1784

De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis

Leonhard Euler

DE CVRVIS RECTIFICABILIBVS IN SVPERFICIE CONI RECTI DVCENDIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum certo affirmare liceat, in superficie cylindrica nullas duci posse lineas, quae rectificationem admittant, praeter ipsas lineas rectas axi cylindri parallelas: idem multo magis de superficiebus conicis statuendum videtur, propterea quod cylindrus tanquam species coni spectari potest, dum altitudo in infinitum augetur. Interim tamen obseruaui, dari eiusmodi conos rectos, in quorum superficie, praeter lineas rectas a vertice coni ad circumferentiam basis ductas, innumeras alias lineas curuas geometrice describi posse, quae rectificationes admittant; quod autem neutiquam in omnibus conis rectis, multo minus in obliquis effici posse videtur. Talis enim constructio tantum in iis conis rectis succedit, quorum latera ad diametrum basis rationalem tenent rationem; quae inuestigatio cum neutiquam

quam sit obuia, operae pretium esse duxi eam hic data opera explicare.

§. 2. Sit recta A B axis coni et punctum A eius vertex, at Z punctum quodcunque in superficie coni, vnde ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y; hincque ad axem ducatur normalis Y X, vt locus puncti Z determinetur per ternas coordinatas inter se normales, quae vocentur $AX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$. Iam ducatur recta X Z, quae erit radius sectionis coni ad axem normaliter in puncto X factae, ac manifestum est fore $AX : XZ$ vt axis coni A B ad radium basis. Quare si axis coni vocetur $AB = a$ et radius basis $BC = b$, ob $XZ = \surd(yy + zz)$ erit $x : \surd(yy + zz) = a : b$, ideoque $bx = a\surd(yy + zz)$, quae est aequatio naturam superficiei huius coni exprimens. Quodsi porro latus coni A C dicatur $= c$, vt sit $c = \surd(aa + bb)$, tum vero ducta concipiatur recta A Z, quae erit $= \surd(xx + yy + zz)$, erit etiam $x : \surd(xx + yy) = a : c$, quibus positis ostendam, quoties ratio $b : c$ fuerit rationalis, tum semper infinitas curuas rectificabiles in superficie huius coni duci posse. Tab. II. Fig. 1.

§. 3. Sumamus igitur punctum Z versari in tali curua rectificabili, atque ex elementis constat, elementum istius curuae hac formula exprimi: $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, quam ergo quomodo integrabilem reddi oporteat, hic erit docendum. Quo autem hoc facilius praestari possit vocemus rectam $XZ = v$, vt sit $v = \surd(yy + zz)$ et $x : v = a : b$, siue $av = bx$; tum vero in calculum introducatur angulus $YXZ = \Phi$, eritque

$$XY = y = v \cos.\Phi \text{ et } YZ = z = v \sin.\Phi,$$

sicque omnia per has binas nouas variabiles v et Φ definire poterimus, cum sit $x = \frac{av}{b}$. Hinc enim erit

$$dx = \frac{a\,dv}{b};$$

$$dy = dv \cos.\Phi - v\,d\Phi \sin.\Phi \text{ et}$$

$$dz = dv \sin.\Phi + v\,d\Phi \cos.\Phi,$$

vnde colligitur

$$dy^2 + dz^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2$$

cui formulae si addatur $dx^2 = \frac{aa\,dv^2}{bb}$, obtinebitur quadratum elementi curuae

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{dv^2(aa+bb) + bbvv\,d\Phi^2}{bb},$$

quam ob rem ob $aa + bb = cc$ elementum curuae in superficie coni describendae erit

$$= \frac{1}{b}\sqrt{(cc\,dv^2 + bbvv\,d\Phi^2)} = \frac{c}{b}\sqrt{(dv^2 + \frac{bb}{cc}vv\,d\Phi^2)}.$$

Tota igitur quaestio nunc huc est reducta, cuiusmodi relatio algebraica inter v et quantitates angulum Φ determinantes, veluti sin. Φ vel tang. Φ, constitui debeat, vt ista formula differentialis integrationem admittat.

§. 4. Quoniam hic angulus Φ quasi datus et cognitus spectatur, etiam angulus $\frac{b\Phi}{c}$ quasi cognitus spectari poterit, dummodo $\frac{b}{c}$ fuerit numerus rationalis; atque huic fundamento innititur conditio ante memorata, quod, nisi ratio $b:c$ fuerit rationalis, quaestio nostra resolui nequeat. Loco anguli Φ ergo introducatur alius angulus ω, vt sit $\omega = \frac{b\Phi}{c}$, et quia nunc elementum curuae quaesitae erit $= \frac{c}{b}\sqrt{(dv^2 + v^2\,d\omega^2)}$, quaeritur eiusmodi relatio inter v et ω, qua ista formula reddatur integrabilis.

§. 5.

§. 5. Quanquam autem olim varias methodos expoſui, plurimas formulas differentiales integrabiles reddendi, tamen nullum artificium, quo tum temporis ſum vſus, ad praeſens inſtitutum accommodari poteſt, ita vt fateri cogar, me nullam viam directam perſpicere poſſe, qua iſta formula differentialis $\sqrt{(dv^2+vv\,d\omega^2)}$ ad integrationem reuocari queat. Quare cum ea pars Analyſeos, quae in huiusmodi inueſtigationibus verſatur, et cui nomen Analyſeos infinitorum indeterminatae impoſui, etiamnunc parum ſit exculta, ea maxima incrementa inde acceptura erit cenſenda, ſi Geometrae methodum directam fuerint perſcrutati, cuius beneficio iſta formula $\sqrt{(dv^2+vv\,d\omega^2)}$, aliaeque huius generis ad integrabilitatem perduci queant.

§. 6. Equidem hunc laborem penitus deſerere fuiſſem coactus, niſi obſeruaſſem, iſtam formulam ope certae ſubſtitutionis ad iſtam ſpeciem: $\sqrt{(dX^2+dY^2)}$ reduci poſſe, cuius reſolutio vtique eſt in poteſtate, quandoquidem totum negotium eo redit, vt curuae algebraicae rectificabiles inueſtigentur, quippe quarum coordinatae orthogonales idoneos valores pro quantitatibus X et Y ſuppeditabunt. Quam ob rem ante omnia in eiusmodi quantitates X et Y nobis erit inquirendum, vt fiat $dX^2+dY^2=dv^2+vv\,d\omega^2$; tum vero vt ambo differentialia dX et dY integrationem admittant.

§. 7. Statim quidem in oculos incurrit, primae conditioni ſatisfieri ſtatuendo $dX=dv$ et $dY=v\,d\omega$, vnde quidem integrando fieret $X=v$; verum altera formula $Y=\int v\,d\omega$ integrabilitate deſtituitur; neceſſe enim eſt, vt ambo iſti valores indefinite euadant integrabiles, quocirca prio-

priorem conditionem generaliter adimpleamus statuendo

$$dX = dv \sin.\theta + v\, d\omega \cos.\theta \text{ et}$$

$$dY = dv \cos.\theta - v\, d\omega \sin.\theta,$$

quandoquidem hinc conficitur

$$dX^2 + dY^2 = dv^2 + vv\, d\omega^2$$

quicunque etiam angulus pro θ substituatur. Vnde nunc quaestio eo est perducta, num pro θ eiusmodi angulus accipi queat, vt inde ambae formulae euadant integrabiles, id quod quidem in aprico est positum. Si enim sumamus $\theta = \omega$, perspicuum est inde repertum iri $X = v \sin.\omega$ et $Y = v \cos.\omega$, quibus ergo valoribus pro X et Y constitutis inde vicissim erit

$$v = \sqrt{(XX + YY)} \text{ et } \tang.\omega = \frac{X}{Y}$$

ideoque

$$\sin.\omega = \frac{X}{\sqrt{(XX + YY)}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}.$$

§. 8. Tota ergo quaestio circa curuas rectificabiles in superficie conica inueniendas eo est reducta, vt quaerantur binae quantitates X et Y, vnde oriatur formula $\sqrt{(dX^2 + dY^2)}$ integrabilis. Quodsi enim fuerit

$$\int \sqrt{(dX^2 + dY^2)} = S$$

ita vt S sit quantitas algebraica, statim inde nanciscimur, vt modo vidimus, $v = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$; tum vero $\tang.\omega = \frac{X}{Y}$, hinque porro

$$\sin.\omega = \frac{X}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}} \text{ et } \cos.\omega = \frac{Y}{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}.$$

Deinceps vero ex angulo ω definiatur angulus Φ, vt sit $\Phi = \frac{c\,\omega}{b}$, quo angulo inuento pro singulis punctis Z curuae

in

in superficie coni ducendae habebuntur ternae coordinatae:

$$1^\circ.\ AX = x = X = \frac{av}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{(X^2 + Y^2)};$$

$$2^\circ.\ XY = y = v\,\text{cos.}\,\Phi = \text{cos.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}\ \text{ac}$$

$$3^\circ.\ YZ = z = v\,\text{sin.}\,\Phi = \text{sin.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}.$$

Denique vero, in quo cardo rei versatur, ipsa curuae ductae longitudo erit $\frac{c}{b}\int\sqrt{(dX^2 + dY^2)} = \frac{c}{b}S$, quae omnes quatuor quantitates manifesto sunt algebraicae.

§. 9. Inuestigemus igitur in genere omnes relationes inter X et Y, vnde quantitas S resultet algebraica. Hunc in finem statuamus secundum praecepta olim tradita $dY = p\,dX$, fietque $dS = dX\sqrt{(1 + pp)}$, quae ambae formulae differentiales reddi debent integrabiles. Hunc in finem vtamur reductione consueta, quae dat

$$Y = pX - \int X\,dp \quad \text{et} \quad S = X\sqrt{(1 + pp)} - \int\frac{Xp\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Iam statuamus

$$\int X\,dp = P \quad \text{et} \quad \int\frac{Xp\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = Q,$$

ita vt fiat

$$Y = pX - P \quad \text{et} \quad S = X\sqrt{(1 + pp)} - Q,$$

sicque efficiendum erit, vt ambae quantitates P et Q euadant algebraicae. Ex binis autem postremis formulis integralibus deducimus $X = \frac{dP}{dp}$, ex altera vero $X = \frac{dQ\sqrt{(1 + pp)}}{p\,dp}$, qui duo valores inter se aequati praebent $p\,dP = dQ\sqrt{(1 + pp)}$, ex qua aequatione colligitur

$$p = \frac{dQ}{\sqrt{(dP^2 - dQ^2)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1 + pp)} = \frac{dP}{\sqrt{(dP^2 - dQ^2)}}.$$

Hinc ergo si pro Q accipiatur functio quaecunque algebraica ipsius P, omnes istae formulae euadent algebraicae,

sicque

ſicque noſtrum problema generaliter reſoluetur ſequenti modo.

Solutio
quaeſtionis propoſitae.

§. 10. Introducta noua variabili P, eius pro lubitu ſumatur functio quaecunque algebraica Q, indeque ſtatuatur $d\,Q = q\,d\,P$, ita vt etiam q ſit functio algebraica ipſius P; tum hinc quaeratur quantitas

$$p = \frac{d\,Q}{\sqrt{(d\,P^2 - d\,Q^2)}} = \frac{q}{\sqrt{(1 - qq)}},$$

vnde fiet $d\,p = \frac{d\,q}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}$, vbi quia q eſt functio ipſius P, ſi ſtatuatur $d\,q = r\,d\,P$, fiet $d\,p = \frac{r\,d\,P}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}$, atque hinc porro colligimus $X = \frac{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}{r}$, quo valore inuento reperietur porro

$$Y = \frac{q\,(1-qq)}{r} - P \text{ et } S = \frac{1-qq}{r} - Q.$$

§. 11. Cum nunc omnes iſtae formulae ſint functiones algebraicae ipſius P, ex his valoribus primo definiatur angulus ω, vt ſit tang. $\omega = \frac{X}{Y}$, ex eoque porro angulus $\Phi = \frac{c\,\omega}{b}$, atque hinc ternae coordinatae pro quouis puncto curuae quaeſitae Z erunt vti iam ſupra indicauimus:

1°. $A\,X = x = \frac{a}{b}\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;
2°. $X\,Y = y = \text{coſ.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;
3°. $Y\,Z = z = \text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$;

at

at vero longitudo curuae in ſuperficie coni hoc modo deſcriptae erit

$$=\frac{c}{b}\cdot S=\frac{c}{b}X\sqrt{(1+pp)}-\frac{c}{b}Q.$$

Hae autem formulae eo laborant incommodo, vt curua inde nata vehementer fiat complicata, etiamſi pro Q functiones ſatis ſimplices ipſius P accipiantur, quam ob rem non incongruum erit ſolutiones ſimpliciores aliunde repetere.

Solutio
ſpecialis ſimpliciſſima.

§. 12. Quoniam res eo eſt perducta, vt formula $\sqrt{(dX^2+dY^2)}$ reddatur integrabilis, ſine vllis ambagibus ſtatim perſpicitur, hoc fieri ſtatuendo $dY=n\,dX$, vnde fit $Y=nX+f$; tum enim erit $dS=dX\sqrt{(1+nn)}$, ideoque $S=X\sqrt{(1+nn)}+g$, vbi pro n numerum quemcunque aſſumere licet. Ex his valoribus ergo quaeratur primo angulus ω vt ſit tang. $\omega=\frac{X}{nX+f}$, ex quo porro formetur alius angulus $\Phi=\frac{c\omega}{b}$, quo inuento denique linea curua quaeſita his formulis determinabitur:

1°. $AX=x=\frac{a}{b}\sqrt{((nn+1)XX+2nfX+ff)}$;

2°. $XY=y=\text{cof.}\,\Phi\sqrt{((nn+1)XX+2nfX+ff)}$;

3°. $YZ=z=\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{((nn+1)XX+2nfX+ff)}$.

§. 13. Quodſi ſumamus $f=0$, vt ſit $Y=nX$, tum habebitur tang. $\omega=\frac{1}{n}$, ideoque ipſe angulus ω conſtans; conſtans quoque erit alter angulus $\Phi=\frac{c\omega}{b}$, quem ergo ponere licet $=\alpha$, et iam perinde eſt, ſiue fractio $\frac{c}{b}$ ſit rationalis nec ne; vnde iſta ſolutio ad omnes plane conos

 ac-

accommodari poterit; tum autem elementa pro curuae constructione erunt:

1°. $AX = x = \frac{aX}{b} \sqrt{(nn+1)}$;

2°. $XY = y = X \cos. \alpha \sqrt{(nn+1)}$; et

3°. $YZ = z = X \sin. \alpha \sqrt{(nn+1)}$;

ac denique longitudo curuae $= X\sqrt{(nn+1)} + g$, vnde ob angulum $YXZ = \alpha$ euidens est, his formulis indicari, omnes rectas ex vertice coni in eius superficie eductas, hoc casu eas esse, quas vt per se perspicuas iam remouimus. Quando autem littera f non euanescit, quoniam aequatio inter X et Y est pro linea recta, euidens est, his casibus prodituras esse eas lineas in superficie coni ductas, quae si superficies in planum explanaretur, futurae essent lineae rectae. Vbi autem probe notandum est, istas lineas cono obuolutas eatenus tantum pro algebraicis haberi posse, quatenus ratio $b:c$ est rationalis.

§. 14. Atque haec etiam est ratio, cur helices Archimedis in superficie cylindri ductae pro algebraicis haberi nequeant, etiamsi, dum superficies in planum explicatur, euadant rectae, quemadmodum etiam circulus basin constituens etiam in rectam euoluitur, cum tamen in ipsa superficie sit circulus, ideoque neutiquam rectificabilis; pro cylindro autem sit fractio $\frac{c}{b}$ infinita, ideoque algebraica esse cessat.

Solutio

particularis quaestionis propositae.

§. 15. Cum res eo sit perducta, vt posito $dY = p\,dX$ hae duae formulae $p\,dX$ et $dX\sqrt{(1+pp)}$ redddandantur integrabiles, facile perſpicitur, his conditionibus ſatisfieri, ſi capiatur

$$p = \frac{A X^n}{2} - \frac{X^{-n}}{2 A};$$

dummodo enim non ſit $n = \pm 1$, formula $p\, d X$ integrationem admittit. Quoniam autem hinc erit

$$\sqrt{1 + p p} = \frac{A X^n}{2} + \frac{X^{-n}}{2 A}$$

manifeſto quoque altera formula integrationem admittit; tum igitur habebimus:

$$Y = \frac{A}{2(n+1)} X^{n+1} - \frac{1}{2A(1-n)} X^{-n+1} + f \text{ et}$$
$$S = \frac{A}{2(n+1)} X^{n+1} + \frac{1}{2A(1-n)} X^{-n+1} + g.$$

Ex quibus ergo per formulas ſupra expoſitas curua in ſuperficie coni facile deſcribetur, ſi modo fractio $\frac{c}{b}$ fuerit rationalis.

Alia Solutio generalis quaeſtionis propoſitae.

§. 16. Poſtquam negotium perductum eſt ad has formulas:

$$Y = p X - \int X\, d p \text{ et}$$
$$S = X \sqrt{(1 + p p)} - \int \frac{X p\, d p}{\sqrt{(1 + p p)}}$$

ſtatuamus vt ante $\int X\, d p = P$ vt fiat $X = \frac{d P}{d p}$, qui valor ſubſtitutus dabit

$$Y = \frac{p\, d P}{d p} - P \text{ et}$$
$$S = \frac{d P}{d p} \sqrt{(1 + p p)} - \int \frac{p\, d P}{\sqrt{(1 + p p)}}.$$

Nunc autem per reductiones consuetas reperitur

$$\int \frac{p\,dP}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

ita vt sit

$$S = \frac{dP}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} + \int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Iam faciamus $\int \frac{P\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \Pi$, existente Π functione quacunque algebraica ipsius p; tum enim erit

$$P = \frac{d\Pi\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp},$$

sicque ex ista functione Π innotescet functio P, et iam omnibus conditionibus plene est satisfactum.

§. 17. Constituta igitur quantitate variabili p accipiatur pro lubitu eius functio quaecunque algebraica, quae sit Π, ex eaque deriuetur functio $P = \frac{d\Pi\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, quae itidem erit algebraica. Hac vero inuenta habebimus

$$X = \frac{dP}{dp},\quad Y = \frac{p\,dP}{dp} - P \text{ et}$$
$$S = \frac{dP}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{Pp}{\sqrt{(1+pp)}} + \Pi,$$

ex quibus vt supra colligatur 1°. $v = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, deinde vero angulus ω, vt sit tang. $\omega = \frac{X}{Y}$, ex eo vero porro angulus $\Phi = \frac{c\omega}{b}$, quo inuento ternae coordinatae pro curva quaesita in superficie coni describenda erunt:

1°.

1°. $AX = x = \frac{a}{b}\sqrt{(X^2 + Y^2)}$,

2°. $XY = y = \text{cof.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$,

3°. $YZ = z = \text{fin.}\,\Phi\sqrt{(X^2 + Y^2)}$,

et denique longitudo curuae in superficie coni descriptae erit $\frac{c}{b}\int\sqrt{(dX^2 + dY^2)} = \frac{c}{b}S$.

Adhuc alia solutio generalis.

ex doctrina angulorum petita.

§. 18. Loco nouae variabilis introducatur angulus θ, ac denotet Θ eius functionem algebraicam quamcunque, ita tamen vt formula $\int\Theta\,d\theta$ obtineat valorem algebraicum; tum statuatur $dS = \Theta\,d\theta + \frac{dd\Theta}{d\theta}$, vbi elementum $d\theta$ constans sit assumtum; hinc enim erit $S = \int\Theta\,d\theta + \frac{d\Theta}{d\theta}$, ideoque functio algebraica. Nunc porro statuatur:

$$dX = dS\,\text{fin.}\,\theta \text{ et } dY = dS\,\text{cof.}\,\theta;$$

sic enim fiet $\sqrt{(dX^2 + dY^2)} = dS$. Hac ratione autem commode vsu venit, vt tam X quam Y algebraice exprimi queant; manifestum enim est fore

$$X = \frac{d\Theta}{d\theta}\,\text{fin.}\,\theta - \Theta\,\text{cof.}\,\theta \text{ et } Y = \frac{d\Theta}{d\theta}\,\text{cof.}\,\theta + \Theta\,\text{fin.}\,\theta.$$

§. 19. Inuentis hoc modo quantitatibus X et Y, ex iis quaeratur angulus ω, vt sit

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{X}{Y} = \frac{d\Theta\,\text{fin.}\,\theta - \Theta\,d\theta\,\text{cof.}\,\theta}{d\Theta\,\text{cof.}\,\theta + \Theta\,d\theta\,\text{fin.}\,\theta}.$$

Ad quam formulam euoluendam quaeratur angulus η, vt sit $\text{tang.}\,\eta = \frac{\Theta\,d\theta}{d\Theta}$, ideoque $\Theta\,d\theta = d\Theta\,\text{tang.}\,\eta$, hocque valore substituto fiet

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{\text{fin.}\,\theta - \text{tang.}\,\eta\,\text{cof.}\,\theta}{\text{cof.}\,\theta + \text{tang.}\,\eta\,\text{fin.}\,\theta} = \frac{\text{tang.}\,\theta - \text{tang.}\,\eta}{1 + \text{tang.}\,\eta\,\text{tang.}\,\theta},$$

ideo-

ideoque erit tang. $\omega =$ tang. $(\theta - \eta)$, quamobrem habebimus ipſum angulum $\omega = \theta - \eta$. Hinc igitur porro erit angulus $\Phi = \frac{c}{b}(\theta - \eta)$. Dummodo igitur $\frac{c}{b}$ fuerit fractio rationalis, etiam angulus Φ ita innoteſcet, vt eius ſinum et coſinum exhibere liceat. At vero iſte angulus Φ in figura deſignat angulum YXZ.

§. 20. Deinde quoniam poſuimus rectam $XZ = v$, ſupra vidimus eſſe $v = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$, quamobrem fiet $v = \frac{\sqrt{(d\Theta^2 + \Theta^2 d\theta^2)}}{d\theta}$. Quia autem poſueramus tang. $\eta = \frac{\Theta d\theta}{d\Theta}$, erit $d\Theta = \frac{\Theta d\theta}{tang.\eta}$, quo valore ſurrogato colligitur fore

$$v = \frac{\Theta\, sec.\eta}{tang.\eta} = \frac{\Theta}{sin.\eta},$$

atque hinc ob angulum

$$YXZ = \Phi = \frac{c}{b}(\theta - \eta),$$

ſtatim innoteſcunt coordinatae

$$XY = y = \frac{\Theta\, cos.\Phi}{sin.\eta} \text{ et } YZ = z = \frac{\Theta\, sin.\Phi}{sin.\eta}.$$

Denique vero cum ſit $AX = x = \frac{av}{b}$, erit $AX = x = \frac{a\Theta}{b\, sin.\eta}$. Sicque determinatae ſunt algebraice omnes tres coordinatae x, y et z, quibus elementum curuae quaeſitae Z, definitur, longitudo autem iſtius curuae in ſuperficie coni deſcriptae erit

$$= \frac{c}{b}.S = \frac{c}{b}\int \Theta\, d\theta + \frac{c\, d\Theta}{b\, d\theta},$$

quae ergo ob $d\Theta = \frac{\Theta d\theta}{tang.\eta}$, erit $= \frac{c}{b}(\int \Theta\, d\theta + \frac{\Theta}{tang.\eta})$.

§. 21. Dummodo igitur formula $\int \Theta\, d\theta$ integrale algebraicum habeat, curua in ſuperficie coni deſcripta erit rectificabilis, cuius conſtructio in compendium redacta ita ſe habibit:

Sumta

Sumta pro Θ functione quacunque algebraica ipsius Θ, ita vt etiam formula $\int \Theta \, d\,\theta$ euadat quantitas algebraica, quaeratur angulus η, vt sit tang. $\eta = \frac{\Theta d\,\theta}{d\,\Theta}$, quo stabilito ternae coordinatae, quibus singula curuae quaesitae puncta Z determinantur, ita erunt expressae:

1°. $AX = x = \frac{a}{b} \cdot \frac{\Theta}{\text{sin.}\,\eta}$,

2°. $XY = y = \frac{\Theta \,\text{cos.}\,(\frac{c}{b}(\theta - \eta))}{\text{sin.}\,\eta}$,

3°. $YZ = z = \frac{\Theta \,\text{sin.}\,(\frac{c}{b}(\theta - \eta))}{\text{sin.}\,\eta}$,

longitudo autem curuae hoc modo descriptae erit

$\frac{c}{b}(\int \Theta \, d\,\theta + \frac{\Theta}{\text{tang.}\,\eta})$.

Hic vero notasse iuuabit esse $XZ = v = \frac{\Theta}{\text{sin.}\,\eta}$, et angulum $YXZ = \Phi = \frac{c}{b}(\theta - \eta)$.

§. 22. Haec igitur solutio propter concinnitatem sine dubio longe est anteferenda, cum non solum infinitas curuas rectificabiles exhibeat, sed etiam facile ita adornari queat, vt rectificatio curuae in superficie coni descriptae datam quadraturam, veluti circuli aliusue curuae cuiuscunque inuoluat; tum enim nil aliud opus est, nisi vt formula integralis $\int \Theta \, d\,\theta$ hanc ipsam quadraturam exprimat. Ex quo perspicuum est, in superficie omnium conorum rectorum, in quibus ratio $b : c$ est rationalis, perinde ac in plano, infinitas duci posse lineas algebraicas, quarum rectificatio vel geometrice assignari possit, vel a data quacunque quadratura pendeat.