University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive - All Works Euler Archive

1784

De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

Part of the Mathematics Commons

Record Created:
2018-09-25

Recommended Citation
Euler, Leonhard, "De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum" (1784). *Euler Archive - All Works*. 573.
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/573

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE DVPLICI GENESI TAM EPICYCLOIDVM QVAM HYPOCYCLOIDVM

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Non dubito quin a Geometris, qui iam olim generationem Epicycloidum et Hypocycloidum docuerunt, obseruatum sit, quamlibet harum curuarum duplici modo produci posse, dum scilicet duo circuli mobiles prorsus diuersi circa peripheriam eiusdem circuli fixi circumuoluuntur: neque tamen memini, hanc obseruationem vsquam legisse. Cum igitur nuper, dum curuas, quae suis euolutis siue primis siue secundis sint similes, denuo sum perscrutatus, in hanc proprietatem incidissem, haud ingratum fore arbitror, si hoc argumentum data opera pertractauero, atque huius insignis proprietatis geminam demonstrationem, alteram analyticam, alteram geometricam communicauero.

§. 2

§. 2. Conueniet autem ante omnia cunctos diuersos casus considerasse, quibus circuli mobiles super peripheria circuli fixi prouolui possunt. Sit igitur A centrum circuli fixi, cuius radius $AC = a$, super quo incedat alius quicunque circulus CBD, cuius centrum sit B et radius $BC = b$; initio autem motus tangat circulus mobilis circulum fixum in C, vbi stilum gerat, quo sua prouolutione describat Cycloidem CZ. Circulum fixum simpliciter littera A, mobilem vero littera B breuitatis gratia designabo. Ac primo quidem patet, dum circulus mobilis B continuo augetur, hoc modo omnes curuas, quae Epicycloides vocantur, generari. Si enim circulus B euanescat, perpetuo quidem in eodem puncto C manebit, ita vt tota curua descripta in vnicum punctum quasi coalescat. Sin autem circulus B vsque in infinitum augeatur, eius peripheria in lineam rectam abibit, circulum A in C tangentem, ex cuius motu orietur curua ex euolutione circuli nata. Inter hos igitur duos casus extremos omnes plane Epicycloides constitui oportet, quae eo ampliores euadent, quo maior radius circuli mobilis b accipiatur. Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Hic circulum mobilem B extra circulum fixum prouolui assumsimus; nunc igitur eum intra hunc circulum collocemus, ita vt iam eius radius BC tanquam negatiuus, respectu prioris positionis, spectari debeat. Si ergo primo hic circulus fuerit infinite paruus, perpetuo in eodem puncto C perseuerabit. Augendo autem successiue hunc circulum eius prouolutione generabuntur omnes Hypocycloides CZ, donec, cum diameter istius circuli CD radio circuli fixi CA factus fuerit aequalis, Hypocyclois CZ in ipsum diametrum sit abitura. Quod Fig. 2

fi vero circulus B vlterius augeatur, vt eius diameter $CD = 2b$ maior fiat radio circuli fixi $CA = a$, fiue $b > \frac{1}{2}a$, tum iterum praecedentes Hypocycloides refultabunt, atque talis circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a + c)$, eandem Hypocycloidem defcribet ac minor circulus, cuius radius $b = \frac{1}{2}(a - c)$. Quin etiam, fi circulus B ipfi circulo fixo A fiat aequalis, nulla amplius prouolutio locum habere poteft, fed ftilus perpetuo in eodem puncto C perfeuerabit prorfus vti cafu $b = 0$. Ex quo iam intelligitur, omnes Hypocycloides duplici modo generari poffe, quandoquidem eadem curua defcribitur, fiue radius circuli mobilis fit $\frac{1}{2}(a - c)$ fiue $\frac{1}{2}(a + c)$, quemadmodum deinceps fum demonftraturus.

Tab. I. Fig. 3. §. 4. Augeamus nunc vlterius circulum mobilem B, vt circulum fixum A fuperet eumque totum in fe complectatur, ita vt fit $b > a$; tum autem fi punctum contactus initio fit in C, vbi fimul ftilus concipiatur, prouolutione huius circuli B circa fixum A curua defcribetur CZ, tota extra circulum fixum fita, quae ergo iterum ad claffem Epicycloidum erit referenda, atque adeo eadem erit, quae prodiret, fi circulus mobilis, cuius diameter foret $= DE$, exceffui fcilicet diametrorum CD fuper CE aequalis, fiue cuius radius foret $= b - a$, extra circulum fixum, qualis in figura eft circulus Cd, reuolueretur. Cum igitur hic circulus Cd refpectu praecedentis pofitionis pro negatiuo haberi debeat, fi eius radius vocetur $= d$, erit $-d = b - a$, fiue $d = a - b$, ita vt fit $b + d = a$, et nunc demonftrandum eft, a duobus circulis mobilibus, quorum radii fint b et d, eandem Epicycloidem generari, fi fuerit $b + d = a$, fiue quoties in figura fuerit $Cd = DE$.

DE

DEMONSTRATIO ANALYTICA.

§. 5. Consideremus circulum mobilem, cuius radius $= b$, quique extus circa peripheriam circuli fixi, cuius centrum in A et radius A C $= a$ prouoluatur, horumque circulorum contactum initio ponamus fuisse in puncto C, dehinc vero circulum mobilem peruenisse in situm P Z Q, vbi circulum A tangat in puncto P, centrum autem habeat in O, ita vt sit P O $= b$, ideoque A O $= a + b$. Quod si igitur in hoc circulo capiatur arcus P Z aequalis arcui C P, erit punctum Z in Epicycloide quaesita C Z. Hinc porro ad axem A C D ducatur normalis Z X, vt rectae A X et X Z referant binas coordinatas pro puncto Z, ad quas definiendas etiam ex centro circuli mobilis O ad axem agatur normalis O R, per Z vero recta S U, rectam A O secans in U, rectam vero O R in S, ita vt sit A X $=$ A R $-$ Z S et X Z $=$ O R $-$ O S. Tab. I. Fig. 4.

§. 6. His praeparatis vocemus angulum C A O $= \omega$, et cum sit arcus C P $= a\,\omega$, erit etiam arcus P Z $= a\,\omega$, qui per radium O P $= b$ diuisus dat angulum P O Z $= \frac{a\omega}{b}$. Iam ob A O $= a + b$ ex triangulo A O R statim nanciscimur A R $= (a + b)$ cos. ω et O R $= (a + b)$ sin. ω. Deinde quia angulus O U Z $= \omega$ et angulus P O Z $= \frac{a}{b}\,\omega$, erit angulus O Z S $= \left(\frac{a+b}{b}\right)\omega$, pro quo breuitatis gratia scribamus $\lambda\,\omega$, ita vt sit $\lambda = \frac{a+b}{b}$, ideoque $b = \frac{a}{\lambda - 1}$. Hinc iam in triangulo O Z S, ob O Z $= b$ habebimus

$$Z S = b \text{ cos. } \lambda\,\omega \quad \text{et} \quad O S = b \text{ sin. } \lambda\,\omega,$$

ex quibus ambae coordinatae ita prodibunt expressae:

A X

$$AX = x = AR - SZ = (a+b)\,\text{cof.}\,\omega - b\,\text{cof.}\,\lambda\omega \quad \text{et}$$
$$XZ = y = OR - OS = (a+b)\,\text{fin.}\,\omega - b\,\text{fin.}\,\lambda\omega,$$

vbi fi loco b fcribamus valorem $\frac{a}{\lambda-1}$, fiet

$$x = \frac{a}{\lambda-1}(\lambda\,\text{cof.}\,\omega - \text{cof.}\,\lambda\omega) \quad \text{et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda-1}(\lambda\,\text{fin.}\,\omega - \text{fin.}\,\lambda\omega).$$

§. 7. Videamus nunc, num alius circulus mobilis affignari queat, qui eosdem valores pro coordinatis x et y praebeat, quod fi enim contigerit, euictum erit, eandem Epicycloidem duplici modo produci poffe. Ponatur igitur huius alterius circuli radius $= b'$, vnde oriatur $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$; tum vero ifti circulo refpondeat angulus ω', et quia coordinatae eaedem effe debent, erit:

$$x = \frac{a}{\lambda'-1}(\lambda'\,\text{cof.}\,\omega' - \text{cof.}\,\lambda'\omega') \quad \text{et}$$
$$y = \frac{a}{\lambda'-1}(\lambda'\,\text{fin.}\,\omega' - \text{fin.}\,\lambda'\omega')$$

quae expreffiones vt illis aequales reddantur, partes priores fuperiorum aequales ftatuantur partibus pofterioribus iftarum expreffionum, viciffimque partes pofteriores illarum partibus priorum, vnde nafcuntur quatuor fequentes aequalitates:

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}\,\text{cof.}\,\omega = -\frac{1}{\lambda'-1}\,\text{cof.}\,\lambda'\omega', \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}\,\text{fin.}\,\omega = -\frac{1}{\lambda'-1}\,\text{fin.}\,\lambda'\omega',$$
$$-\frac{1}{\lambda-1}\,\text{cof.}\,\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\,\text{cof.}\,\omega', \quad -\frac{1}{\lambda-1}\,\text{fin.}\,\lambda\omega = \frac{\lambda'}{\lambda'-1}\,\text{fin.}\,\omega'.$$

Hic igitur primo angulos vtrinque faciamus aequales, et ex prima et fecunda fiet $\omega = \lambda'\omega'$: ob tertiam vero et quartam effe debet $\lambda\omega = \omega'$, ex quibus coniunctim fequitur $1 = \lambda\lambda'$, ideoque $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$. Nunc igitur finibus et cofinibus omiffis coefficientes in omnibus quatuor aequationibus

nibus ſponte fient aequales; ex prima enim erit

$$\frac{\lambda}{\lambda-1} = -\frac{1}{\lambda'-1} = -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}-1} = -\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

ſimilique modo idem euenit in reliquis formulis. Conſequenter circulus mobilis, cuius radius $= b'$, eandem generabit curuam ac circulus cuius radius $= b$.

§. 8. **Cum** igitur poſuerimus

$\lambda = \frac{a+b}{b}$ et $\lambda' = \frac{a+b'}{b'}$, ob

$\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ fiet $\frac{b'}{a+b'} = \frac{a+b}{b}$;

ex qua aequatione colligitur

$$b' = -a - b, \text{ ita vt fit } b + b' = -a,$$

ex quo patet, binos circulos mobiles, quorum radiorum ſumma negatiue aequatur radio circuli fixi, eandem generare Epicycloidem, ſi modo notetur, valores poſitiuos a puncto C furſum, negatiuos autem deorſum eſſe capiendos.

§ 9. Quod ſi ergo ſtatuamus

$$b = -\tfrac{1}{2} a (1 + n), \text{ erit } b' = -\tfrac{1}{2} a (1 - n).$$

Ponamus igitur in prioribus formulis pro x et y inuentis loco b iſtum valorem: $-\frac{1}{2} a (1 + n)$, vnde fit $\lambda = \frac{n-1}{n+1}$, et conſequemur ſequentes valores:

$$x = \tfrac{1}{2} a \left((1 - n) \operatorname{cof.} \omega + (1 + n) \operatorname{cof.} \tfrac{n-1}{n+1} \omega \right)$$
$$y = \tfrac{1}{2} a \left((1 - n) \operatorname{fin.} \omega + (1 + n) \operatorname{fin.} \tfrac{n-1}{n+1} \omega \right).$$

Ponamus hic, ad fractiones tollendas, $\omega = (n + 1) \Phi$ et impetrabimus has formulas:

$$x = \tfrac{1}{2} a \left((1 - n) \operatorname{cof.} (n + 1) \Phi + (1 + n) \operatorname{cof.} (n - 1) \Phi \right)$$
$$y = \tfrac{1}{2} a \left((1 - n) \operatorname{fin.} (n + 1) \Phi + (1 + n) \operatorname{fin.} (n - 1) \Phi \right)$$

qua-

quarum prior manifesto eadem manet, etiamsi loco n scribatur $-n$, posterior vero, facta hac mutatione, abit in sui negatiuum, quo autem natura curuae non mutatur, ita vt iam demonstratum sit, eandem curuam oriri, siue pro circulo mobili capiatur

$$b = -\tfrac{1}{2}a(1+n), \text{ siue } b = -\tfrac{1}{2}a(1-n).$$

DEMONSTRATIO GEOMETRICA.

Tab. I. Fig. 5. §. 10. Constituto circulo fixo, cuius centrum in A et radius $AC = a$, consideremus duos circulos hunc in C tangentes, vbi vterque gerat stilum, quo deinceps, dum vterque circa circulum fixum conuoluitur, curua describatur CZ. Ac prior quidem circulus conuexitate sua circulum fixum in C tangens habeat suum centrum in B, sitque eius radius $BC = b$, ideoque diameter $CD = 2b$; alter vero circulus fixum concauitate sua in C amplectens centrum suum habeat in B′, sitque eius radius $B'C = B'D'$ $= a + b$, qui ergo aequibitur summae radiorum circuli fixi et superioris B, vnde erit interuallum

$$AB' = b = CB, \text{ ideoque } CB' = AB.$$

Praeterea vero erit interuallum $ED = CD = 2b$.

Fig. 6. §. 11. Postquam initio ambo circuli mobiles situm modo descriptum tenuerunt, peruenerit superior circulus B, facta quadam prouolutione, in situm cZd, ita vt eius centrum iam sit in b, atque in eius peripheria abscindatur arcus cZ, aequalis arcui cC super circulo fixo, eritque punctum Z locus, vbi iam stilus huius circuli reperietur, ideoque punctum in curua CZ. Tum vero punctum c erit contactus huius circuli cum fixo, ita vt sit $Ab = a + b$.

Iam

Iam ex Z per punctum c producatur chorda Zc, donec circulum fecet in puncto c', ac manifeftum eft, fegmenta cZ et cc' fore fimilia, propterea quod arcus amborum cum fuis chordis aequales faciunt angulos: vterque enim arcus Zc et cc' ad rectam Ab eft normalis. Hanc ob rem erit arcus cZ ad arcum cc' vti chorda cZ ad chordam cc', atque etiam vti radii circulorum, ad quos pertinent, hoc eft vt $b:a$; vnde patet etiam fore chordas inter fe vt $b:a$.

§. 12. Quod fi iam fuper recta $c'Z$, tanquam chorda, fimile exftruatur fegmentum $c'rz$, ita vt angulus, quem ifte arcus cum fua chorda conftituit, aequalis fit angulo quem arcus cc' cum fua chorda facit, patet, arcum $c'rz$ tangere circulum fixum in puncto c', et quia eius chorda $c'Z$ eft fumma chordarum $c'c$ et cZ, etiam ipfe arcus $c'rZ$ aequabitur fummae arcuum $c'c$ et cZ; at vero fecimus arcum $cZ =$ arcui cC, vnde fequitur arcum $c'rZ$ aequalem effe arcui circuli fixi Cc'.

§. 13. Quoniam porro arcus $c'rZ$ aequalis eft fummae arcuum fibi fimilium $c'c$ et cZ, quorum radii funt $Ac' = a$ et $cb = b$, etiam radius circuli, cuius eft portio, erit fummae illorum radiorum $a+b$ aequalis, ideoque erit arcus circuli alterius mobilis B'. Hinc quia ifte arcus circulum fixum in c' tangit, eius centrum erit in recta cA producta in b', ita vt fit $Ab' = AB' = b$; vnde patet, poftquam ifte circulus, qui initio fixum tangebat in C, eo vsque fuerit prouolutus, vt eum iam in puncto c' tangat, eius cufpidem interea perueniffe in ipfum punctum Z, propterea quod arcus $c'rZ$ aequalis eft arcui $c'cC$,

ficſicque euictum eſt, vtriusque circuli B et B$'$ motu eandem Epicycloidem C Z deſcribi.

§. 14. Super his ſequentia annotaſſe iuuabit, quod ſi ponatur angulus $C A c = \omega$, vt ſit arcus $C c = a\omega$, quia huic aequalis eſt arcus $c Z$, erit angulus $c b Z = \frac{a\omega}{b}$. Tum vero quia arcus $c c'$ ſimilis eſt arcui $c Z$, erit etiam angulus $c A c' = \frac{a\omega}{b}$. Quin etiam, ſi ducatur recta $b Z$, quia etiam arcus $c' r Z$ binis memoratis arcubus ſimilis eſt, eiusque centrum in b' verſatur, erit $b' Z$ eius radius $= a + b = b' c'$ et angulus $c' b' Z = \frac{a\omega}{b}$; vnde patet, rectam $b' Z$ parallelam fore rectae $A c$. Praeterea vero, quia etiam recta $A b$ eſt $a + b$, ideoque aequalis rectae $b' Z$, manifeſtum eſt, quadrilaterum $A b' Z b$ eſſe parallelogrammum, ex quo indoles huius figurae penitius perſpicitur. Praeterea hic obſeruaſſe operae pretium erit, arcum C Z a minore circulo B deſcribi, dum prouoluitur per angulum $C A c = \omega$, evndem vero arcum ab altero circulo maiori deſcribi, dum is prouoluitur per angulum

$$C A c' = \frac{a+b}{b}\,\omega.$$

§. 15. Quod ſi iam angulum $C A c = \omega$ tantum accipiamus, vt interea minor circulus B totam reuolutionem abſoluerit, eiusque ſtilus nunc in c peruenerit, vbi curua denuo habebit cuspidem, quia iſtius circuli peripheria eſt $2\pi b$, cui arcus $C c$ aequalis ſtatui debet, fiet angulus $\omega = \frac{2\pi b}{a}$. Interea autem maior circulus B$'$ prouolutus erit per angulum $\frac{(a+b)}{b} = \frac{2\pi(a+b)}{a}$; ſuper circulo igitur fixo interea percurrit arcum $= 2\pi(a+b)$, quae eſt ipſa peripheria iſtius circuli B$'$, ita vt, dum minor circulus B inte-

integram reuolutionem abſoluit, etiam maior circulus integram reuolutionem abſoluerit.

§. 16. Etſi in hac demonſtratione aſſumſimus, circulum fixum ab altero circulo mobili extus tangi, alterum vero maiorem intus tangere, ita vt ſumma diametrorum illorum duorum aequalis ſit diametro huius maximi: tamen eadem demonſtratio facile applicari poteſt ad caſum, quo ambo circuli mobiles circulum fixum intus tangunt, quo caſu ſumma diametrorum amborum circulorum mobilium diametro circuli fixi aequalis eſſe debet. Interim tamen ſequens theorema adiungamus, quo iſte caſus facilius expedietur.

Theorema.

§. 17. Si circulus D E F intus in duobus quibuscunque punctis E et F tangatur a duobus circulis E G H et F G H, quorum diametri ſimul ſumti aequentur diametro circuli maximi D E F, ducaturque chorda E F per contactus puncta E et F, ea per alteram interſectionem G amborum circulorum minorum tranſibit, et ambo arcus E G et F G ſimul ſumti aequales erunt arcui E F. Tab. I. Fig. 7.

Demonſtratio.

Quia ambo circuli minores maiorem tangunt in punctis E et F, chorda E F ad omnes tres circulos aequaliter inclinabitur, ideoque ab omnibus tribus ſimilia ſegmenta abſcindet, et chordae duorum minorum ſimul ſumtae aequales erunt chordae maximi circuli E F; vnde patet interfectionem amborum circulorum minorum G in ipfam rectam E F incidere, ita vt fit E G : F G vt diameter circuli E G H ad diametrum circuli F G H, qui cum fimul fumti aequales fint diametro circuli maximi, euidens eft, etiam fummam chordarum E G et F G toti chordae E F aequalem effe debere. Quoniam igitur arcus his chordis fubtenfi ad eas eandem tenent rationem, neceffe eft vt arcus E F aequalis fit fummae arcuum E G et F G.

Corollarium 1.

§. 18. Cum arcus E F aequalis fit fummae arcuum E G et F G, is ita fecetur in I, vt fiat arcus E I = arcui E G et arcus F I = arcui F G; et iam manifeftum eft, fi ambo circuli minores initio maximum tetigerint in puncto I, vbi vtrique ftilus infixus concipiatur; tum ftilum circuli E G H nunc fore in puncto G, vbi etiam erit ftilus alterius circuli F G H; vnde patet, ambos ftilos ex I egreffos eandem curuam I G effe defcripturos, quae ergo erit Hypocyclois vtrique circulo mobili communis.

Corollarium 2.

§. 19. Quod fi ergo ambo circuli mobiles initio circulum maximum in puncto I contigerint, indeque ambo in plagas contrarias ita prouoluantur per arcus I E et I F, qui inter fe habeant rationem diametrorum, tum ifti circuli fe perpetuo in iisdem punctis interfecabunt, iis fcilicet, quae initio fuerant fimul in puncto I. Ceterum hic

Phae-

Phaenomenon maxime notatu dignum se offert, quod, dum ambo circuli mobiles se in duobus punctis G et H intersecant, istae demonstratae proprietates ad alterum tantum horum duorum punctorum pertineant.

Corollarium 3.

§. 20. Quod autem ad situm puncti H attinet, si ex puncto G vtriusque circuli ducantur diametri G P et G Q, iungaturque recta P Q, facillime demonstrari potest, punctum H in ipsam hanc rectam P Q incidere, atque adeo chordam G H in eam esse perpendicularem. Quia enim anguli G H P et G H Q, vtpote in semicirculo, sunt recti, etiam chordae P H et Q H in directum iacent.