentio-differentialem:

$$\left(\frac{d.xdy}{dx^2}\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ siue}$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + 2g\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

In qua aequatione omnes plane motus, quos funis noster ex O suspensus recipere potest, continentur. Facile autem intelligitur, hos motus in infinitum variari posse, prouti initio funi alius atque alius status, tam ratione figurae quam motus, fuerit inductus.

§. 4. Totum ergo negotium huc est perductum, vt integrale completum istius aequationis differentialis inuestigetur, quod si successerit, omnes funis motus aeque feliciter determinare poterimus, ac praestare licuit in motu chordarum, vbi pro statu initiali quocunque totum motum sequentem assignare valuimus. Verum hic maxima occurrit difficultas, cum nullo artificio aequationis inuentae integrale completum adhuc exquirere licuerit, ita vt de solutione perfecta istius problematis desperare simus coacti.

§. 5. Quare praeclare nobiscum agi erit censendum, si modo solutiones particulares nobis exhibere licuerit; tales autem solutiones ea methodo, qua celeberrimus *Daniel Bernoulli* primus feliciter est vsus, plures atque adeo infinitas reperire licebit, quae, quomodocunque inter se coniunctae, problemati itidem satisfaciunt; etiam infinitos motus diuersos, quos funis recipere potest, assignare poterimus, ita vt hinc solutio propemodum completa obtineri

tineri videatur, quae tamen semper eo laborabit defectu, vt ad statum initialem quemcunque neutiquam applicari possit.

§. 6. Tales autem solutiones particulares reperiemus, si in eos casus inquiramus, quibus noster funis motum oscillatorium regularem, perinde ac pendulum simplex, recipere potest. Ponamus igitur motum funis ita esse comparatum, vt cum motu penduli simplicis, cuius longitudo sit $= f$, conueniat; id quod eueniet, si fuerit

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}, \text{ siue } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{2gy}{f},$$

quae aequatio bis integrata praebet:

$$y = F \sin.\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{f}}\right),$$

vbi F et ζ sunt binae constantes arbitrariae per duplicem integrationem ingressae. Quia autem hic alteram variabilem x pro constante habuimus, istae litterae etiam vt functiones ipsius x spectari poterunt.

§. 7. Cum nunc posuerimus $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, necesse est, vt etiam sit $\left(d.\frac{xdy}{dx^2}\right) = -\frac{y}{f}$; in qua aequatione cum tempus t non amplius insit, id nunc vt constans spectari poterit, ita vt habeamus:

$$\frac{d.\,xdy}{dx^2} = \frac{x\,ddy}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{f}.$$

Verum hic iterum superius incommodum vsu venit, vt ista aequatio nullo modo integrari queat; vnde coacti fuimus eius integrationem per approximationes saltem inuestigare, quod igitur hic tanquam nobis concessum assumamus. Quo autem facilius appareat, qualis functio ipsius x hinc pro y sit proditura, longitudinem f, quae hic potissimum

tissimum definiri debet, ex calculo elidamus, ponendo $x = f u$; tum enim habebimus hanc aequationem:

$$\frac{u\, d\, d\, y}{d\, u^2} + \frac{d\, y}{d\, u} = -y.$$

Vnde concludimus, applicatam y certae cuipiam functioni ipsius u aequalem fore, quam functionem hoc charactere indicemus: $\Pi : u$, ita vt sit $y = \Pi : u$; tum vero etiam satisfaciet $y = G . \Pi : u$, vbi constans G etiam tempus t, quippe quod in hoc calculo vt constans est spectatum, vtcunque inuoluere potest; at loco u valore $\frac{x}{f}$ restituto erit $y = G . \Pi : \frac{x}{f}$.

§. 8. Hoc igitur modo geminos valores pro y sumus adepti, quos inter se aequales esse oportet; primo scilicet est $y = F \sin. (\zeta + t \surd \frac{2g}{f})$, deinde etiam $y = G . \Pi : \frac{x}{f}$, qui valores vt inter se aequales reddantur, quoniam F complectitur functionem quamcunque ipsius x, at G functionem quamcunque ipsius t, euidens est, statui debere

$$F = \Pi : \frac{x}{f} \text{ et } G = \sin. (\zeta + t \surd \frac{2g}{f})$$

vbi pro ζ vera quantitas constans accipi debet. Hoc igitur modo deducti sumus ad sequentem solutionem nostri problematis particularem, quae est

$$y = \Pi : (\frac{x}{f} . \sin. (\zeta + t \surd \frac{2g}{f})), \text{ siue etiam}$$
$$y = \mathfrak{A} . \Pi : \frac{x}{f} . \sin. (\zeta + t \surd \frac{2g}{f}),$$

vbi $\mathfrak{A}$ denotat quantitatem constantem quamcunque; atque iste valor ipsius y aequationi nostrae differentio-differentiali:

$$\frac{2}{2g} (\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}) = x (\frac{d\, d\, y}{d\, t^2}) + (\frac{d\, y}{d\, x}),$$

 sem-

ſemper ſatisfacit, quamcunque magnitudinem ipſi f tribuamus.

§. 9. Verum hactenus nondum praecipuae conditionis, quam noſtrum problema inuoluit, rationem habuimus, qua funis in puncto O fixus ſtatuitur, cui conditioni vt ſatisfaciamus, neceſſe eſt vt poſito $x = a$ fiat $y = 0$, idque pro omni tempore; vnde patet, eſſe debere $0 = \Pi : \frac{a}{f}$. Quare cum Π ſit certa quaedam functio determinata, etiamſi nobis ſit incognita, quantitatem f ita aſſumi oportet, vt fiat $\Pi : \frac{a}{f} = 0$; hinc ſcilicet pertingimus ad certam quandam aequationem, quae praeter quantitatem cognitam a etiam incognitam f complectetur, ex qua propterea valorem ipſius f ſcrutari oportebit.

§. 10. Quodſi haec aequatio $\Pi : \frac{a}{f} = 0$ eſſet algebraica, ad certum dimenſionum numerum ipſius f aſſurgens, ex ea totidem valores pro f erui poſſent. Verum cum iſta functio $\Pi : \frac{a}{f}$ ſit maxime tranſcendens, ita vt aliter niſi per ſeriem infinitam exhiberi nequeat, in ea quantitas incognita f ad numerum infinitum aſcendere eſt cenſenda; vnde etiam innumeri valores idonei huius quantitatis f reſultabunt.

§. 11. Quanquam autem indoles iſtius functionis Π nobis plane eſt incognita, tamen tuto aſſumere licet, hanc aequationem: $\Pi : \frac{a}{f} = 0$, innumerabiles inuoluere radices, quas, etſi adhuc incognitas, his litteris indicemus: f; f'; f''; f'''; f''''; etc. ex quarum qualibet peculiarem motum regularem, quem funis noſter recipere valeat, eliciemus;

mus; omnes ſcilicet iſti motus ſequentes praebebunt aequationes:

$$\text{I. } y = \mathfrak{A}\,\Pi : \tfrac{x}{f}\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}).$$
$$\text{II. } y = \mathfrak{B}\,\Pi : \tfrac{x}{f'}\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'}}).$$
$$\text{III. } y = \mathfrak{C}\,\Pi : \tfrac{x}{f''}\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''}}).$$
$$\text{IV. } y = \mathfrak{D}\,\Pi : \tfrac{x}{f'''}\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'''}}).$$
$$\text{V. } y = \mathfrak{E}\,\Pi : \tfrac{x}{f''''}\ \text{ſin.}\ (\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''''}}).$$
etc. etc.

§. 12. Hinc igitur patet, infinitis modis fieri poſſe, vt idem funis ex puncto O ſuſpenſus oſcillationes regulares et pendulo cuipiam ſimplici conformes abſoluat; ſi modo initio ipſi talis ſtatus fuerit impreſſus, qualis ad ſingulos hos motus producendos requiritur; pendulorum autem omnibus his motibus ſynchronorum longitudines erunt ipſae radices ſupra memoratae f; f'; f''; f'''; f''''; etc. Vnde ſimul patet, eas tantum radices motus reales ſuppeditare, quae non ſolum ſint reales, ſed etiam poſitiuae.

§. 13. His inuentis cum in aequatione differentio-differentiali

$$\tfrac{1}{2g}\left(\tfrac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = x\left(\tfrac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) + \left(\tfrac{d\,y}{d\,x}\right)$$

variabilis y in omnibus terminis vnicam habeat dimenſionem, manifeſtum eſt, ſi iſti aequationi ſatisfaciant ſeorſim valores $y = P$; $y = Q$; $y = R$; tum eidem quoque eſſe ſatisfacturum hunc valorem ex illis vtcunque compoſitum:

$$y = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S + \text{etc.}$$

Vnde pro motu noſtri funis ex ſuperioribus ſolutionibus

 parti-

particularibus colligimus hanc solutionem maxime generalem:

$$y = \mathfrak{A}\,\Pi : \tfrac{a}{f} \,.\, \text{sin.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}}) + \mathfrak{B}\,\Pi : \tfrac{x}{f'} \,.\, \text{sin.}(\zeta' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'}})$$
$$+ \mathfrak{C}\,\Pi : \tfrac{x}{f''}\, \text{sin}\,(\zeta'' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''}}) + \mathfrak{D}\,\Pi : \tfrac{x}{f'''}\, \text{sin.}(\zeta''' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f'''}})$$
$$+ \mathfrak{E}\,\Pi : \tfrac{x}{f''''}\, \text{sin.}(\zeta'''' + t\sqrt{\tfrac{2g}{f''''}}) + \text{etc.}$$

In se enim complectitur non solum innumerabiles coefficientes constantes, nempe $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{E}$; etc. sed etiam totidem angulos arbitrarios ζ; ζ'; ζ''; ζ'''; ζ''''; etc.

§. 14. Quodsi ergo aequationis $\Pi : \frac{a}{f} = 0$ omnes radices assignare liceret, ex iis vtique solutionem tam generalem deducere possemus, quae sine vllo dubio omnes plane motus, qui in fune locum habere queant, in se complectatur. Neque vero idcirco problema principale resoluere liceret, quo pro statu funis initiali quocunque eius motus secuturus requiritur; ad hoc enim necesse esset, infinitas illas constantes arbitrarias pro statu initiali dato debite determinare, quod certe opus omnes vires analyseos longe esset superaturum.

§. 15. Ex formulis autem inuentis non solum ad quoduis tempus figura funis per applicatam y assignari potest, sed etiam celeritas, qua quodlibet funis punctum M eodem tempore secundum directionem MR mouetur. Cum enim ista celeritas sit $(\frac{dy}{dt})$; sufficiet, eius valorem ex prima formula natum exhibuisse, qui erit

$$(\tfrac{dy}{dt}) = \mathfrak{A}\sqrt{\tfrac{2g}{f}}\,\Pi : \tfrac{x}{f}\ \text{cos.}(\zeta + t\sqrt{\tfrac{2g}{f}});$$

qui valor si prodiret positiuus, celeritas dextrorsum, sin autem

autem fuerit negatiuus, ſiniſtrorſum erit directa. His igitur in genere definitis, accuratius inquiramus in indolem functionis charactere Π deſignatae, quo deinceps facilius valores litterae f inueſtigare valeamus.

De reſolutione aequationis.

$$\frac{d.\,x\,d\,y}{d\,x^2} + \frac{y}{f} = 0.$$

§. 16. Cum haec aequatio ſit differentialis ſecundi gradus, eius integrale completum duas comprehendere debet conſtantes arbitrarias. Quare cum ſupra hoc integrale ita exhibuerimus, vt eſſet $y = G\,\Pi : \frac{x}{f}$; littera G alteram tantum harum conſtantium ſignificat: altera igitur in ipſa functione $\Pi : x$ inuoluatur, neceſſe eſt, quae ergo iam ita determinari poſſe videtur, vt poſito $x = a$ fiat $y = 0$; ſicque ipſa quantitas f maneret indeterminata. Vnde ſequeretur, eundem funem ad omnes plane motus oſcillatorios ſimplices adaptari poſſe; quod tamen non ſolum experientiae repugnat, ſed etiam cum ipſa natura quaeſtionis conſiſtere nequit: quamobrem omni cura nobis eo eſt incumbendum, vt iſtam alteram conſtantem ex indole caſus propoſiti rite determinemus.

§. 17. Latet ergo ſine dubio in ipſa hypotheſi, qua ſumimus funem abſoluere oſcillationes regulares pendulo ſimplici, cuius longitudo $= f$, iſochronas, conditio quaepiam cum iſto ſtatu eſſentialiter connexa, cui nondum ſatisfecimus, et ex qua alteram illam conſtantem determinari oportet. Hanc autem conditionem reperiemus in ipſa particula funis extrema in F ſita, quae a fune ſecundum

Tab. IV. Fig. 5. tangentem F G retrahitur vi ipſius ponderi aequali; ideoque perinde moueri incipiet circa punctum G, ac ſi ibi ope fili G F eſſet ſuſpenſa. Quoniam igitur eius motus pendulo ſimplici longitudinis f conformis ſupponitur, neceſſe eſt, vt tangens F G, ſeu etiam ſubtangens A G longitudini penduli f ſit aequalis. At vero iſta ſubtangens exprimitur formula $= -\frac{y\,dx}{dy}$; atque hinc iam manifeſtum eſt, conſtantem illam ita determinari debere, vt pro puncto F, vbi $x = 0$, valor formulae $\frac{y\,dx}{dy}$ euadat $= -f$.

§. 18. Quoniam functio, quam ſupra per $\Pi : \frac{x}{f}$ indicauimus, ita debet determinari, vt poſito $x = 0$ fiat $\frac{y\,dx}{dy} = -f$; haec conditio per indolem functionis ſequenti modo repraeſentari poterit. Cum ſit $y = G.\, \Pi : \frac{x}{f}$, erit more iam plerumque recepto differentialia functionum exprimendi

$$dy = G\,\frac{dx}{f}\,\Pi' : \frac{x}{f}, \text{ hinc } \frac{dy}{dx} = \frac{G}{f}\,\Pi' : \frac{x}{f};$$

per conditionem autem praeſcriptam debet eſſe $y = -\frac{f\,dy}{dx}$, poſito ſcilicet $x = 0$, vnde determinatio inuenta hanc conditionem inuoluet, vt ſit $\Pi : 0 = -\Pi' : 0$, cui conditioni cum fuerit ſatisfactum, tum demum functio $\Pi : \frac{x}{f}$ rite erit determinata, vt poſito $x = a$ ex aequatione $\Pi : \frac{a}{f} = 0$ valores idonei quantitatis f elici queant.

§. 19. His praenotatis, quoniam integratio aequationis propoſitae vires Analyſeos ſuperare videtur, eius integrale per ſeriem infinitam inueſtigemus. Quae operatio quo facilior reddatur, ponamus iterum $\frac{x}{f} = u$, ſiue $x = fu$, vt habeamus hanc aequationem reſoluendam: $\frac{d.\,u\,dy}{du^2} + y = 0$;

et

et iam fingamus esse

$$y = \alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3 + \varepsilon u^4 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{dy}{du} = \beta + 2\gamma u + 3\delta uu + 4\varepsilon u^3 + \text{etc.}$$

hincque

$$\frac{udy}{du} = \beta u + 2\gamma uu + 3\delta u^3 + 4\varepsilon u^4 + \text{etc.}$$

ergo

$$\frac{dudy}{du^2} = \beta + 4\gamma u + 9\delta u^2 + 16\varepsilon u^3 + 25\zeta u^4 + \text{etc.}$$

haec ergo feries ipfi $-y$ aequalis fieri debet, vnde confequimur has determinationes:

I. $\beta = -\alpha$;

II. $4\gamma = -\beta = \alpha$, ergo $\gamma = \frac{\alpha}{4}$;

III. $9\delta = -\gamma$, ergo $\delta = -\frac{\alpha}{4.9}$;

IV. $16\varepsilon = -\delta$, ideoque $\varepsilon = \frac{\alpha}{4.9.16}$;

V. $25\zeta = -\varepsilon$, ergo $\zeta = -\frac{\alpha}{4.9.16.25}$.

Vnde feries noftra ficta nunc ita erit determinata, vt fit

$$y = \alpha\left(1 - \frac{u}{1} + \frac{uu}{1.4} - \frac{u^3}{1.4.9} + \frac{u^4}{1.4.9.16} - \frac{u^5}{1\ldots 25} + \frac{u^6}{1\ldots 36}\ \text{etc.}\right).$$

§. 20. Verum quia haec feries vnam tantum conftantem arbitrariam α inuoluit, etiam integrale tantum particulare noftrae aequationis refert, ex quo per methodos cognitas haud difficulter integrale completum erui poffet. Sed ante quam hunc laborem fufcipiamus, videamus, an iftud integrale iam fatisfaciat conditioni fupra inuentae, quae erat $\Pi : 0 = -\Pi' : 0$, quod enim fi non contigerit, tum demum integrali completo erit opus. Loco u igitur fcribamus valorem $\frac{x}{f}$, fiatque

II:

$$\Pi : \frac{x}{f} = 1 - \frac{x}{f} + \frac{xx}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} \text{ etc. in infinitum,}$$

hincque

$$\tfrac{1}{f}\Pi' : \frac{x}{f} = -\frac{1}{1.f} + \frac{2x}{1.4.f^2} - \frac{3xx}{1.4.9.f^3} + \frac{4x^2}{1.4.9.16f^4} \text{ etc. in infinitum.}$$

Iam posito $x = 0$ habebimus $\Pi : 0 = 1$ et $\Pi' : 0 = -1$. Sicque sponte satisfit conditioni praescriptae, qua fieri debet $\Pi : 0 = -\Pi' : 0$; quocirca functio nostra $\Pi : \frac{x}{f}$ iam rite est determinata, ita vt sit

$$\Pi : \frac{x}{f} = 1 - \frac{x}{1.f} + \frac{xx}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

sicque posito $x = a$ quantitatem f definire oportebit ex hac aequatione infinita:

$$0 = 1 - \frac{a}{1.f} + \frac{aa}{1.4.f^2} - \frac{a^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

quae cum in infinitum porrigatur, facile intelligitur, eam infinitas comprehendere radices, prorsus vti supra iam assumsimus.

§. 21. Ne autem quis putet, ex integrali completo fortasse adhuc alias series pro nostra functione $\Pi : \frac{x}{f}$ locum habere posse; ipsum integrale completum aequationis differentio-differentialis

$$\frac{u\,ddy}{du^2} + \frac{dy}{du} + y = 0,$$

inuestigemus, vbi scilicet loco $\frac{x}{f}$ scripsimus u. Quem in finem integrale particulare, quod modo inuenimus, ponamus $= v$, ita vt sit

$$v = y = 1 - \frac{u}{1} + \frac{uu}{1.4.} - \frac{u^3}{1.4.9} + \frac{u^4}{1.4.9.16} - \text{etc.}$$

pro integrali autem completo statuamus esse $y = vz$; hinc ergo erit

$$dy = z\,dv + v\,dz \quad \text{et} \quad ddy = z\,ddv + 2\,dv\,dz + v\,ddz,$$

qui-

quibus valoribus substitutis fiet

$$\frac{uzddv}{du^2} + \frac{2udvdz}{du^2} + \frac{uvddz}{du^2} + \frac{zdv}{du} + \frac{vdz}{du} + vz = 0.$$

Quia vero v est integrale particulare, erit vtique

$$\frac{uddv}{du^2} + \frac{dv}{du} + v = 0,$$

quae aequatio ducta in z et ab illa subtracta relinquet hanc aequationem:

$$\frac{2udvdz}{du^2} + \frac{uvddz}{du^2} + \frac{vdz}{du} = 0,$$

ex qua elicitur

$$\frac{ddz}{dz} = -\frac{du}{u} - \frac{2dv}{v}.$$

§. 22. Commode ergo hic vsu venit, vt peruenerimus ad hanc aequationem per logarithmos sponte integrabilem, quandoquidem eius integrale manifesto est

$$l\frac{dz}{du} = lC - lu - 2lv,$$

quae aequatio ad numeros reducta dat

$$\frac{dz}{du} = \frac{C}{uv^2}, \text{ ideoque } dz = \frac{Cdu}{uv^2},$$

vnde porro integrando colligimus $z = D + C\int\frac{du}{uv^2}$; sicque integrale completum nostrae aequationis erit

$$y = vz = Dv + Cv\int\frac{du}{uv^2},$$

quod vtique duas constantes arbitrarias C et D inuoluit; vnde si constans C sumatur euanescens, oritur integrale particulare $y = Dv$, quod est id ipsum, quod ante per seriem expressimus.

§. 23. Inuento igitur integrali completo videamus, quomodo constantes C et D definiri oporteat, vt fiat $y = -\frac{fdy}{dx}$, posito scilicet $x = 0$. Hunc in finem loco $\frac{x}{f}$

ſcribamus u, vt fiat $y = -\frac{dy}{du}$; quare cum ſit $y = vz$, oportebit eſſe

$$vz = -\frac{dy}{du} = -\frac{z\,dv}{du} - \frac{v\,dz}{du}$$

poſito ſcilicet $u = 0$. Quia autem eſt

$$v = 1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.4} - \frac{u^3}{1.4.9} + \text{etc. erit}$$

$$dv = -\frac{du}{1} + \frac{2u\,du}{1.4} - \frac{3uu\,du}{1.4.9} + \text{etc.}$$

Hinc poſito $u = 0$ erit $v = 1$ et $dv = -du$, quibus valoribus ſubſtitutis conditio noſtra praebet $\frac{dz}{du} = 0$. Iam vero inuenimus $\frac{dz}{du} = \frac{C}{uv^2}$, quae formula nihilo aequalis eſſe nequit, niſi ſit $C = 0$, ita vt integrale determinatum, quod pro noſtro inſtituto requiritur, ſit $y = Dv$; quae eſt ea ipſa functio, qua ſupra ſumus vſi; ita vt nunc certi ſimus, functionem noſtram $\Pi : \frac{x}{f}$ alium valorem habere non poſſe, niſi quem ſupra ipſi tribuimus, ſcilicet:

$$\Pi : \frac{x}{f} = 1 - \frac{x}{1.f} + \frac{xx}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

vnde poſito $x = a$ valores penduli ſimplicis f definiri oportet.

De reſolutione

aequationis infinitae

$$0 = 1 - \frac{a}{1.f} + \frac{a^2}{1.4.f^2} - \frac{a^3}{1.4.9.f^3} + \text{etc.}$$

§. 23. Ponamus ſtatim breuitatis gratia $\frac{a}{f} = n$, vt reſoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{n}{1} + \frac{nn}{1.4} - \frac{n^3}{1.4.9} + \frac{n^4}{1.4.9.16} \text{ etc.}$$

vnde elici oportet omnes valores litterae n, qui huic aequationi ſatisfaciunt. Quia autem haec aequatio reuera ad gradum infiniteſimum aſcendit, vires algebrae communis lon-

longiſſime ſuperat, quippe quae non vltra quartum gradum extenditur; quare ſingularibus artificiis opus erit, vt ſaltem vnam duasue eius radices perſcrutemur.

§. 24. Repraeſentemus noſtram aequationem hac forma generali:

$$0 = 1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 - En^5 + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$A = 1; \; B = \frac{1}{1.4}; \; C = \frac{1}{1.4.9}; \; D = \frac{1}{1.4.9.16}; \text{ etc.}$$

et fingamus hanc formam aequari producto ex his infinitis factoribus ſimplicibus:

$$(1 - \alpha n)(1 - \beta n)(1 - \gamma n)(1 - \delta n) \text{ etc. in infinitum;}$$

ex quibus valores litterae n incognitae erunt

$$n = \frac{1}{\alpha}; \; n = \frac{1}{\beta}; \; n = \frac{1}{\gamma}; \; n = \frac{1}{\delta}; \text{ etc.}$$

ita vt tota quaeſtio huc ſit reducta: quemadmodum hos coefficientes α; β; γ; δ; etc. eliciamus? Hunc in finem conſideremus hanc aequationem:

$$1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 \text{ etc.}$$
$$= (1 - \alpha n)(1 - \beta n)(1 - \gamma n) \text{ etc.}$$

ex qua ſumendis logarithmis fit

$$l(1 - An + Bnn - Cn^3 \text{ etc.})$$
$$= l(1 - \alpha n) + l(1 - \beta n) + l(1 - \gamma n) + \text{etc.}$$

vnde differentiando et per dn diuidendo nanciſcimur

$$\frac{-A + 2Bn - 3Cnn + \text{etc.}}{1 - An + Bnn - Cn^3 \text{ etc.}} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha n} - \frac{\beta}{1 - \beta n} - \frac{\gamma}{1 - \gamma n} - \text{etc.}$$

ſiue

$$\frac{A - 2Bn + 3Cnn - \text{etc.}}{1 - An + Bnn - Cn^3 + \text{etc.}} = \frac{\alpha}{1 - \alpha n} + \frac{\beta}{1 - \beta n} + \frac{\gamma}{1 - \gamma n} + \text{etc.}$$

§. 25. Iam ſimplices fractiones more ſolito in ſeries conuertamus, eritque

$$\frac{\alpha}{1-\alpha n} = \alpha + \alpha^2 n + \alpha^3 nn + \alpha^4 n^3 + \alpha^5 n^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{\beta}{1-\beta n} = \beta + \beta^2 n + \beta^3 nn + \beta^4 n^3 + \text{etc.}$$
$$\frac{\gamma}{1-\gamma n} = \gamma + \gamma^2 n + \gamma^3 nn + \gamma^4 n^3 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

quae ſeries quo commodius in vnam ſummam colligi queant, ſtatuamus

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = \mathfrak{A},$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = \mathfrak{B},$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = \mathfrak{C},$$

et ſumma omnium iſtarum ſerierum erit

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} n + \mathfrak{C} nn + \mathfrak{D} n^3 + \mathfrak{E} n^4 + \text{etc.}$$

ita vt ſit

$$\frac{A - 2Bn + 3Cnn - 4Dn^3 + etc.}{1 - An + Bnn - Cn^3 + Dn^4 - etc.} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} n + \mathfrak{C} nn + \mathfrak{D} n^3 + \mathfrak{E} n^4 + \text{etc.}$$

Multiplicemus nunc hanc ſeriem per denominatorem

$$1 - An + Bnn - Cn^3 + \text{etc.}$$

et productum ita repraeſentemus:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\mathfrak{A} + \mathfrak{B}n + & \mathfrak{C}nn + & \mathfrak{D}n^3 + & \mathfrak{E}n^4 + & & \text{etc.} \\
-A\mathfrak{A}n - & A\mathfrak{B}nn - & A\mathfrak{C}n^3 - & A\mathfrak{D}n^4 - & A\mathfrak{E}n^5 - & \text{etc.} \\
& +B\mathfrak{A}nn + & B\mathfrak{B}n^3 + & B\mathfrak{C}n^4 + & B\mathfrak{D}n^5 + & \text{etc.} \\
& & -C\mathfrak{A}n^3 - & C\mathfrak{B}n^4 - & C\mathfrak{C}n^5 - & \text{etc.} \\
& & & +D\mathfrak{A}n^4 + & D\mathfrak{B}n^5 + & \text{etc.} \\
& & & & -E\mathfrak{A}n^5 - & \text{etc.}
\end{array}$$

quorum membrorum ſumma quia aequari debet illi numeratori:

$$A - 2Bn + 3Cnn - 4Dn^3 + 5En^4 - \text{etc.}$$

ſe-fequentes praebet determinationes:

I. $\mathfrak{A} = A$;

II. $\mathfrak{B} = A\,\mathfrak{A} - 2\,B$;

III. $\mathfrak{C} = A\,\mathfrak{B} - B\,\mathfrak{A} + 3\,C$;

IV. $\mathfrak{D} = A\,\mathfrak{C} - B\,\mathfrak{B} - C\,\mathfrak{A} - 4\,D$;

V. $\mathfrak{E} = A\,\mathfrak{D} - B\,\mathfrak{C} - C\,\mathfrak{B} - D\,\mathfrak{A} + 5\,E$;

VI. $\mathfrak{F} = A\,\mathfrak{E} - B\,\mathfrak{D} - C\,\mathfrak{C} - D\,\mathfrak{B} - E\,\mathfrak{A} - 6\,F$;

etc. etc.

§. 26. Subftituamus nunc loco litterarum A; B; C; D; etc. fuos valores numericos et pro litteris Germanicis $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$; fequentes eruemus valores:

I. $\mathfrak{A} = 1$;

II. $\mathfrak{B} = 1.\,1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$;

III. $\mathfrak{C} = 1.\,\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4.3} = \frac{1}{3}$;

IV. $\mathfrak{D} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.\frac{1}{2} + \frac{1}{36} - \frac{1}{1.4.9.4} = \frac{11}{48}$;

V. $\mathfrak{E} = \frac{11}{48} - \frac{1}{4.3} + \frac{1}{2.36} - \frac{1}{576} + \frac{1}{576.5} = \frac{19}{120}$;

VI. $\mathfrak{F} = \frac{19}{120} - \frac{1}{4}.\frac{11}{48} + \frac{1}{36}.\frac{1}{3} - \frac{1}{576}.\frac{1}{2} + \frac{1}{576.25} - \frac{1}{576.25.6} = \frac{475}{4320}$.

etc. etc.

§. 27. Quo nunc vfum harum fummarum in definiendis radicibus α; β; γ; δ; etc. earumque maxima potiffimum, quae fit α, clarius doceamus, ponamus in genere

$$\alpha^i + \beta^i + \gamma^i + \text{etc.} = \mathfrak{M} \text{ et}$$

$$\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} \text{ etc.} = \mathfrak{N},$$

atque euidens eft, quo maior fuerit exponens i, eo magis primum terminum α^i reliquos effe fuperaturum, qui adeo tandem prae primo euanefcunt. Vnde fi exponens i fuerit fatis magnus, proxime erit $\alpha^i = \mathfrak{M}$ hincque $\alpha = \sqrt[i]{\mathfrak{M}}$. Reuera autem eft $\alpha < \sqrt[i]{\mathfrak{M}}$; hinc cum fit $n = \frac{1}{\alpha}$ erit $n > \sqrt[i]{\frac{1}{\mathfrak{M}}}$; fcilicet

 ifti

isti valores $\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{M}}}$ continuo propius ad verum valorem litterae n accedent; quod ad casus supra euolutos accommodemus in sequenti tabella:

	Differentia.
$n > \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{A}}} = 1,000000$	414213
$n > \sqrt[2]{\frac{1}{\mathfrak{B}}} = 1,414213$	28037
$n > \sqrt[3]{3} = 1,442250$	3064
$n > \sqrt[4]{\frac{48}{11}} = 1,445314$	410
$n > \sqrt[5]{\frac{120}{19}} = 1,445724$	61
$n > \sqrt[6]{\frac{4320}{473}} = 1,445785$	9

Hi valores tam prompte ad veritatem conuergunt, vt ex differentiis concludere liceat, verum valorem fore

$$n = 1,445795.$$

§. 28. Quemadmodum isti valores ascendendo ad veritatem appropinquant, ita etiam alios valores exhibere licet, qui descendendo ad veritatem continuo propius accedant. Cum enim ex formulis generalibus supra assumtis sit

$$\alpha\,\mathfrak{M} = \alpha^{i+1} + \alpha\,\beta^i + \alpha\,\gamma^i + \text{etc.}$$

erit

$$\alpha\,\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = (\alpha-\beta)\,\beta^i + (\alpha-\gamma)\,\gamma^i \text{ etc.}$$

Vnde cum sit $\alpha > \beta$, erit $\alpha\,\mathfrak{M} - \mathfrak{N} > 0$, hincque $\alpha > \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}$, vnde sequitur $n < \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$. Quare ex inuentis valoribus $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$ obtinebimus sequentes approximationes:

$n <$

$n < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = 2,000000$	500000
$n < \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = 1,500000$	45455
$n < \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = 1,454545$	7177
$n < \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} = 1,447368$	1279
$n < \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{F}} = 1,446089$	213
	35
	6
	1

Hinc igitur verum valorem ipſius n non tam accurate concludere licet, quam ſupra eſt factum; vnde tuto ſtatuere poterimus $n = 1,445795$.

§. 28. Cum igitur certi ſimus eſſe $n = 1,445795$, erit $l n = 0,1601067$, hinc $l \alpha = 9,8398933$, ideoque $\alpha = 0,691661$. Hinc iam quaeramus ſingulas eius poteſtates, quae erunt

$$\begin{array}{lll} l\alpha^2 = 9,6797866 & \text{ergo} & \alpha^2 = 0,478395 \\ l\alpha^3 = 9,5196799 & - \; - & \alpha^3 = 0,330887 \\ l\alpha^4 = 9,3595732 & - \; - & \alpha^4 = 0,228862 \\ l\alpha^5 = 9,1994665 & - \; - & \alpha^5 = 0,158295 \\ l\alpha^6 = 9,0393598 & - \; - & \alpha^6 = 0,109486 \end{array}$$

§. 29. Has igitur poteſtates ipſius α auferamus a ſummis poteſtatum omnium radicum $\alpha; \beta; \gamma; \delta$; etc. vt relinquantur ſummae poteſtatum reliquarum hoc modo:

$$\begin{aligned} \beta + \gamma + \delta + \text{ etc. } &= \mathfrak{A} - \alpha = 0,308339 = \mathfrak{A}' \\ \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{ etc. } &= \mathfrak{B} - \alpha^2 = 0,021604 = \mathfrak{B}' \\ \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{ etc. } &= \mathfrak{C} - \alpha^3 = 0,002446 = \mathfrak{C}' \end{aligned}$$

$\beta^4 +$

$$\beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.} = \mathfrak{D} - \alpha^4 = 0,000305 = \mathfrak{D}'$$
$$\beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \text{etc.} = \mathfrak{E} - \alpha^5 = 0,000038 = \mathfrak{E}'$$
$$\beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \text{etc.} = \mathfrak{F} - \alpha^6 = 0,000005 = \mathfrak{F}'.$$

§. 30. Ex his iam valoribus fimili modo, quo ante, appropinquando radicem β elicere licebit, cuius valores afcendendo ita fe habebunt:

	Differentiae.
$\beta < \sqrt[1]{\mathfrak{A}'} = 0,30833$	
	16135
$\beta < \sqrt[2]{\mathfrak{B}'} = 0,14698$	
	1224
$\beta < \sqrt[3]{\mathfrak{C}'} = 0,13473$	
	258
$\beta < \sqrt[4]{\mathfrak{D}'} = 0,13215$	
	154
$\beta < \sqrt[5]{\mathfrak{E}'} = 0,13060$	

Vltimo autem valore $\mathfrak{F}'$ vti plane non licet, quia hic valor per fe nimis eft incertus: ex differentiis autem concludimus, verum valorem effe circiter $\beta = 0,13045$; neque enim accuratius eum definire licet, ac fortaffe hic iam non exiguus latet error; ex eo autem fequitur fore

$$n = \frac{1}{\beta} = 7,6658.$$

§. 31. Quia ifte valor β non parum eft incertus, ex eo multo minus quicquam pro fequentibus radicibus γ; δ; ε; concludere licebit. Hactenus ergo pro longitudine penduli fimplicis ifochroni geminum valorem fumus adepti; maximum fcilitet f vna cum proximo fequenti f'. Cum enim fit $f = \frac{a}{n} = \alpha a$ et $f' = \beta a$, duo ifti valores erunt $f = 0,691661.a$ et $f' = 0,1304\,a$. Pro reli-

reliquis autem valoribus plus nobis non constat, quam eos continuo fore minores; neque etiam alia via ad eos valores numeri n cognoscendos, nisi vt tentando, vti licet, quibus summa istius seriei infinitae:

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{nn}{1.4} - \frac{n^3}{1.4.9} + \text{etc.}$$

ad nihilum redigatur, quod quidem binis casibus inuentis euenire iam nouimus, scilicet

$$n = 1,445795 \text{ et } n = 7,6658.$$

Praeterea vero facto calculo conclusus est tertius valor $n = 18,63$; vnde fit $\gamma = 0,053$ et $f'' = 0,053.a.$ Pro reliquis autem numero n adhuc multo maiores valores tribui oportebit, vnde continuo plures terminos huius seriei computare necesse erit, antequam eius summam propemodum saltem cognoscere licet.

§. 32. Hoc ipsum argumentum de oscillationibus minimis funis libere suspensi iam olim cum illustr. *Bernoullio* fusius pertractaui. Cum autem eo tempore Analysis, quae circa functiones duarum pluriumué variabilium versatur, adhuc prorsus esset incognita, ad quam tamen istud problema potissimum est referendum; methodus, qua tum sum vsus, non satis ad naturam huius quaestionis accommodata videtur, quamobrem non dubitavi, istam quaestionem hic de nouo retractare, eiusque solutionem ex veris principiis huius quasi nouae Analyseos deriuare, quo clarius appareat, quantum etiamnunc in hoc negotio ob defectum Analyseos desideretur; quandoquidem vix vlla spes adhuc affulget, solutionem huius problematis ad eum perfectionis gradum euehendi, quo motum oscillatorium chordarum definire licuit.